**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

**НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**

**КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Ж.Баласагына**

ДИССЕРТАЦИОННЫЙ СОВЕТ Д 01.15.513

На правах рукописи
УДК: 517.97; 62-50

СЕЙДАКМАТ КЫЗЫ ЭРКЕАИМ

НЕЛИНЕЙНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ ВОЛЬТЕРРОВО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Бишкек – 2016

Диссертационная работа выполнена на кафедре «Высшая математика» Кыргызского Государственного университета имени И. Арабаева

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Керимбеков Акылбек**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Алымкулов Келдибай**
	доктор физико-математических наук, доцент **Джураев** **Абубакир Мухтарович**
Ведущая организация	Евразийский Национальный университет им. Л.Н. Гумилева, 010000, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2.

Защита диссертации состоится «17» января 2017 г. в 14^{00} часов на заседании Диссертационного совета Д 01.15.513 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук при Институте математики НАН КР и Кыргызском Национальном университете им. Ж. Баласагына по адресу: Кыргызстан, 720054, г. Бишкек, ул. Абдымомунова 328, лабораторный корпус №6 КНУ, аудитория 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН КР, Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а.

Автореферат разослан «15» декабря 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н., профессор Искандаров С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Актуальность темы диссертации. Исследование математических моделей многих реальных процессов, описываемых в зависимости только от настоящего состояния, сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям или к дифференциальным уравнениям в частных производных. Модели, учитывающие поведение системы в предыдущие моменты времени (с эредитарными явлениями), сводятся к интегро-дифференциальным уравнениям. Одним из первых, такие задачи для интегро-дифференциальными уравнениями параболического и гиперболического типов, исследовал В.Вольтерра. К необходимости изучения интегро-дифференциальных уравнений также приводит математическое описание задач движения жидкости и газов, переноса частиц в веществе, переноса лучистой энергии и др.

С такими моделями связано много задач оптимального управления системами с распределенными параметрами. Однако, несмотря на обилие исследований по теории оптимального управления, задачи управления процессами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями мало изучены.

Актуальной задачей теории оптимального управления распределенными системами является исследование разрешимости задачи нелинейного управления процессами, описываемых вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями и разработка конструктивных методов их решения.

В диссертации исследованы задачи нелинейной оптимизации теплового процесса, когда управляемый процесс описывается вольтеррово интегро-дифференциальным уравнением и граничное условие краевой задачи нелинейно содержит параметр управления.

Связь темы диссертации с крупными научными программами, основными научно-исследовательскими работами, проводимыми научными учреждениями. Диссертация выполнена в рамках научно-исследовательской работы «Математические методы оптимального управления технологическими процессами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных» кафедры «Прикладная математика и информатика» Кыргызско-Российского Славянского Университета МОиН КР (Рег. Номер 0006988, № КР-03).

Цели и задачи исследования. Целью диссертационной работы является исследование задач нелинейной оптимизации теплового процесса, когда управляемый процесс описывается вольтеррово интегро-дифференциальным уравнением и управление входит в граничное условие. При этом поставлены и решены следующие задачи:

– найти достаточные условия разрешимости задачи нелинейной оптимизации теплового процесса, описываемые вольтеррово интегро-дифференциальным уравнением, для одностороннего управления, а также для двухстороннего управления;

– разработать алгоритм построения приближенного решения и доказать его сходимость задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемые вольтеррово интегро-дифференциальным уравнением, при наличии нелинейных граничных скалярных и векторных управлений.

Научная новизна полученных результатов. Впервые, разработан алгоритм построения приближенного решения нелинейной задачи оптимизации, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями в случае, когда функция внешнего воздействия входит в граничное условие и является нелинейно зависящей функции управления (для одностороннего управления, а также для двухстороннего управления), в частности,

– установлено, что оптимальное управление удовлетворяет дополнительному условию в виде дифференциального неравенства и находится как решение нелинейного интегрального уравнения;

– найдено достаточное условие разрешимости задачи нелинейной оптимизации при нелинейном граничном управлений, для случай одностороннего и двухстороннего управлений;

– указан алгоритм построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации (для управления с одного конца, а также для векторного управления с двух концов) и доказана их сходимость к точному решению.

– установлено, что следует различать 3 вида приближенных решений;

– полученные результаты являются новыми и характеризуются как дальнейшее развитие метода решения задачи нелинейной оптимизации.

Практическая значимость полученных результатов. Полученные результаты являются новыми в теории оптимального управления системами с распределенными параметрами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями. Разработанный метод решения задачи тепловых процессов, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями с нелинейным граничным управлением может быть использован при решении прикладных задач, связанных с процессом теплопроводности (переноса частиц, ядерные реакторы, различные диффузионные процессы, межвидовое взаимодействие биологических популяций, движение твердого или деформируемого тела). С другой стороны, полученные результаты носят и теоретический характер. Их можно использовать при разработке конструктивных методов решения нелинейных прикладных задач оптимизации, а также в развитии теории краевых задач и нелинейных интегральных уравнений.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

– Построено слабо обобщенное решение краевой задачи управляемого теплового процесса в случае, когда управляемый процесс описывается вольтеррово интегро-дифференциальным уравнением, нелинейно содержащий параметр управления в граничном условии;

– найдены достаточные условия разрешимости задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями в случае, когда минимизируется интегральный квадратичный функционал и нелинейно содержащий параметр управления в граничном условии;

– указан алгоритм построения точного и приближенного решений и доказан сходимость приближенного решения к точному решению задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями, нелинейно содержащий параметр управления в граничном условии;

– рассмотрен численный пример, подтверждающий теоретические выводы.

Личный вклад соискателя. По результатам исследований опубликованы 13 статей и 5 тезиса. Постановка задачи принадлежит научному руководителю, которые опубликованных в соавторстве в работах [1-3, 6, 8-14], а основные результаты: как построение слабо обобщенного решения, вывод условия оптимальности, достаточные условия существования решения нелинейного интегрального уравнения, алгоритм построения точного и приближенного решений нелинейной задачи оптимизации и сходимость приближенных решений получены соискателем.

Апробации результатов диссертации. Результаты исследований докладывались на международных конференциях, симпозиумах и межвузовских, вузовских конференциях:

– 2-я международная научная конференция «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений». Кыргызстан, Булан-Соготту, 2013;
– 3-я республиканская научная конференция, посвященной памяти профессора Р.Усубакунова. Кыргызстан, Бишкек, 2014;
– V Congress of the Turkic World Mathematicians. Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 2014;
– Second ICAAM. Kazakstan, Shymkent, 2014;
– Issyk-Kul International Mathematical Forum. Kyrgyzstan, Bozteri, 2015;

– International Conference on Advancements in Mathematical Sciences. Antalya, Turkey, 2015;
– XI Международная научная конференция студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2016». Казахстан, Астана, 2016;

а также были обсуждены в научном семинаре «Оптимальное управление системами с распределенными параметрами (Управляемые процессы, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями)» (Научный руководитель проф. Керимбеков А.) кафедры прикладной математики и информатики Кыргызско-Российского Славянского Университета.

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 13 научных статьях и в 5 тезисах, в том числе в реферируемых журналах Кыргызской Республики – 6 (4 из которых входят в базу РИНЦ), в реферируемых зарубежных журналах – 3 (2 из которых входят в базу РИНЦ), в материалах конференций – 4, из них в единоличном авторстве – 5. По материалам первой главы опубликовано 4 статей и 1 тезис, а по материалам второй главы опубликовано 6 статей и 3 тезиса.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, одиннадцать разделов, заключения, списка использованных источников, содержащего 105 наименования, 8 таблиц, 7 рисунков и приложения. Общий объем работы содержит 106 страниц машинописного текста.

Краткое содержание работы. В первой главе приведены примеры краевых задач, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями, задач оптимизации с граничными управлениями для тепловых процессов, сделан краткий обзор исследований, примыкающих к теме диссертации, и изложено краткое содержание диссертации.

Во второй главе исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации, когда тепловой процесс описывается вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями и управление нелинейно входит в граничное условие.

В §2.1 рассматривается управляемый тепловой процесс $v(t,x)$, $(t,x)\in Q=\{0<x<1,\ 0<t\le T\}$, описываемый краевой задачей

$$v_t = v_{xx} + \lambda\int_0^t K(t,\tau)v(\tau,x)\,d\tau + g(t,x),\quad 0<x<1,\quad 0<t\le T\,, \tag{1}$$

$$v(0,x)=\psi(x),\quad 0<x<1\,, \tag{2}$$

$$v_x(t,0)=0,\quad v_x(t,1)+\alpha v(t,1)=p\left[t,u(t)\right],\quad 0<t\le T\,, \tag{3}$$

где $g(t,x)\in H(Q)$, $\psi(x)\in H(0,1)$ - заданные функции; а функция $p[t,u(t)]\in H(0,T)$ нелинейно зависит от функции управления $u(t)\in H(0,T)$ и по функциональной переменной $u(t)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial p[t,u(t)]}{\partial u}\neq 0,\quad \forall t\in[0,T]; \tag{4}$$

ядро $K(t,\tau)$ – известная ограниченная функция, т.е.

$$K_0=\sup_{(t,\tau)\in D}\left|K(t,\tau)\right|; \tag{5}$$

$\lambda-$ параметр, постоянная $\alpha>0$, T -фиксированный момент времени, $H(Y)$ - гильбертово пространство функций, определенных на множестве Y.

Определение 2.1. Слабо обобщенным решением краевой задачи (1)-(3) называется любая функция $v(t,x)\in H(Q)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^1 (v\phi)_{t_1}^{t_2}\,dx=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^1\left[(\phi_t+\phi_{xx})v(t,x)+\left(\lambda\int_0^t K(t,\tau)v(\tau,x)\,d\tau+g(t,x)\right)\phi\right]dxdt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\left[p[t,u(t)]\phi(t,1)-\left(\phi_x(t,1)+\alpha\phi(t,1)\right)v(t,1)+\phi_x(t,0)v(t,0)\right]dt, \tag{6}$$

при любых t_1 и t_2 $(0<t_1\le t\le t_2\le T)$, и для любой функций $\phi(t,x)\in C^{1.2}(Q)$, а начальному и граничному условиям в слабом смысле, т.е.

$$\lim_{t\to+0}\int_0^1 v(t,x)\phi_0(x)\,dx=\int_0^1\psi(x)\phi_0(x)\,dx,$$

$$\lim_{x\to1-0}\int_0^T\left(v_x(t,x)-\alpha v(t,x)\right)\phi_1(t)\,dt=\int_0^T p[t,u(t)]\phi_1(t)\,dt,$$

для любых функций $\phi_0(x)\in H(0,1)$ и $\phi_1(t)\in H(0,T)$.

Построено слабо обобщенное решение краевой задачи (1)-(3) в виде

$$v(t,x)=\left(a_n(t)+\lambda\int_0^t R_n(t,s,\lambda)a_n(s)\,ds\right)z_n(x), \tag{7}$$

где

$$R_n(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s),\quad n=1,2,3,\dots$$

резольвента ядра $K_n(t,s)=\int\limits_s^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}K(\tau,s)\,d\tau$,

$$a_n(t)=e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int\limits_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\left(g_n(\tau)+z_n(1)\,p\left[\tau,u(\tau)\right]\right)d\tau ,$$

$\{z_n(x)\}$ – полная ортонормированная система собственных функций краевой задачи

$$z''(x)+\lambda_0^2 z(x)=0,\quad z'(0)=0,\quad z'(1)+\alpha z(1)=0 ,$$

т.е. $z_n(x)=\sqrt{\dfrac{2\left(\lambda_n^2+\alpha^2\right)}{\lambda_n^2+\alpha^2+\alpha}}\cos\lambda_n x,\quad n=1,2,3,\dots,$

а $\{\lambda_n\}$ – собственные значения, которые определяются как решение трансцендентного уравнения $\lambda tg\lambda=\alpha$ и обладают следующими свойствами:

$$\lambda_n\le\lambda_{n+1},\quad \forall n=1,2,3,\dots,\quad \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty \quad \text{и} \quad (n-1)\pi<\lambda_n<\frac{\pi}{2}(2n-1).$$

В §2.2 рассмотрена задача минимизации квадратичного интегрального функционала

$$J[u]=\int\limits_0^1\left[v(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int\limits_0^T u^2(t)\,dt,\quad \beta>0 ,$$

на множестве решений $v(t,x)$ краевой задачи (1)-(3), где $\xi(x)\in H(0,1)$ - заданная функция.

Применяя принципа максимума для систем с распределенными параметрами, получены условия оптимальности

$$\Pi_u(\cdot;u)=p_u\left[t,u(t)\right]\omega(t,1)-2\beta u(t)=0 ,$$

$$\Pi_{uu}(\cdot;u)=p_{uu}\left[t,u(t)\right]\omega(t,1)-2\beta<0 ,$$

где $\omega(t,x)$ находится по формуле

$\omega(t,x)=$

$$=-2\sum_{n=2}^{\infty}\left(\lambda\int_t^T L_n(s,t,\lambda)\left[\nu_n(T)-\xi_n\right]e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds+\left[\nu_n(T)-\xi_n\right]e^{-\lambda_n^2(T-t)}\right)z_n(x)$$

которая является, сопряженной (1)-(3), где $L_n(s,t,\lambda)$ - резольвента ядра, $B_n(s,t)=\int_t^s e^{-\lambda_n^2(\tau-t)}K(s,\tau)d\tau$.

В §2.3 установлено что, в случае минимизации квадратичного функционала, оптимальное управление удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению

$$\beta u(t)\,p_u^{-1}\left[t,u(t)\right]=$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}G_n^*(t)\,z_n(1)\left[-h_n+\int_0^T G_n(\tau)\,z_n(1)\,p\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau\right] \tag{8}$$

и дополнительному условию

$$p_u\left[t,u(t)\right]\left(\frac{u}{p_u\left[t,u(t)\right]}\right)_u>0, \tag{9}$$

где

$$h_n=\xi_n-\psi_n\left(e^{-\lambda_n^2T}+\lambda\int_0^T R_n(T,\tau,\lambda)e^{-\lambda_n^2s}ds\right)-\int_0^T G_n(\tau)\,g_n(\tau)\,d\tau;$$

$$G_n(t)\,z_n(1)=z_n(1)\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_t^T R_n(T,\tau,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-t)}ds\right)=G_n(t,1);$$

$$G_n^*(t)\,z_n(1)=z_n(1)\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_t^T L(s,t,\lambda_n)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds\right)=G_n^*(t,1),$$

т.е. оптимальное управление находится как решение задачи (8) - (9).

Далее согласно методике, разработанной проф. Керимбековым А. рассматривается вопрос однозначной разрешимости интегрального уравнения (8) приведенного к виду

$$\beta u(t)\,p_u^{-1}\left[t,u(t)\right]=\theta(t). \tag{10}$$

Лемма 2.3.1. Функция $\theta(t)$ является элементом пространства $H(0,T)$.

Отсюда, согласно второму условию оптимальности (9), функция $u(t)$ находится

$$u(t)=\varphi\left[t,\theta(t),\beta\right]. \tag{11}$$

Тогда учитывая соотношения (9)-(10) нелинейное интегральное уравнение (8) приводится к виду

$$\theta(t)+\sum_{n=1}^{\infty}G_n^*(t,1)\int_0^T G_n(\tau,1)\,p\left[\tau,\varphi\left[\tau,\theta(\tau),\beta\right]\right]d\tau=\sum_{n=1}^{\infty}G_n^*(t,1)\,h_n\ . \tag{12}$$

Далее это уравнение исследуется в операторной форме

$$\theta(t)=G\left[\theta(t)\right], \tag{13}$$

где оператор $G[\theta]$ действует по формуле

$$G\left[\theta(t)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}G_n^*(t,1)\left[h_n-\int_0^T G_n(\tau,1)\,p\left[\tau,\varphi\left[\tau,\theta(\tau),\beta\right]\right]d\tau\right].$$

Лемма 2.3.2. Оператор $G[\theta]$ отображает пространство $H(0,T)$ в себя.

Лемма 2.3.3. Пусть выполнены условия

$\left\|p\left[t,u(t)\right]-p\left[t,\bar{u}(t)\right]\right\|_H\le p_0\left\|u(t)-\bar{u}(t)\right\|_H$, $p_0>0$,

$\left\|\varphi\left[t,\theta(t),\beta\right]-\varphi\left[t,\bar{\theta}(t),\beta\right]\right\|_H\le\varphi_0(\beta)\left\|\theta(t)-\bar{\theta}(t)\right\|_H$, $\varphi_0(\beta)>0$,

Тогда при выполнении условия

$$\gamma=2\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{|\lambda|TK_0M_0}{2\lambda_1^2}\right)p_0\varphi_0(\beta)<1,$$

где $|\lambda|$–некоторое положительное постоянное, оператор $G[\theta]$ является сжимающим.

Теорема 2.3.1. При выполнении условий

$\dfrac{\partial p\left[t,u(t)\right]}{\partial u}\ne 0,\quad \forall t\in[0,T]$;

1) $\left\|p\left[t,u(t)\right]-p\left[t,\bar{u}(t)\right]\right\|_H\le p_0\left\|u(t)-\bar{u}(t)\right\|_H$, $p_0>0$,

2) $\left\|\varphi\left[t,\theta(t),\beta\right]-\varphi\left[t,\bar{\theta}(t),\beta\right]\right\|_H\le\varphi_0(\beta)\left\|\theta(t)-\bar{\theta}(t)\right\|_H$, $\varphi_0(\beta)>0$,

и

$$\gamma = 2\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6}\right)\left(1 + \frac{|\lambda| T K_0 M_0}{2\lambda_1^2}\right) p_0 \varphi_0(\beta) < 1,$$

операторное уравнение (13) в пространстве $H(0,T)$ имеет единственное решение $\theta(t) \in H(0,T)$.

Решение операторного уравнения (12) найдено методом последовательных приближений по схеме

$$\theta_l(t) = G\left[\theta_{l-1}(t)\right], \quad l = 1, 2, 3, \ldots, \quad \bar{\theta}(t) = \lim_{l\to\infty} \theta_l(t),$$

где $\theta_0(t)$ произвольный элемент пространства $H(0,T)$, причем имеет место оценке

$$\left\|\bar{\theta}(t) - \theta_l(t)\right\|_H \le \frac{\gamma^l}{1-\gamma}\left\|G\left[\theta_0(t)\right] + h(t) - \theta_0(t)\right\|_H . \tag{14}$$

Найденное решение $\bar{\theta}(t)$, подставляя в формулу (11) находим искомое оптимальное управление

$$u^0(t) = \varphi\left[t, \bar{\theta}(t), \beta\right].$$

Оптимальный процесс $v^0(t,x)$, т.е. решение краевой задачи (1)-(3), соответствующее оптимальному управлению $u^0(t)$, находится по формуле

$$v^0(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^t R_n(t,s,\lambda) a_n^0(s)\,ds + a_n^0(t)\right) z_n(x),$$

где $a_n^0(t) = e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\left(g_n(\tau) + z_n(1)\, p\left[\tau, u^0(\tau)\right]\right) d\tau$,

а минимальное значение функционала вычисляется по формуле

$$J\left[u^0(t)\right] = \int_0^1 \left[v^0(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + \beta\int_0^T \left[u^0(t)\right]^2 dt .$$

В §2.4 построено приближенное решение и доказано сходимость к точному решению.

На практике не всегда удается найти точное решение уравнения (13). Поэтому в большинство случаев ограничиваются нахождением приближенного решения $\theta_k(t)$ уравнения (14), где число k определяется из неравенства при условии, что $h(t) = \theta_0(t)$

$$\left\|\bar{\theta}(t)-\theta_k(t)\right\|_H \le \frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G\left[\theta_0(t)\right]\right\|_H . \qquad (14^1)$$

Приближение оптимальное управление определяется формулой

$$u_k(t)=\varphi[t,\theta_k(t),\beta]$$

и удовлетворяют оценке

$$\left\|u^0(t)-u_k(t)\right\|_H \le \varphi_0(\beta)\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G\left[\theta_0(t)\right]\right\|_H . \qquad (15)$$

Приближения оптимального процесса определяются формулами

$$\nu_k(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^t R_n(t,s,\lambda)a_n^k(s)\,ds+a_n^k(t)\right)z_n(x);$$

$$\nu_k^m(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^t R_n^m(t,s,\lambda)a_n^k(s)\,ds+a_n^k(t)\right)z_n(x),$$

$$R_n^m(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{m}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s);$$

$$\nu_k^{m,r}(t,x)=\sum_{n=1}^{r}\left(\lambda\int_0^t R_n^m(t,s,\lambda)a_n^k(s)\,ds+a_n^k(t)\right)z_n(x);$$

где $a_n^k(t)=e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\left(g_n(\tau)+z_n(1)\,p\left[\tau,u_k(\tau)\right]\right)d\tau$,

и удовлетворяют оценке

$$\left\|\nu^0(t,x)-\nu_k^{m,r}(t,x)\right\|_H^2 \le \left\|\nu^0(t,x)-\nu_k(t,x)+\nu_k(t,x)-\right.$$

$$\left.-\nu_k^m(t,x)+\nu_k^m(t,x)-\nu_k^{m,r}(t,x)\right\|_H^2 \le \left\|\nu^0(t,x)-\nu_k(t,x)\right\|_H^2+$$

$$+\left\|\nu_k(t,x)-\nu_k^m(t,x)\right\|_H^2+\left\|\nu_k^m(t,x)-\nu_k^{m,r}(t,x)\right\|_H^2 \xrightarrow[k,m,r\to\infty]{} 0 . \qquad (16)$$

Приближенные значения функционала определяются формулами

$$J\left[u_k(t)\right]=\int_0^1\left[\nu_k(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T\left[u_k(t)\right]^2dt;$$

$$J_m\left[u_k(t)\right]=\int_0^1\left[\nu_k^m(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T\left[u_k(t)\right]^2dt;$$

$$J_m^r\left[u_k(t)\right]=\int_0^1\left[\nu_k^{m,r}(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T\left[u_k(t)\right]^2dt;$$

и удовлетворяют оценке

$$\left|J[u^0]-J_m^r[u_k]\right|\le\left|J[u^0]-J[u_k]+J[u_k]-J_m[u_k]+J_m[u_k]-J_m^r[u_k]\right|\le$$

$$\le\left|J[u^0]-J[u_k]\right|+\left|J[u_k]-J_m[u_k]\right|+\left|J_m[u_k]-J_m^r[u_k]\right|\xrightarrow[k,m,r\to\infty]{}0\,, \qquad (17)$$

В §2.5 рассчитан модельный пример, подтверждающий теоретические результаты.

В третьей главе исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации теплового процесса, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями в случае векторного управления процессом распространения тепла, и при этом функции управления нелинейно входит в граничные условия.

В §3.1 рассматривается управляемый тепловой процесс, описываемой краевой задачей, в случае двухстороннего нелинейного граничного управления

$$\nu_t=\nu_{xx}+\lambda\int_0^t K(t,\tau)\nu(\tau,x)\,d\tau+g(t,x),\quad (t,x)\in Q\,, \qquad (18)$$

$$\nu(0,x)=\psi(x),\quad 0<x<1\,, \qquad (19)$$

$$\nu_x(t,0)=p_1\left[t,u_1(t)\right],\quad 0<t\le T\,,$$

$$\nu_x(t,1)+\alpha\nu(t,1)=p_2\left[t,u_2(t)\right],\ \ 0<t\le T\,, \qquad (20)$$

где $p_1\left[t,u_1(t)\right]\in H(0,T)$, $p_2\left[t,u_2(t)\right]\in H(0,T)$ – функции внешних источников, нелинейно зависящие от функции управления $u_1(t)\in H(0,T)$ и $u_2(t)\in H(0,T)$, и по функциональным переменным $u_1(t)$, $u_2(t)$ удовлетворяют условию

$$\frac{\partial p\left[t,u_1(t)\right]}{\partial u_1}\ne 0,\quad \frac{\partial p\left[t,u_2(t)\right]}{\partial u_2}\ne 0\,,\quad \forall t\in[0,T];$$

а остальные параметры имеют те же характеристики как в краевой задаче (1)-(3).

Найдено слабо обобщенное решение краевой задачи (18)-(20)

$$\nu(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda\int_0^t R_n(t,s,\lambda)a_n(s)\,ds+a_n(t)\right]z_n(x)\,,$$

где

$$a_n(t)=e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\Big(g_n(\tau)+p_2\left[\tau,u_2(\tau)\right]z_n(1)-p_1\left[\tau,u_1(\tau)\right]z_n(0)\Big)d\tau\,.$$

В §3.2 рассмотрена задача минимизации квадратичного интегрального функционала

$$J\left[u_1(t),u_2(t)\right]=\int_0^1\left[\nu(T,x)-\xi(x)\right]^2 dx+\beta\int_0^T\left(u_1^2(t)+u_2^2(t)\right)dt,\quad \beta>0,$$

на множестве решений краевой задачи (18)-(20), где $\xi(x)\in H(0,1)$ - заданная функция.

В §3.3 показано, что векторное управление $\left(u_1^0(t),u_2^0(t)\right)$ находится как решение системы нелинейных интегральных уравнений

$$\beta\begin{pmatrix}\dfrac{u_1(t)}{\left(p_1\left[t,u_1(t)\right]\right)_{u_1}}\\ \dfrac{u_2(t)}{\left(p_2\left[t,u_2(t)\right]\right)_{u_2}}\end{pmatrix}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix}-z_n(0)\\ z_n(1)\end{pmatrix}G_n(t,\lambda)\int_0^T S_n(\tau,\lambda)\left(z_n(0),z_n(1)\right)\begin{pmatrix}p_1\left[\tau,u_1(\tau)\right]\\ p_2\left[\tau,u_2(\tau)\right]\end{pmatrix}d\tau=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix}-z_n(0)\\ z_n(1)\end{pmatrix}G_n(t,\lambda)h_n, \qquad (21)$$

где

$$h_n=\xi_n-\psi_n\left(e^{-\lambda_n^2T}+\lambda\int_0^T R_n(T,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2s}ds\right)-\int_0^T S_n(t,\lambda)g_n(\tau)d\tau;$$

$$S_n(t,\lambda)=\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_t^T R_n(T,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-t)}ds\right);$$

$$G_n(t,\lambda)=\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_t^T L_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds\right);$$

и удовлетворяет дополнительным условиям

$$\left(p_1\left[t,u_1(t)\right]\right)_{u_1}\left(\frac{u_1(t)}{\left(p_1\left[t,u_1(t)\right]\right)_{u_1}}\right)_{u_1}>0,$$

$$\left(p_2\left[t,u_2(t)\right]\right)_{u_2}\left(\frac{u_2(t)}{\left(p_2\left[t,u_2(t)\right]\right)_{u_2}}\right)_{u_2}>0. \qquad (22)$$

Систему (21) представим в операторной форме

$$\theta(t) = E\left[\theta_1(t), \theta_2(t)\right] + \hbar(t), \tag{23}$$

где

$$\theta(t) = \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} \dfrac{u_1(t)}{\left(p_1\left[t, u_1(t)\right]\right)_{u_1}} \\ \dfrac{u_2(t)}{\left(p_2\left[t, u_2(t)\right]\right)_{u_2}} \end{pmatrix},$$

$$E\left[\theta_1(t), \theta_2(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(0,1) G_n(t,\lambda) \times$$

$$\times \int_0^T S_n(\tau,\lambda) z_n^*(0,1)\, p\left[\tau, \varphi_1\left(\tau, \theta_1(\tau), \beta\right), \varphi_2\left(\tau, \theta_2(\tau), \beta\right)\right] d\tau,$$

$$\hbar(t) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(0,1) G_n(t,\lambda) h_n,$$

а векторное управление $\left(u_1^0(t), u_2^0(t)\right)$ определяется

$$u_1(t) = \varphi_1\left(t, \theta_1(t), \beta\right), \quad u_2(t) = \varphi_2\left(t, \theta_2(t), \beta\right). \tag{24}$$

Лемма 3.3.1. Вектор функция $\theta(t) = \left(\theta_1(t),\ \theta_2(t)\right)$ является элементом пространства $H^2(0,T) = H(0,T) \times H(0,T)$.

Лемма 3.3.2. Функция $\hbar(t)$ является элементом пространства $H^2(0,T)$.

Лемма 3.3.3. Оператор $E\left[\theta_1(t), \theta_2(t)\right]$ отображает пространство $H^2(0,T)$ в себя.

Лемма 3.3.4. Пусть выполнены условия Липщица

$$\begin{gathered} \left\| p_i\left[t, u_i(t)\right] - p_i\left[t, \bar{u}_i(t)\right] \right\|_H \le p_{0i} \left\| u_i(t) - \bar{u}_i(t) \right\|_H, \\ p_{0i} > 0, \quad i = 1, 2, \end{gathered} \tag{25}$$

$$\begin{gathered} \left\| \varphi_i\left[t, \theta_i(t), \beta\right] - \varphi_i\left[t, \bar{\theta}_i(t), \beta\right] \right\|_H \le \varphi_{0i}(\beta) \left\| \theta_i(t) - \bar{\theta}_i(t) \right\|_H, \\ \varphi_{0i}(\beta) > 0, \quad i = 1, 2. \end{gathered} \tag{26}$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma = 4\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6}\right)\left(1 + \frac{|\lambda| K_0 T M_0}{2\lambda_1^2}\right) B\left(p_{01}, p_{02}, \varphi_{10}(\beta), \varphi_{20}(\beta)\right) < 1, \tag{27}$$

оператор $E[\theta]$ является сжимающим.

Теорема 3.3.1. При выполнении условий

1. $p_1\left[t,u_1(t)\right]\in H(0,T),\quad p_2\left[t,u_2(t)\right]\in H(0,T),\quad u_1(t),u_2(t)\in H(0,T)$;

2. $\dfrac{\partial p\left[t,u_1(t)\right]}{\partial u_1}\neq 0,\quad \dfrac{\partial p\left[t,u_2(t)\right]}{\partial u_2}\neq 0,\quad \forall t\in[0,T]$

и (25)-(27) операторное уравнение (23) имеет единственное решение $\theta(t)\in H^2(0,T)$.

В §3.4 построены решение задачи нелинейной оптимизации в виде тройки $\left(\left(u_1^0(t),u_2^0(t)\right),\ \nu^0(t,x),\ J\left[u_1^0(t),u_2^0(t)\right]\right)$, его приближения $\left(\left(u_1^{(k)}(t),u_2^{(k)}(t)\right),\ \nu_k^{m,r}(t,x),\ J_m^r\left[u_1^{(k)}(t),u_2^{(k)}(t)\right]\right)$ и установлены следующие оценки

1. $\left\|\bar\theta(t)-\theta^{(k)}(t)\right\|_{H^2}\leq\dfrac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|E\left[\theta_0(t)\right]\right\|_{H^2}$,

2. $\left\|u_i^0(t)-u_i^{(k)}(t)\right\|_{H^2}\leq\varphi_{0i}(\beta)\dfrac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|E\left[\theta_0(t)\right]\right\|_{H^2},\quad i=1,2$,

3. $$\left\|\nu^0(t,x)-\nu_k^{m,r}(t,x)\right\|_H^2\leq\left\|\nu^0(t,x)-\nu_k(t,x)\right\|_H^2+$$
$$+\left\|\nu_k(t,x)-\nu_k^m(t,x)\right\|_H^2+\left\|\nu_k^m(t,x)-\nu_k^{m,r}(t,x)\right\|_H^2\xrightarrow[k,m,r\to\infty]{}0,$$

4. $$\left|J[u_1^0,u_2^0]-J_m^r[u_1^{(k)},u_2^{(k)}]\right|\leq\left|J[u_1^0,u_2^0]-J[u_1^{(k)},u_2^{(k)}]\right|+$$
$$+\left|J[u_1^{(k)},u_2^{(k)}]-J_m[u_1^{(k)},u_2^{(k)}]\right|+\left|J_m[u_1^{(k)},u_2^{(k)}]-J_m^r[u_1^{(k)},u_2^{(k)}]\right|\xrightarrow[k,m,r\to\infty]{}0,$$

из которого следует сходимость приближенного решения задачи нелинейной оптимизации к точному решению при $k,\ m,\ r\to\infty$.

В приложении приведен вариант исполнения программного комплекса в среде MATLAB, соответствующего модельному примеру и результатам численных расчетов, подтверждающим теоретические выводы.

ВЫВОДЫ

В диссертации исследованы вопросы разрешимости и установлены достаточные условия существования и единственности решений задач нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями с нелинейным граничным управлением.

Разработан алгоритм построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемые вольтерровым интегро-дифференциальным уравнением, при наличии нелинейных граничных скалярных и векторных управлений, и доказан его сходимость.

Полученные теоретические результаты могут быть полезными при исследовании задачи теории оптимального управления системами с распределенными параметрами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных, и при разработке конструктивных методов решения нелинейных прикладных задач оптимизации, а также в развитии теории краевых задач и нелинейных интегральных уравнений.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. **Сейдакмат кызы Э.** Обобщенное решение краевой задачи управляемого теплового процесса, описываемого вольтеррово интегро-дифференциальным уравнением [Текст]/ А. Керимбеков, Б.Ж. Кулбаева, Э. Сейдакмат кызы // Журнал «Вестник ОшГУ», №1. – Ош, 2013. – С. 163-168. (статья)
2. **Сейдакмат кызы Э.** Решение задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст]/ А. Керимбеков, Б.Ж. Кулбаева, Э. Сейдакмат кызы // Тезисы 2-й международной конференции «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», – Бишкек, 2013. – С. 49.
3. **Сейдакмат кызы Э.** Условия оптимальности в задаче граничного управления тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст]/ А. Керимбеков, Э. Сейдакмат кызы // Материалы 2-й международной конференции «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», Т. 1. – Бишкек, 2013. – С. 61-66. (статья)
4. **Сейдакмат кызы Э.** Решение задачи граничного управления тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст]/ Э. Сейдакмат кызы // Материалы 2-й международной конференции «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», Т. 1. – Бишкек, 2013. – С. 76-81. (статья)
5. **Сейдакмат кызы Э.** Вывод системы нелинейных интегральных уравнений в задаче граничного векторного управления тепловыми процессами, описываемыми интегро-дифференциальными

уравнениями [Текст]/ Э. Сейдакмат кызы // Вестник КГУ им. И. Арабаева, №3. – Бишкек, 2014. – С. 292-297. (статья)

6. **Сейдакмат кызы Э.** Решение задачи граничного векторного управления тепловыми процессам, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст]/ А. Керимбеков, Э. Сейдакмат кызы // Журнал «Вестник КРСУ», Т.14, №12. – Бишкек, 2014. – С. 67-73. (статья, РИНЦ)
7. **Сейдакмат кызы Э.** Приближенное решение задачи граничного векторного управления тепловыми процессам, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст]/ Э. Сейдакмат кызы // Журнал «Вестник КРСУ», Т.14, №12. – Бишкек, 2014. – С. 80-86. (статья, РИНЦ)
8. **Сейдакмат кызы Э.** О разрешимости задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст]/ А. Керимбеков, Э. Сейдакмат кызы // Вестник Актюбинского регионального государственного университета имени К.Жубанова, №4(38). – Актобе, 2014. – С. 13-21. (статья)
9. **Seidakmat kyzy E.** Boundary control of thermal processes described by Volterra integro-differential equations [Текст]/ A. Kerimbekov, E. Seidakmat kyzy // Abstracts of V Congress of the Turkic World Mathematicians. – Bishkek, 2014. – P. 277.
10. **Seidakmat kyzy E.** On the solvability of the problem of the optimal boundary control of thermal processes described by the Volterra integro-differential equations [Текст]/ A. Kerimbekov, E. Seidakmat kyzy // Abstract book of second ICAAM. – Shymkent, 2014. – P. 115.
11. **Seidakmat kyzy E.** Approximate solution of the boundary control problem of thermal processes described by Volterra integro-differential equations [Текст]/ A. Kerimbekov, E. Seidakmat kyzy // Proceedings of V Congress of the Turkic World Mathematicians. – Bishkek, 2014. – P. 213-218. (статья)
12. **Сейдакмат кызы Э.** Условие оптимальности в задаче граничного управления тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст]/ А. Керимбеков, Э. Сейдакмат кызы // Материалы международной научно-практической конференции «Информационные технологии: Инновации в науке и образовании». Актобе: - Издательство АРГУ им. К.Жубанова, 2015. –С. 193-197. (статья)
13. **Seidakmat kyzy E.** Vector control of thermal processes described by Volterra integro-differential equations [Текст]/ A. Kerimbekov, E. Seidakmat kyzy // Abstracts of the Issyk-Kul International Mathematical

Forum (Kyrgyzstan, Bozteri, June 24-27, 2015). Bishkek: Mathematical Society of Kyrgyz, 2015. – 63 p.

14. **Сейдакмат кызы Э.** О разрешимости задачи граничного векторного управления тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст]/ А. Керимбеков, Э. Сейдакмат кызы // Журнал «Вестник КРСУ». Бишкек: - Издательство КРСУ, 2015, Т.15, №9. -С. 28-32. (статья, РИНЦ)
15. **Сейдакмат кызы Э.** Приближенное решение задачи граничного управления тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст]/ Э. Сейдакмат кызы // Журнал «Вестник КРСУ». Бишкек: - Издательство КРСУ, 2015, Т.15, №9. -С. 33-37. (статья, РИНЦ)
16. **Seidakmat kyzy E.** The solution of nonlinear optimization problem for thermal processes with vector control [Текст]/ A. Kerimbekov, E. Seidakmat kyzy // The abstract book of the International Conference on Advancements in Mathematical Sciences (Antalya, Turkey, November 5-7, 2015), 2015. – 199 p.
17. **Сейдакмат кызы Э.** Вывод уравнения векторного оптимального управления в задаче нелинейной оптимизации тепловых процессов [Текст]/ А. Керимбеков, Э. Сейдакмат кызы // Доклады АН РТ. Душанбе: - Издательство АН РТ, 2015, Т.58. -С. 570-576. (статья, РИНЦ)
18. **Сейдакмат кызы Э.** Решение задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст]/ Э. Сейдакмат кызы // Известия АН РТ. Душанбе: - Издательство АН РТ, 2015, №3 (160). -С. 31-38. (статья, РИНЦ)

Сейдакмат кызы Эркеаимдин 01.01.02 – «Дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдуу башкаруу» адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган «Вольтерр тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдемелер менен жылуулук процесстерин сызыктуу эмес оптималдык чектик башкаруу» аттуу диссертациялык ишинин

РЕЗЮМЕСИ

Урунттуу сөздөр: жылуулук процесстери, солгун жалпыланган чыгарылыш, квадраттык функционал, оптималдуулуктун шарты, сызыктуу эмес интегралдык теңдеме, оптималдык чектик башкаруу.

Изилдөөнүн объектиси: жылуулук процесстерин оптималдык чектик башкаруу.

Изилдөөнүн предмети: чектик башкаруу аркылуу чектүү убакытта жылуулук процесстерин баштапкы абалдан каалагандай абалга өзгөртүү.

Изилдөөнүн максаты: Вольтерр тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдемелер менен мүнөздөлгөн жылуулук процесстериндеги сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин бир маанилүү чыгарылышка ээ болушу үчүн жетиштүү шарттарын бир жак четинен жана эки жак четинен башкаруу үчүн табуу.

Изилдөөнүн ыкмалары: изилдөө математикалык физиканын теңдемелерин чыгаруунун ыкмаларын, интегралдык теңдемелердин, оптималдуу башкаруу теориясынын, функционалдык талдоонун жана сызыктуу эмес интегралдык теңдемелердин теориясынын ыкмаларын колдонуу менен жүргүзүлдү.

Изилдөөнүн илимий жаңылыгы жана теориялык маанилүүлүгү: сызыктуу эмес чектик скалярдык жана вектордук башкаруу аркылуу Вольтерр тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдемелер менен мүнөздөлгөн жылуулук процесстерин сызыктуу эмес оптималдаштыруунун маселелеринин жакындаштырылган чыгарылыщын тургузуунун алгоритми иштелип чыккан, алардын анык чыгаралышка жыйналуусу далилденген.

Алынган жыйынтыктардын теориялык мааниси чоң жана жекече туундудагы интегро-дифференциалдык теңдемелер менен мүнөздөлгөн жайылтылган параметрлүү системаларын сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселелерин изилдөөдө пайдаланылат.

Изилдөөнүн практикалык маанилүүлүгү: сызыктуу эмес чектик башкаруу менен Вольтерр тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдемелер менен мүнөздөлгөн жылуулук процесстерин сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселелерин чыгаруу боюнча иштелип чыккан ыкма конструктивдүү жана жылуулук өткөргүчтүк процесстерге келүүчү колдонмо маселелерди чыгарууда колдонууга болот.

РЕЗЮМЕ

диссертационной работы Сейдакмат кызы Эркеаим на тему «Нелинейное оптимальное граничное управление тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Ключевые слова: тепловой процесс, слабо обобщенное решение, квадратичный функционал, условие оптимальности, нелинейное интегральное уравнение, оптимальное граничное управление.

Объект исследования: оптимальное граничное управление тепловыми процессами.

Предмет исследования: перевод теплового процесса из начального состояния в желаемое состояние за конечное время посредством граничных управлений.

Цель исследования: установить необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации теплового процесса, описываемые вольтеррово интегро-дифференциальным уравнением как для управления с одного конца, так и для управления с двух концов.

Методы исследования: в работе были использованы методы решений уравнений математической физики, методы интегрального уравнения, теории оптимального управления, функционального анализа и теории нелинейных интегральных уравнений.

Научная новизна и теоретическая значимость исследования: Разработан алгоритм построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации теплового процесса, описываемые вольтеррово интегро-дифференциальным уравнением при наличии нелинейных граничных скалярных и векторных управлений, доказаны их сходимость к точному решению.

Полученные результаты имеют большую теоретическую значимость и представляют интерес для исследований задач нелинейной оптимизации систем с распределенными параметрами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных.

Практическое значение исследования. Разработанный метод решения задачи тепловых процессов, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями с нелинейным граничным управлением является конструктивным и может быть использован при решении прикладных задач, связанных с процессом теплопроводности.

SUMMARY

Dissertation «The nonlinear optimal boundary control of the thermal processes described by Volterra integro-differential equations» of Seidakmat kyzy Erkeaim is submitted for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences, speciality 01.01.02 – differential equations, dynamical systems and optimal control

Key words: thermal processes, weak generalized solution, quadratics functional, optimality condition, nonlinear integral equation, the optimal boundary control.

Object of research is the optimal boundary control of the thermal processes.

Subject of research is the transformation of the thermal processes from the initial state to the desired state for the finite time by the boundary controls.

Purpose of the work is to establish the sufficient conditions of the unique solvability of nonlinear optimization problems for the thermal processes described by Volterra integro-differential equations in case of the nonlinear boundary of scalar and vector control.

Research methodology. The methods of solving of equations of mathematical physics, methods of integral equations, methods of the optimal control theory of the distributed parameters systems, methods of nonlinear integral equations and functional analysis are used in this research work.

Scientific novelty and theoretical significance of research

The algorithm for constructing the approximate solution of nonlinear optimization of thermal processes described by Volterra integro-differential equation with nonlinear boundary of scalar and vector control was developed and the convergence of approximate solutions was proved.

The obtained results have the great theoretical significance and are interesting for research problems of nonlinear optimization of distributed parameters systems, described by integro-differential equations.

The practical significance of research. The developed method of solving the nonlinear optimization problems for the thermal processes, described by Volterra integro-differential equations with nonlinear boundary control is constructive and can be used for solving applied problems associated with the processes of thermal conductivity.