**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

**КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им.Ж.БАЛАСАГЫНА**

На правах рукописи
УДК 515.12

Рахманкулов Бактияр Зулпукарович

О МНОЖЕСТВЕ ВСЕХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ПО РАВНОМЕРНО ЗАМКНУТЫМ МНОЖЕСТВАМ

специальность 01.01.04 – геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико – математических наук

Научный руководитель –
доктор физико-математических
наук, профессор Чекеев А.А.

Бишкек - 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

- $\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел.
- $\mathbb{R}$ - множество вещественных чисел, $\mathbb{R}^+ = [0;+\infty)$.
- $I = [0,1]$ - единичный отрезок.
- Если α - семейство множеств, то $\cup\alpha = \bigcup\limits_{A\in\alpha} A$.
- Если $\alpha = \{U_s\}_{s\in S}$ - индексированное семейство множеств, то $\cup\alpha = \bigcup\limits_{s\in S} U_s$.
- Семейство α является покрытием множества X, если $\cup\alpha = X$ и, если $\alpha = \{U_s\}_{s\in S}$, то $\cup\alpha = \bigcup\limits_{s\in S} U_s = X$.
- Для покрытий α и β символ $\alpha\wedge\beta$ обозначает покрытие $\{A\cap B : A\in\alpha, B\in\beta\}$, т.е. $\alpha\wedge\beta = \{A\cap B : A\in\alpha, B\in\beta\}$.
- Если $\beta = \{X\}$, то $\alpha\wedge X = \{A\cap X : A\in\alpha\}$.
- Для покрытие α множество $St(B,\alpha) = \{A\in\alpha : A\cap B\neq\varnothing\}$ называется *звёздой* подмножество B относительно α и определено подмножество $\alpha(B) = \cup St(\beta,\alpha)$. Если $B = \{x\}$, то пишут просто $\alpha(x) = \cup St(x,\alpha) = \cup\{A\in\alpha : x\in A\}$.
- Если для любого элемента $B\in\beta$ покрытия β найдется элемент $A\in\alpha$ покрытия α такой, что $B\subset A$, то покрытие β *вписано* в покрытие α и пишется $\beta\succ\alpha$.
- Если покрытие $\{\beta(B) : B\in\beta\}$ вписано в покрытие α, то говорят, что покрытие β *сильно звёздно вписано* в покрытие α и пишется $\beta^*\succ\alpha$.
- Если покрытие $\{\beta(x) : x\in X\}$ вписано в покрытие α, то говорят, что покрытие *звёздно вписано* в покрытие α и пишется $\beta^\vartriangle\succ\alpha$
- Для отображения $f : X\to Y$ через $f|_A : A\to Y$ обозначается *сужение* f на подмножество $A\subset X$.
- Если X - топологическое пространство и $Y\subset X$, то $[Y]_X$ - *замыкание* подпространства Y в X.

- $\prod_{s\in S} X_s$ - *Декартово произведение* семейства множеств $\{X_s\}_{s\in S}$.
- $\prod_{s\in S} X_s$ - Декартово произведение семейства отображений $\{f_s : X_s \to Y_s\}_{s\in X}$, сопоставляющее $(x_s : s\in S)\in \prod_{s\in S} Y_s$ точке $(f_s(x) : s\in S)\in \prod_{s\in S} Y_s$.
- $\Delta_{s\in S} f_s$ - *диагональное произведение* или *диагональ* семейства отображений $\{f_s : X \to Y_s\}_{s\in S}$, сопоставляющее каждой точке $x\in X$, точку $(f_s(x) : s\in S)\in \prod_{s\in S} Y_s$.
- Если uX равномерное пространство и $Y\subset X$, то $u|_Y$ - сужение равномерности u на Y.
- $coz-$отображение означает конуль отображение.
- $\mathbb{R}^{\mathscr{F}}$ - Декартово произведение множества вещественных чисел $\mathbb{R}$ $\mathscr{F}$ - раз, если $|\mathscr{F}| = \mathfrak{m}$, то $\mathbb{R}^{\mathscr{F}} = \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$.
- □ – завершение доказательства.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы диссертации. После фундаментальных работ Гельфанда - Колмогорова [3], Хьюитта [18], Исбелла [19], Хейджера [16], Хейгера - Джонсона [17] и Капланского [21] которые были посвящены установлению основных свойств функциональных пространств на топологических пространствах, на стыке алгебры и топологии возникла новое направление, которое ныне называется *функциональным анализом*. На множестве всех (ограниченных) непрерывных функций на топологическом пространстве относительно естественных алгебраических операций определяются структуры алгебры, кольца, полугруппы, а также относительно, естественного порядка на них определяются структура решетки и структуры решёточно упорядоченных групп и решёточно упорядоченных алгебр. На сегодняшний день изучению всех этих структур на пространстве функций, в их взаимосвязи с топологическими свойствами несущего пространства, посвящено большое количество работ, и до сих пор стоят ряд нерешенных проблем в этих теориях. На множестве всех (ограниченных) конуль функций ($\equiv coz-$функций) на данном равномерном пространстве относительно естественных алгебраических операций определяется структура кольца и структуры алгебры с инверсией. Это кольцо (алгебра) трактуется как естественный контравариантный функтор из категории $ZUnif$ в категорию всех колец (алгебр) и их гомоморфизмов. Кольцо всех $coz-$функций является максимальным подкольцом кольца всех непрерывных функций данного равномерного пространства, содержащим множество всех равномерно непрерывных функций, а также является минимальным подкольцом, обладающим свойствам инверсии и содержащим все равномерно непрерывной функции. Кольцо всех (ограниченных) $coz-$функций тесно связано с $\beta-$подобной компактификацией и Волмэновской реалкомпактификацией данного равномерного пространства и естественно ожидать теоремы, которые полностью описывают $\beta-$подобную компактификацию и Волмэновскую реалкомпактификацию кольцевыми свойствами пространств всех (ограниченных) $coz-$функций. Таким образом, изучение этих функциональных пространств является актуальной задачей.

Связь темы диссертации с крупными научными программами, основными научно-исследовательскими работами, проведенными научными учреждениями. Диссертационная работа исполнена в рамках проекта "Об алгебраических объектах, порожденных равномерными пространствами и их приложениях в анализе структуры Вселенной" (УДК 515.12), номер госрегистрации 0007173, ИК (инвентарный номер 0005772).

Цель и задачи исследования. Развить теорию кольца всех и всех ограниченных $coz-$функций данного равномерного пространства и установить его характеристики посредством выше названного кольца.

Научная новизна полученных результатов. Впервые установлены новые характеристики $\beta-$подобной компактификации и Волмэновской реалкомпактификации и при помощи них доказаны аналоги теорем Гельфанда – Колмогорова и Хьюитта, а также дан ответ на одну проблему Хейджера.

Практическая значимость полученных результатов. Диссертация носит теоретический характер, и её результаты могут быть использованы научными работниками, докторантами, аспирантами и магистрантами по направлению «математика» (специализация – геометрия и топология), а также при составлении новых теоретических курсов по равномерной топологии.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

- установить общие и новые характеристики $\beta-$подобной компактификации при помощи кольца всех и всех ограниченных $coz-$ функций;
- доказать, что кольцо всех $coz-$функций определяет равномерные пространства с первой аксиомой счётности;
- построить $\beta-$подобную компактификацию с помощью кольца всех $coz-$функций в единичный отрезок;

- установить характеристику coz – совершенных отображений при помощи колец;
- установить общие и новые характеристики Волмэновской реалкомпактификации при помощи кольца всех coz – функций;
- установить новые характеристики реалкомпактных в категории $ZUnif$ равномерных пространств;
- получить ответ на одну проблему Хейджера.

Личный вклад соискателя. Все научные результаты диссертации получены соискателем лично и опубликованы периодических научных журналах [4 - 6, 24 - 27]. В работах [6, 25 - 27] постановка задачи принадлежит научному руководителю, а все полученные результаты – соискателю. В работах [5, 24] полученные результаты принадлежат соискателю, а соавторам – постановка задач и обсуждение полученных результатов. Работа [27] опубликована в электронном журнале ВАК КР и научные результаты работы принадлежат соискателю, а соавторам – постановка задач и обсуждение полученных результатов.

Апробация результатов диссертации. Все научные результаты диссертации были доложены:

- на II Международной научной конференции по теории управления, топологии операторных уравнений КРСУ (2013),
- на V Всемирном Конгрессе Математиков Тюркского мира (2014),
- на Международном Иссык–Кульском Математическом Форуме (2015),
- на научном семинаре кафедры «Алгебры, геометрии и топологии» под руководством профессора Чекеева А.А (2013-2016).

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Основные научные результаты диссертации опубликованы в научных статьях [4 - 6, 24 - 27] в научных изданиях, вошедших в Перечень рецензируемых научных изданий, утвержденные Президиумом ВАК Кыргызской Республики и строго соответствуют теме диссертации.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключений к ним, выводов и списка использованных библиографических источников из 30 наименований. Полный объем диссертации - 76 страниц.

Краткая содержание диссертации. Первая глава диссератции является вводной и состоит из *пяти* разделов, в которых даётся информация из общей алгебры перечисляются некоторые свойства кольца всех (ограниченых) непрерывных функций на тихоновском пространстве, даются основные свойства равномерных пространств и нуль - множеств всех равномерно непрерывных функций, также основные свойства кольца всех (ограниченных) $coz-$функций, и основных равномерностей, определяемых этими кольцами, а также основные конструкции и свойства $\beta-$подобной компактификации и Волмэновской реалкомпактификации. В заключении первой главе сформулируются проблемы, которые требуются решить в диссертационной работе.

Во второй и третьей главах диссертации сосредоточены все новые научные результаты диссертации.

Вторая глава диссертации состоит из *шести* разделов. *Разделы 2.1.* и *2.2.* носят технический характер и вних устанавливается связь между идеалами кольца всех $coz-$функций и фильтрами из нуль множеств $coz-$функций и установливаются основные свойства сходимости этих фильтров. В *разделе 2.3.* получена новая характеристика $\beta-$подобной компактификации. В *разделе 2.4.* получены аналоги теорем Стоуна, Гельфанда – Колмогорова. В *разделе 2.5.* $\beta-$подобная компактификация получена посредством вложения в Тихоновский куб. В *разделе 2.6.* получена кольцевая характеристика $coz-$совершенных отображений. В конце второй главы сформулировано заключение о решенных в ней задачах.

Третья глава состоит из *трёх* разделов. В *разделе 3.1.* установлена новая характеристика Волмэновской реалкомпактификации. В *разделе 3.2.*

установлены ряд новых характеристикреалкомпактных в категории $ZUnif$ пространств. В *разделе 3.3.* решается одна проблема Хейджера, о совпадении алгебры всех $coz-$функций с алгеброй непрерывных функций, по которым строится $\beta-$подобная компактификация и Волмэновская реалкомпактификация. В конце третьей главы сформулировано заключение о решенных в ней задачах.

Диссертационная работа завершается выводами о научных результатах, полученных в диссертации.

ГЛАВА 1.
ВВОДНАЯ ГЛАВА
1.1. Необходимые сведения из общей алгебры.

Ассоциативным кольцом называется тройка $(K,+,\cdot)$ с аддитивной алгебраической операцией $"+"$:

$$"+": K \times K \to K \quad ((x,y) \mapsto x+y, \forall x,y \in K)$$

и мультипликативной алгебраической операцией $"\cdot"$:

$$"\cdot": K \times K \to K \quad ((x,y) \mapsto x \cdot y, \forall x,y \in K),$$

при этом пара $(K,+)$ абелева группа, а пара $(K,\cdot)$ - полугруппа. Если пара, дополнительно $(K,\cdot)$ является моноидом, то ассоциативное кольцо $(K,+,\cdot)$ называется *ассоциативным кольцом с единицей* 1, причем 1 не равна 0-нейтральному элементу абелевой группы $(K,+)$. Если $(K,\cdot)$-коммутативный моноид, то кольцо $(K,+,\cdot)$ *называется ассоциативным, коммутативным кольцо с единицей.*

Подкольцо I кольца K называется *идеалом*, если из $x \in I$ следует $x \cdot y \in I$ для всех $y \in K$.

Отображение $f:(K,+,\cdot) \to (K',\oplus,\odot)$ кольца $(K,+,\cdot)$ в кольцо $(K',\oplus,\odot)$ называется *кольцевым гомоморфизмом*, если

$$f(x+y) = f(x) \oplus f(y) \text{ и } f(x \cdot y) = f(x) \odot f(y)$$

для любых $x,y \in K$. Для кольцевого гомоморфизма f множество $Kerf = \{x \in K : f(x) = 0'\}$, где $0'$-нейтральный элемент кольца $(K',\oplus,\odot)$ называется *ядром гомоморфизма* f $(Kerf,+,\cdot)$ является *подкольцом* кольца $(K,+,\cdot)$, более того является *идеалом*. Множество $Imf = \{f(x) : x \in K\}$ относительно алгебраических операций кольца $(K',\oplus,\odot)$ образует кольцо, следовательно, $(Imf,\oplus,\odot)$ подкольцо кольца $(K',\oplus,\odot)$ и фактор - кольца $K / Kerf$ алгебраически изоморфно $Jinf$. Ассоциативное, коммутативное кольцо $(P,+,\cdot)$, в котором каждый элемент $a \neq 0$ обратимым, т.е. существует a^{-1} такое, что $a \cdot a^{-1} = 1$, называют *полем.*

Если I идеал кольца K, то определенно фактор-множество

$$K / I = \{x + I : x \in K\}$$

и алгебраические операции:

$$(x + I) \oplus (y + I) = (x + y) + I \text{ и } (x + I) \odot (y + I) = x \cdot y + I$$

для всех $x, y \in K$. Тогда $(K / I, \oplus, \odot)$ снова ассоциативное, коммутативное кольцо $1 = 1 + I \neq 0 = 0 + I$ единицы и нули $K / I \cdot (K / I, \oplus, \odot)$ называется *фактор-кольцом* кольца K по идеалу I.

Из принципа максимальности Куратовского-Цорна следует, что всякий идеал содержится *в максимальном идеале* и максимальные идеалы характеризуются следующим свойством:

Идеал I кольца K является максимальным в том и только в том случае, когда фактор-кольцо K / I является полем.

Идеал I кольца K называется *простым*, если $x \cdot y \in I$ влечет либо $x \in I$, либо $y \in I$.

Простые идеалы характеризуются следующими свойствами:

(1) *Если I идеал кольца K и $a \in K$. Тогда, если никакая конечная степен a не принадлежит I, то существует простой идеал, содержащий I, но не содержащий a.*

(2) Пересечение всех простых идеалов содержащих данный идеал I состоит из всех конечных степеней элементов I.

ЛЕММА 1.1.1. *Пусть I, I' идеалы кольца K и $I \setminus I' \neq 0$, $I \setminus I' \neq \varnothing$. Тогда $I \cap I'$– не является простым идеалом.*

Алгеброй A называется тройка $(A, +, \cdot)$, если пара $(A, +)$ есть линейное пространство над некоторым полем P, пара $(A, \cdot)$-некоторая полугруппа и алгебраические операции $"+","\cdot"$ на A связаны законом дистрибутивности. Если $(A, \cdot)$ моноид, то алгебра $(A, +, \cdot)$ называется *алгеброй с единицей*. Если $P = \mathbb{R}$ и $P = \mathbb{C}$, то *алгебра A* будет называться, соответственно, *вещественной и комплексной.*

1.2. Кольцо всех непрерывных функций на тихоновском пространстве.

Множество всех непрерывных функций на тихоновскомпространстве X традиционно обозначается как $C(X)$. Тогда $C^*(X)$ обозначает множество всех ограниченных непрерывных функций из $C(X)$. На $C(X)$ определены естественные алгебраические операции:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ и } (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

для всех $f, g \in C(X)$ и $x \in X$. Таким образом определённые операции действуют на $C(X)$, т.е. $f + g \in C(X)$ и $f \cdot g \in C(X)$ для любых $f, g \in C(X)$. Тройка $(C(X), +, \cdot)$ является ассоциативным, коммутативным кольцом с единицей. Роль единицы 1 играет функция тождественно равная числу 1, а роль нулевого нейтрального элемента 0 играет функция тождественно равная числу нуль 0, т.е. выполняется $1(x) = 1$ и $0(x) = 0$ для всех $x \in X$. Для всех $f \in C(X)$ имеем, $(-f)(x) = -f(x)$, где $|f|(x) = |f(x)|$, при всех $x \in X$ и $|f| \in C(X)$.

Для любых двух функций $f, g \in C(X)$

$$\max\{f, g\} = f \vee g = 2^{-1}(f + g + |f - g|)$$

$$\min\{f, g\} = f \wedge g = 2^{-1}(f + g - |f - g|)$$

следовательно, $f \vee g \in C(X)$ и $f \wedge g \in C(X)$.

Так как сумма $f + g$ и произведение $f \cdot g$ любых двух ограниченных непрерывных функций из $C^*(X)$ является снова ограниченными непрерывными функциями из $C^*(X)$, то $(C^*(X), +, \cdot)$ подкольцо кольца $C(X)$.

Множество $f^{-1}(0)$ называется *нуль–множеством* функции $f \in C(X)$. Полагается:

$$Z_f = Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\} \text{ при } f \in C(X).$$

Ясно, что $Z(f) = Z(|f|) = Z(f^n)$ (для всех $n \in \mathbb{N}$) и $Z(0) = X$ и $Z(1) = \varnothing$, а также

$$Z(f \cdot g) = Z_{f \cdot g} = Z(f) \cup Z(g) = Z_f \cup Z_g,$$

и

$$Z(f^z + g^z) = Z_{f^z + g^z} = Z(|f| + |g|) = Z_{|f|+|g|} = Z(f) \cap Z(g) = Z_f \cap Z_g.$$

Для любой функции $f \in C(X)$ имеем $g = |f| \wedge 1 \in C^*(X)$ и $Z(f) = Z_g = Z_f = Z(g)$

Следовательно, кольца $C(X)$ и $C^*(X)$ определяют одно и то же множество нуль множеств, т.е.

$$\mathcal{Z}(X) = \{Z_f : f \in C(X)\} = \{Z_g : g \in C^*(X)\}$$

Множество $\mathcal{Z}(X)$ *замкнуто относительно счётных* пересечений, т.е. если $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{Z}(X)$ то $\cap_{n\in\mathbb{N}} Z_n \in \mathcal{Z}(X)$.

Ясно, что $Z_n = Z_{f_n}$, где $f_n \in C(X)$ $(n \in \mathbb{N})$. Пусть $g_n = |f_n| \wedge z^{-n}$. Тогда ряд

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(x) \ \ (x \in X)$$

сходится равномерно, т.к. $|g_n| \le z^{-n}$, следовательно g - является непрерывной функцией. Ясно, что имеет место равенство:

$$Z_g = \cap_{n\in\mathbb{N}} Z_{g_n} = \cap_{n\in\mathbb{N}} Z_{f_n}.$$

1.3. Равномерные пространства.

Любое равномерное пространство обозначается как uX, где X - тихоновское пространство, u – равномерная структура на X, заданная при помощи равномерных покрытий, т.е. u семейство *равномерных покрытий* на X удовлетворяющее следующим свойствам:

1°. для любых $\alpha, \beta \in u$ имеем $\alpha \wedge \beta \in u$;

2°. если $\beta \in u$ и β вписано в покрытие α, то $\alpha \in u$;

3°. для любого $\alpha \in u$ найдется $\beta \in u$, звёздно или сильно звёздно вписанное в α;

4°. $\cap_{\alpha \in u} \alpha(x) = \{x\}$ для любой точки $x \in X$.

Фильтр $\mathscr{F}$ на равномерном пространстве uX называется *фильтром Коши*, если $\mathscr{F} \cap \alpha \neq \varnothing$ для любого равномерно покрытых $\alpha \in u$.

Равномерное пространство uX называется *полным*, если в нем сходится всякий фильтр Коши.

Равномерное пространство $\tilde{u}\tilde{X}$ называется *пополнением* равномерного пространства uX, если: uX всюду плотное равномерное подпространство $\tilde{u}\tilde{X}$ и $\tilde{u}\tilde{X}$ - полное пространство.

Все конечные и счётные равномерные покрытия равномерного пространства uX образуют равномерности u_p и u_ω соответственно. Пополнение X по равномерности u_p, есть компакт $s_u X$, который называется *Самюэлевской компактификацией* равномерного пространства uX.

Через $U(uX)(U^*(uX))$ обозначается множество всех (ограниченных) равномерно непрерывных функций на uX. Тогда Самюэлевская предкомпактная равномерность u_p слабо порождается всеми функциями из $U^*(uX)$, а все функции $U(uX)$ порождают равномерность u_c на X, для которой, вообще говоря, $u_c \neq u_\omega$, но $u_c \subset u_\omega$. Однако пополнения X по этим равномерностям u_c и u_ω совпадают. Отметим, что $U^*(uX)$ относительно, введенных в 1.2., алгебраических операций образует подкольцо $C^*(X)$, а $U(uX)$ кольца не образует.

Положим $\mathcal{Z}_u = \{f^{-1}(0) : f \in U(uX)\}$. Тогда для любой функции $f \in U(uX)$ имеем $|f| \in U(uX)$ и, следовательно, $g = |f| \wedge 1 \in U^*(uX)$. Это означает, что $\mathcal{Z}_u = \{f^{-1}(0) : f \in U(uX)\} = \{g^{-1}(0) : g \in U^*(uX)\}$. Ясно, что $\mathcal{Z}_u \in \mathcal{Z}(X)$ для любой равномерности u на X.

Отображение $f : uX \to vY$ равномерно непрерывно, если $f^{-1}(\beta) \in u$ для любого равномерного покрытия $\beta \in v$.

Если $f : uX \to vY$ равномерно непрерывное отображение, то $f^{-1}(\mathcal{Z}_v) \subset \mathcal{Z}_u$, т.е. прообраз любого множества из $\mathcal{Z}_v$ принадлежит $\mathcal{Z}_u$.

Множества из $\mathcal{Z}_u$ ($\mathcal{Z}_v$) называется *$u-$замкнутыми* (*$v-$замкнутыми*).

Хараламбусом [9] доказано, что существуют отображения $f : uX \to vY$ обладающие свойством $f^{-1}(\mathcal{Z}_v) \subset \mathcal{Z}_u$, но не являющиеся равномерно непрерывными.

Пусть $Z_1, Z_2 - u-$замкнутые множества в uX, т.е. $Z_i = f_i^{-1}(0)$, где $f_i \in U(uX)\,(i = 1,2)$. Тогда $Z_i = Z_{f_i} = Z_{|f_i|}\,(i = 1,2)$. Функция $h = |f_1| / (|f_1| + |f_2|)$, определенная как $h(x) = f_1(x) / (f_1(x) + f_2(x))$ для любой точки $x \in X$ отображает uX в I и $h^{-1}(F)$ $u-$замкнуто в uX для любого замкнутого множества $F \subset I$. Однако такое отображение h, вообще говоря, не равномерно непрерывно.

Если отображение $f : uX \to vY$ удовлетворяет свойству $f^{-1}(\mathcal{Z}_v) \subset \mathcal{Z}_u$ (или, что равносильно $f^{-1}(C\mathcal{Z}_v) \subset C\mathcal{Z}_u$), где $C\mathcal{Z}_v = \{Y \setminus Z : Z \in \mathcal{Z}_v\}$ и $C\mathcal{Z}_u = \{X \setminus Z : Z \in \mathcal{Z}_u\}$, то оно называется *$coz-$отображением*. Множества из $C\mathcal{Z}_u$ ($C\mathcal{Z}_v$) называются *$u-$открытыми ($v-$открытыми)*.

Из работы Хараламбуса [9] следует, что если (X, ρ) - метрическое пространство, то $\mathcal{Z}_{u_\rho} = \mathcal{Z}(X)$ где u_ρ - метрическая равномерность, если X - Линделёфово пространство, то $\mathcal{Z}_u = \mathcal{Z}(X)$ для любой равномерности u на X.

Если $f : uX \to vY$ - $coz-$отображение и $Y = \mathbb{R}$ $v-$естественная равномерность $u_{\mathbb{R}}$ числовой прямой, то $coz-$отображение $f : uX \to \mathbb{R}$ называется *$u-$непрерывной функцией*, а если $Y = I$, $v-$единственная равномерность компакта I, то $coz-$отображение $f : uX \to I$ называется, по Хараламбусу, *$u-$функцией*.

1.4. Кольцо и алгебра всех непрерывных по равномерно замкнутым множествам функций.

Множество $C_u(X)$ всех $u-$непрерывных функций на равномерном пространстве uX является частью $C(X)$, т.е. $C_u(X) \subset C(X)$. Чекеевым [10 - 12] доказано, что относительно алгебраических операций из $C_u(X)$, является ассоциативным, коммутативным кольцом с единицей $1(x)=1 \neq 0(x)=0$ со следующими дополнительными свойствами:

(1) $C_u(X)$ является линейным пространством над полем действительных чисел $\mathbb{R}$;

(2) $C_u(X)$ равномерно замкнутое в $C(X)$, т.е. если последовательность $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in C_u(X)$ равномерно сходится к функции f, то $f \in C_u(X)$;

(3) $C_u(X)$ инверсно – замкнутое, т.е., если $f(x) \neq 0$ для любого $x \in X$, то $1/f \in C_u(X)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4.1. Как мы отмечали ранее, $U(uX)$ кольца не образует. Однако $C_u(X)$ в других терминах образует алгебру с инверсией в смысле Исбелла–Хейджера–Джонсона [16, 17, 19].

Итак, очевидно выполнение следующих свойств $C_u(X)$. Если $f, g \in C_u(X)$, то

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x), (f \cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) \text{ и } (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

для всех $x \in X$ и вещественных чисел $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{и } f+g \in C_u(X), f \cdot g \in C_u(X) \text{ и } \lambda \cdot f \in C_u(X),$$

т.е. сумма, произведение $u-$непрерывных функций является $u-$непрерывной функцией. Для любой функции $f \in C_u(X)$, следует $|f| \in C_u(X)$, следовательно, для любых $h, g \in C_u(X)$ следует, что

$$\max\{h, g\} = h \vee g = 2^{-1}(h+g+|h-g|) \in C_u(X)$$

и

$$\min\{h, g\} = h \wedge g = 2^{-1}(h+g-|h-g|) \in C_u(X)$$

С алгеброй $C_u(X)$ связаны равномерности u_p^z и u_ω^z. Равномерность $u_p^z(u_\omega^z)$ имеет базу, состоящую из всех конечных (счётных) u-открытых покрытий равномерного пространства uX. Также определена равномерность u_c^z на uX, слабейшая равномерность, относительно которой, равномерно непрерывны все функции из $C_u(X)$. Ясно, что $u_p^z \subset u_c^z \subset u_\omega^z$.

Имеет место следующая лемма из работы [12].

ЛЕММА 1.4.2.

(1) Каждое coz-отображение $f : uX \to vY$ - отображение на компактное равномерное пространство vY есть равномерно непрерывное отображение $f : u_p^z X \to vY$;

($1'$) Каждое coz-отображение $f : uX \to vY$ - отображение на $\aleph_0$ компактное равномерное пространство vY есть равномерно непрерывное отображение $f : u_\omega^z X \to vY$;

(2) $U(uX) = U(u_c X) \subset U(u_\omega X) \subset U(u_\omega^z X) = C_u(X)$;

($2'$) $U(u_p X) = U^*(uX) \subset U(u_p^z X) = U^*(u_\omega^z X) = C_u^*(X) \subset C_u(X)$

(3) $\mathcal{Z}_u = \mathcal{Z}_{u_p} = \mathcal{Z}_{u_c} = \mathcal{Z}_{u_p^z} = \mathcal{Z}_{u_\omega^z}$;

(4) $U(u_\omega^z X)$ алгебра с инверсией на uX.

1.5. Волмэновская компактификация и реалкомпактификация.

Пусть X тихоновское пространство и $\mathcal{Z}(X)$ - множество всех нуль – множеств кольца $C(X)$ (или $C^*(X)$).

Пусть $\mathcal{Z} \subset \mathcal{Z}(X)$ некоторое семейство нуль – множеств, являющееся *базой* замкнутых множеств топологии пространства X. Если $\mathcal{Z}$ удовлетворяет свойствам:

(1) $\mathcal{Z}$ - *кольцо* множеств, т.е. $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}$ влечёт $Z_1 \cup Z_2 \in \mathcal{Z}_1$ и $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{Z}_2$;

(2) $\mathcal{Z}$ - *дизъюнктивно*, т.е. для любого замкнутого множества $F \subset X$ и точки $x \notin F$ существует $Z \in \mathcal{Z}$ такое, что $x \in Z$ и $Z \cap F = \varnothing$;

(3) $\mathcal{Z}$ - *нормально*, т.е. для любых дизъюнктивных $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}$ существует пара множеств $W_1, W_2 \in \mathcal{Z}$ такая, что $W_1 \cup W_2 = X$ и $\mathcal{Z}_i \subset X \setminus W_i, i = 1,2$, то база $\mathcal{Z}$ называется *нормальной базой*.

Максимальные фильтры, составленные из элементов нормальной базы $\mathcal{Z}$ называются $\mathcal{Z}$ - *ультрафильтрами*. Через $\omega(X, \mathcal{Z})$ обозначается множество всех $\mathcal{Z}$ - ультрафильтров на тихоновском пространстве X. На $\omega(X, \mathcal{Z})$ определяется топология Волмэновского типа, при которой X вложено в $\omega(X, \mathcal{Z})$ всюду плотно.

Для каждого нуль – множества $Z \in \mathcal{Z}$ положим, $Z^\omega = \{\mathcal{F} \in \omega(X, \mathcal{Z}) : Z \in \mathcal{F}\}$ и $\mathcal{Z}^\omega = \{Z^\omega : Z \in \mathcal{Z}\}$.

Для произвольных множеств Z_1 и Z_2 из $\mathcal{Z}$,

(1) $Z_1^\omega \cap Z_2^\omega = (Z_1 \cap Z_2)^\omega$ и $Z_1^\omega \cup Z_2^\omega = (Z_1 \cup Z_2)^\omega$

(2) $\mathcal{Z}^\omega$ - образуют нормальное семейство.

(3) Если $Z \in \mathcal{Z}$, то

$$\omega(X, \mathcal{Z}) \setminus Z^\omega = \{\mathcal{F} \in \omega(X, \mathcal{Z}) : A \subset X \setminus Z \text{ для некоторого } A \in \mathcal{F}\}.$$

Семейство $\mathcal{Z}^\omega$ образуют базу некоторой топологии $\omega(X, \mathcal{Z})$ замкнутых множеств, причем $\mathcal{Z}^\omega$ - нормальная база и $\omega(X, \mathcal{Z})$ - компакт, т.е. компактное хаусдорфово пространство.

Если $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(X)$, то $\omega(X, \mathcal{Z}(X)) = \beta X$ - Стоун–Чеховская компактификация.

Отметим, если $\mathcal{Z}_X \subset \mathcal{Z}(X)$ и $\mathcal{Z}_Y \subset \mathcal{Z}(Y)$ - нормальные базы и $f : X \to Y$ такое отображение, что $f^{-1}(\mathcal{Z}_Y) \subset \mathcal{Z}_X$, то оно непрерывно продолжается до непрерывного отображения

$$\omega f : \omega(X, \mathcal{Z}_X) \to \omega(Y, \mathcal{Z}_Y)$$

так, что $\omega f|_X = f$.

Если нормальная база $\mathcal{Z} \subset \mathcal{Z}(X)$ удовлетворяет условиям:

(а) $\mathcal{Z}$ - *дельта семейство*, т.е. для последовательности $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{Z}$ имеем $Z = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} Z_n \in \mathcal{Z}$;

(в) $\mathcal{Z}$ - *порождена по дополнению*, если для каждого $Z \in \mathcal{Z}$ существует последовательность $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{Z}$ такая, что $Z = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \{X \setminus Z_n\}$, то $\mathcal{Z}$ называется *сильно дельта нормальной базой*.

Для $\mathcal{Z}$ сильно дельта нормальной базы, часть $\rho(X, \mathcal{Z})$ компакта, $\omega(X, \mathcal{Z})$ состоящая из всех счётноцентрированных $\mathcal{Z}$ - ультрафильтров, наделяется топологией индуцированной из $\omega(X, \mathcal{Z})$ называется *Волмэновской реалкомпактификацией*.

ТЕОРЕМА 1.5.1. *Для равномерного пространства uX следующие компактификации X совпадают:*

(1) Пополнение X по равномерности u_p^z.

(2) Волмэновскаякомпактификация $\omega(X, \mathcal{Z}_u)$ по нормальной базе $\mathcal{Z}_u$.

(3) Компактификация, которая получается как пространство максимальных идеалов кольца $C_u^*(X)$, наделенного Стоуновской топологией.

Так как все функции $C_u^*(X)$ и только они, непрерывно продолжаются на $\omega(X, \mathcal{Z}_u)$, то компактификация $\omega(X, \mathcal{Z}_u)$ является β - подобной компактификацией в смысле Мрувки [22], поэтому примем обозначения $\omega(X, \mathcal{Z}_u) = \beta_u X$, при этом семейство $\mathcal{Z}_u$ образует $s.n. - j.i.r.$ - базу по [29].

Из этой теоремы непосредственно получается следующее следствие, которое основано на свойствах β - подобной компактификацией.

СЛЕДСТВИЕ 1.5.2.

(1) Каждое coz*−отображение* $f: uX \to vY$ *продолжается до непрерывного отображения* $\beta_u f : \beta_u X \to \beta_v Y$.

(2) В любой точке нароста $\beta_u X \setminus X$ *не выполняется первая аксиома счётности.*

(3) Для равномерностей u *и* u' *на* X $\mathcal{Z}_u = \mathcal{Z}_{u'}$ *если и только если, когда* $\beta_u X = \beta_{u'} X$.

Следующая теорема характеризует Самюэлевскую компактификацию, совпадающую с β - подобной компактификацией $\beta_u X$.

ТЕОРЕМА 1.5.3. *Для равномерного пространства* uX *следующие пункты эквивалентны:*

(1) Самюэлевская компактификация $s_u X$ *является* β *- подобной компактификацией;*

(2) Самюэлевская предкомпактная равномерность u_p *совпадает с Волмэновской предкомпактной равномерностью* u_p^z*;*

(3) Каждое coz*−отображение* $f: uX \to K$ *в компакт* K *непрерывно продолжается на* $s_u X$*;*

(4) Каждая u*−функция* $f: uX \to I$ *непрерывно продолжается на* $s_u X$*;*

(5) Если $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}_u$ *и* $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$*, то*

$$[Z_1]_{s_u X} \cap [Z_2]_{s_u X} = \varnothing;$$

(6) Если $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}_u$*, то*

$$[Z_1]_{s_u X} \cap [Z_2]_{s_u X} = [Z_1 \cap Z_2]_{s_u X};$$

(7) Каждая точка компакта $s_u X$ *есть предел единственного* z_u *- ультрафильтра на* uX*;*

(8) Каждый z_u *- ультрафильтр является фильтром Коши относительно равномерности* u_p.

Часть $\upsilon_u X$ β- подобной компактификации $\beta_u X$, состоящая из всех счётноцентрированных z_u −ультрафильтров на uX, и наделённая индуцированной из $\beta_u X$ топологией, называется Волмэновской реалкомпактификацией [29, 12].

ТЕОРЕМА 1.5.3. *Для равномерного пространства* uX *следующие реалкомпактификации* X *совпадают:*

(1) пополнение X *по равномерности* u_ω^z*;*

(2) Волмэновская реалкомпактификция $\upsilon_u X = \upsilon(X, \mathcal{Z}_u)$*;*

(3) пересечение всех конуль множеств в $\beta_u X$*, содержащих* X*;*

(3′) пересечении всех конуль множеств в $s_u X$*, содержащих* X*;*

(4) Q *- замыкание* X *в* $\beta_u X$*;*

(4′) Q *- замыкание* X *в* $s_u X$*;*

(5) слабое пополнение $\mu_{u_\omega^z} X$ *совпадает с пополнением* X *по равномерности* u_ω^z*;*

(6) слабое пополнение $\mu_{u_\omega} X$ *по равномерности* u_ω*;*

(7) слабое пополнение $\mu_{u_c} X$ *по равномерности* u_c*.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По итогам первой главы необходимо решить следующие задачи:

- установить общие и новые характеристики $\beta-$подобной компактификации при помощи кольца всех и всех ограниченных $coz-$ функций;
- доказать, что кольцо всех $coz-$функций определяет равномерные пространства с первой аксиомой счётности;
- построить $\beta-$подобную компактификацию с помощью кольца всех $coz-$функций в единичный отрезок;
- установить характеристику $coz-$совершенных отображений при помощи колец;
- установить общие и новые характеристики Волмэновской реалкомпактификации при помощи кольца всех $coz-$функций;
- установить новые характеристики реалкомпактных в категории $ZUnif$ равномерных пространств;
- получить ответ на одну проблему Хейджера.

ГЛАВА 2

КОЛЬЦО ВСЕХ ОГРАНИЧЕННЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ПО РАВНОМЕРНО ЗАМКНУТЫМ МНОЖЕСТВАМ И β - ПОДОБНАЯ КОМПАКТИФИКАЦИЯ

2.1. Идеалы кольца $C_u(X)$ и z_u - фильтры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.1. Непустое подсемейство $\mathcal{F} \subset \mathcal{Z}_u$ называются z_u – *фильтром* на равномерном пространстве uX, если выполнены следующие условия:

(1) $\varnothing \notin \mathcal{F}$;

(2) если $Z_1, Z_2 \in \mathcal{F}$, то $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{F}$;

(3) если $Z \in \mathcal{F}$ и $Z' \in \mathcal{Z}_u$ такое, что $Z \subset Z'$, то $Z' \in \mathcal{F}$.

ТЕОРЕМА 2.1.2. *Если I идеал в $C_u(X)$, тогда семейство $\mathcal{F}_I = \{Z_f : f \in I\}$ является z_u - фильтром на uX и, наоборот, если $\mathcal{F}$ является z_u – фильтром на uX, то семейство $I_{\mathcal{F}} = \{f \in C_u(X) : Z_f \in \mathcal{F}\}$ является идеалом в $C_u(X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 2.3 [15]. □

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.3. Максимальный, по включению, z_u – фильтр называется z_u – *ультрафильтром* ([11],[12]).

ТЕОРЕМА 2.1.4. *Если I максимальный идеал в $C_u(X)$, то семейство $\mathcal{F}_I = \{Z_f : f \in I\}$ является z_u - ультрафильтром на uX и, наоборот, если $\mathcal{F}$ – z_u – ультрафильтр на uX, то $I_{\mathcal{F}} = \{f \in C_u(X) : Z_f \in \mathcal{F}\}$ является максимальным идеалом в $C_u(X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если I максимальный идеал в $C_u(X)$, то по теореме 2.1.2, $\mathcal{F}_I$ - z_u -фильтр на uX. Пусть $\mathcal{F}$ такой z_u - фильтр, что $\mathcal{F}_I \subset \mathcal{F}$. Тогда

$$I_{\mathcal{F}} = \{g \in C_u(X) : Z_g \in \mathcal{F}\}$$

идеал в $C_u(X)$ и $I \subset I_{\mathcal{F}}$, т.к. $\mathcal{F}_I \subset \mathcal{F}$. В силу максимальности идеала I следует, что $I = I_{\mathcal{F}}$, т.е. $\mathcal{F}_I = \mathcal{F}$ и не существует z_u – фильтра, содержащего $\mathcal{F}$. Итак, $\mathcal{F}_I$ - z_u - ультрафильтр.

Обратно, если $\mathcal{F} - z_u -$ультрафильтр, то

$$I_{\mathcal{F}} = \{f \in C_u(X) : Z_f \in \mathcal{F}\}$$

является идеалом в $C_u(X)$. Если существует такой идеал I в $C_u(X)$, что $I_{\mathcal{F}} \subset I$, то $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_I$, где $\mathcal{F}_I = \{Z_f : f \in I\}$, по теореме 2.1.2, является $z_u -$фильтром. Т.к. $\mathcal{F} - z_u -$ультрафильтр, то $\mathcal{F} = \mathcal{F}_I$. Следовательно, $I_{\mathcal{F}} = I$ и не существует идеала в $C_u(X)$ содержащего $I_{\mathcal{F}}$. Итак, $I_{\mathcal{F}}$ - максимальный идеал. □

СЛЕДСТВИЕ 2.1.5. *Между всеми максимальными идеалами в* $C_u(X)$ *и всеми* $z_u -$*ультрафильтрами на uX существует взаимно однозначное соответствие.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из теоремы 2.1.4. □

СЛЕДСТВИЕ 2.1.6. *Если* I *максимальный идеал в* $C_u(X)$ *и* Z_g *пересекается с каждым членом* $z_u -$*ультрафильтра* $\mathcal{F}_I = \{Z_f : f \in I\}$*, тогда* $g \in I$ *и, наоборот, если* $\mathcal{F} - z_u -$*ультрафильтр и* $u -$*замкнутыемножество* Z_g *пересекается с каждым членом* $\mathcal{F}$*, то* $Z_g \in \mathcal{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 2.1.4 непосредственно вытекает равносильность условий следствия 2.1.6.

Если $Z_g \notin \mathcal{F}$, то $\mathcal{F} \cup \{Z_g\}$ - база z_u - фильтра, а так как, $\mathcal{F} - z_u -$ ультрафильтр, то $\mathcal{F} \cup \{Z_g\} \subseteq \mathcal{F}$, т.е. $Z_g \in \mathcal{F}$, противоречие, что доказывает следствие. □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.7. Идеал I в $C_u(X)$ называется $z_u -$*идеалом,* если $Z_g \in \mathcal{F}_I = \{Z_f : f \in I\}$, то $f \in I$.

Очевидно, имеет место следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.8. *Каждый максимальный идеал в* $C_u(X)$ *является* $z_u -$*идеалом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 2.1.4. □

ТЕОРЕМА 2.1.9. *Пусть* I *произвольный* $z_u -$*идеал в* $C_u(X)$*. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) I является простым идеалом

(2) I содержит простой идеал

(3) Для любых $g,h \in C_u(X)$, если $g \cdot h = 0$, то либо $g \in I$, либо $h \in I$.

(4) Для каждой u-непрерывной функции $f \in C_u(X)$ существует такое u-замкнутое множество в $\mathfrak{F}_I = \{Z_g : g \in I\}$, что f не меняет знак на нём.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $(1) \Rightarrow (2)$. Очевидно.

$(2) \Rightarrow (3)$. Пусть P простой идеал, содержащийся в I и $g \cdot h = 0$, тогда $g \cdot h \in P$. Следовательно, либо $g \in P \subset I$, либо $h \in P \subset I$.

$(3) \Rightarrow (4)$. Пусть $f \in C_u(X)$ произвольная $u-$непрерывная функция. Тогда, ясно что $(f \wedge 0) \cdot (f \vee 0) = 0$. Следовательно, либо $f \vee 0 \in I$, либо $f \wedge 0 \in I$.

$(4) \Rightarrow (1)$. Пусть $g \cdot h \in I$. Рассмотрим функцию $|g| - |h|$. Тогда $|g| - |h| \in C_u(X)$ и, по пункту (4), существует $u-$замкнутое множество Z из $\mathfrak{F}_I = \{Z_f : f \in I\}$, на котором $|g| - |h|$ не меняет знак. Предположим, что $|g| - |h| \geq 0$. Тогда для всех нулевых значений функции g на Z функция h также принимает нулевые значения. Следовательно,

$$Z_h \supset Z \cap Z_h = Z \cap Z_{gh} \in \mathfrak{F}_I,$$

т.е. $Z_h \in \mathfrak{F}_I$. Так как I z_u-идеал, что $h \in I$. Таким образом, I-простой идеал □

ТЕОРЕМА 2.1.10. *Каждый простой идеал в $C_u(X)$ содержится в единственном максимальном идеале.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на алгебраической лемме 1.1.1. Каждый идеал содержится в некотором максимальном идеале. Пусть простой идеал I содержится в двух различных максимальных идеалах I_1 и I_2. Тогда пересечение $I_1 \cap I_2$ является z-идеалом, как пересечение z-идеалов (предложение 2.1.8) и не является простым идеалом, в силу леммы 1.1.1. По теореме 2.1.9, $I_1 \cap I_2$ не содержит простых идеалов. Противоречие, т.к. $I \subset I_1 \cap I_2$. □

СЛЕДСТВИЕ 2.1.11. *Каждый простой z_u-фильтр на $C_u(X)$ содержит в единственном z_u-ультрафильтре.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из теоремы 2.1.10. □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.12. Пусть $\mathscr{F} - z_u$ –фильтр на uX. Если $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}_u$ и из того, что $Z_1 \cup Z_2 \in \mathscr{F}$ следует, что либо $Z_1 \in \mathscr{F}$, либо $Z_2 \in \mathscr{F}$, то $\mathscr{F}$ называем *простым* z_u*-фильтром.*

ТЕОРЕМА 2.1.13. *Если* I *простой идеал в* $C_u(X)$, *тогда* $\mathscr{F}_I = \{Z_f : f \in I\}$ *простой* z_u*-фильтр на* uX *и, наоборот, если* z_u*-простой* z_u*-фильтр, то* $I_{\mathscr{F}} = \{f \in C_u(X) : Z_f \in \mathscr{F}\}$ *простой идеал в* $C_u(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I простой идеал в $C_u(X)$ и $\mathscr{F}_I = \{Z_f : f \in I\}$. Положим $J = \{f \in C_u(X) : Z_g \in \mathscr{F}_I\}$. Тогда $\mathscr{F}_J = \mathscr{F}_I$ и J - z_u-идеал, содержащий простой идеал I. Тогда, по теореме 2.1.9, J является простым идеалом в $C_u(X)$. Предположим, что $Z_f \cup Z_g \in \mathscr{F}_I$. Тогда $Z_{fg} \in \mathscr{F}_J$, т.е. принадлежит z_u - идеалу J. Следовательно, т.к. J-простой идеал, либо $f \in J$, либо $g \in J$, т.е. либо $Z_f \in \mathscr{F}_J = \mathscr{F}_I$, либо $Z_g \in \mathscr{F}_J = \mathscr{F}_I$. □

Обратно, ясно, что идеал $I_{\mathscr{F}} = \{f \in C_u(x) : Z_f \in \mathscr{F}\}$ в $C_u(X)$ является простым, т.к. по условию $\mathscr{F}$ -простой z_u -фильтр. Пусть $fg \in I_{\mathscr{F}}$. Тогда

$$Z_{fg} = Z_f \cup Z_g \in \mathscr{F}_{I_{\mathscr{F}}} = \mathscr{F},$$

и, следовательно, либо $Z_f \in \mathscr{F}_{I_{\mathscr{F}}}$, либо $Z_g \in \mathscr{F}_{I_{\mathscr{F}}}$, т.е. либо $f \in I_{\mathscr{F}}$, либо $g \in I_{\mathscr{F}}$. Таким образом $I_{\mathscr{F}}$ - простой идеал в $C_u(X)$. □

2.2. Сходимость z_u - фильтров.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2.1. *Семейство $\mathcal{Z}_u$ образует базу замкнутых множеств равномерного пространства uX.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F замкнуто в X и $x \in X \setminus F$-произвольная точка. Тогда существует такая $u-$непрерывная функция $f_x \in C_u(X)$, что $f_x(x) = 1$ и $f_x(F) = \{0\}$. Тогда $Z_{f_x} \supset F$ и $x \notin Z_{f_x}$. Ясно, что F есть пересечение всех таких Z_{f_x}, когда $x \in X \setminus F$. Таким образом, $\mathcal{Z}_u$ - база замкнутых множеств. □

СЛЕДСТВИЕ 2.2.1. *Семейство $C\mathcal{Z}_u$ образует базу открытых множеств равномерного пространства uX.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть O произвольное открытое множество в uX. Тогда $F = X \setminus O$ замкнуто в uX и существует такое подсемейство $\xi \subset \mathcal{Z}_u$, что $F = \cap\xi$. Тогда $X \setminus K \in C\mathcal{Z}_u$ для любого $K \in \xi$ и $O = \cup\{X \setminus K : K \in \xi\}$, т.е. $C\mathcal{Z}_u$ - база открытых множеств в uX. □

СЛЕДСТВИЕ 2.2.2. *Каждое замкнутое множество F в uX есть пересечение всех $u-$замкнутых окрестностей F.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было показано в доказательстве предложения 2.2.1, $F = \cap\{Z_{f_x} : x \in X \setminus F\}$, где для любой точки $x \in X \setminus K$, $f_x(x) = 1$ и $f_x(F) = \{0\}$. Тогда $Z_x = f_x^{-1}([0;1/2])$ $u-$замкнутая окрестность замкнутого множества F и $F = \cap\{Z_{f_x} : x \in X \setminus F\}$. □

СЛЕДСТВИЕ 2.2.3. *Каждая открытая окрестность точки в uX содержит $u-$замкнутую окрестность.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in X$ произвольная точка O-произвольная открытая окрестность точки x. Тогда существуют такая $u-$непрерывная функция $f \in C_u(X)$, что $f(x) = 1$ и $f(X \setminus O) = \{0\}$. Множество $Z_x = f^{-1}([1/2,1])$ $u-$замкнутая окрестность точки x и $Z_x \cap X \setminus O = \varnothing$, т. е. $x \in Z_x \subset O$. □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.4. Пусть $\mathcal{F}$ z_u-фильтр в uX. Точка $x \in X$ называется *точкой прикосновения* $\mathcal{F}$, если каждая окрестность точки x пересекается со всеми членами $\mathcal{F}$, т.е. $x \in \cap\mathcal{F}$.

Точка $x \in X$ называется *предельной точкой* $\mathcal{F}$, если каждая окрестность точки x содержит некоторый элемент $\mathcal{F}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2.5. *Пусть* $\mathcal{F}$ z_u *– фильтр на* uX. *Тогда точка* $x \in X$ *является предельной точкой* $\mathcal{F}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{F}$ *содержит* z_u *– фильтр всех* u *- замкнутых окрестностей точки* x.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко следует из следствия 2.2.3 и определения 2.2.4. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2.6. *Если точка* $x \in X$ *является точкой прикосновения* z_u *– фильтра* $\mathcal{F}$ *в* uX, *то существует* z_u *– ультрафильтр, содержащий* $\mathcal{F}$, *предельной точкой которого является* x.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{F}'$ z_u – фильтр всех u – замкнутых окрестностей точки x. Тогда $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ центрированная система, состоящая из u-замкнутых множеств. Следовательно, $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ содержится, хотя в одном z_u – ультрафильтре p. Так как $\mathcal{F}' \subset p$, то x - является предельной точкой z_u – ультрафильтра p. □

ТЕОРЕМА 2.2.7. *Пусть* uX *равномерное пространство,* $x \in X$ *и* $\mathcal{F}$ *простой* z_u *– фильтр на* uX. *Тогда следующие условии эквивалентны:*

(1) x *является точкой прикосновении для* $\mathcal{F}$.

(2) x *является предельной точкой для* $\mathcal{F}$.

(3) $\cap \mathcal{F} = \{x\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что импликации (2)⇒(3)⇒(1) очевидны. Докажем импликацию (1)⇒(2). Пусть Z_x - произвольная u-замкнутая окрестность точки x. Тогда, по следствию 2.2.1, Z_x содержит окрестность вида $X \setminus Z$, где $Z \in \mathcal{Z}_u$. Ясно, что $X = Z_x \cup Z$ и $x \notin Z$. Так как $\mathcal{F}$ -простой z_u – фильтр, то $Z_x \in \mathcal{F}$, т.е. x является предельной точкой для $\mathcal{F}$. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2.8. *Пусть* uX *равномерное пространство и* $x \in X$ *произвольная точка. Пусть* p_x *множество всех* u *- замкнутых множеств,* *содержащих точку* x, *т.е.* $p_x = \{Z \in \mathcal{Z}_u : x \in Z\}$. *Тогда* p_x *является* z_u- *ультрафильтром.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $Z \in \mathcal{Z}_u$ u-замкнуто и $x \notin Z$, то $Z \notin p_x$. Это следует из того факта, что в этом случае x и Z u - отделимы [9, 20]. Следовательно, p_x - z_u-ультрафильтр. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2.9. *Пусть* uX *равномерное пространство и* $x \in X$ *произвольная точка. Тогда* z_u-*ультрафильтр* p_x *обладает следующими свойствами:*

(a) x *точка прикосновения* z_u-*фильтр* $\mathcal{F}$ *в том и только том случае, когда* $\mathcal{F} \subset p_x$.

(в) p_x *единственный* z_u-*ультрафильтр, предельной точки которого является точка* x.

(c) Различные z_u-*ультрафильтры не имеют общих точек прикосновения.*

(d) Если $\mathcal{F}$ z_u-*фильтр и точка* x *является его предельнойточкой, то* p_x *единственный* z_u-*ультрафильтр содержащий* $\mathcal{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *(a)* Так как $x \in Z$ для любого $Z \in \mathcal{F}$ то очевидно, что $Z \in p_x$, т.е. $\mathcal{F} \subset p_x$. □

(b) Пусть p z_u-ультрафильтр и x его предельная точка, тогда из *(a)* следует, что $p \subset p_x$. Так как x - предельная точка z_u-ультрафильтра p, то $x \in Z$, для любого $Z \in p$. Следовательно $p_x \subset p$.

(c) Пусть p,q z_u-ультрафильтры, $p \neq q$ и x их общая точка прикосновения. Тогда из *(b)* следует, что $p = p_x$ и $q = p_x$, т.е. $p = q$. Противоречие.

(d) Пусть $\mathcal{F} - z_u-$фильтр и x - предельная точка для $\mathcal{F}$. Тогда из *(a)* следует, что $\mathcal{F} \subset p_x$ и из *(b)* следует единственность p_x. □

2.3. О новых характеристиках β - подобной компактификации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3.1. Пусть uX равномерное пространство, всюду плотное в Y. Точка $x \in Y$ называется *точкой прикосновения* z_u –фильтра $\mathscr{F}$ на uX, если каждая окрестность точки x в Y пересекает каждый элемент $\mathscr{F}$, т.е. $x \in \cap\{[Z]_Y : Z \in \mathscr{F}\}$. Если каждая окрестность точки x в Y содержит элемент $\mathscr{F}$, то говорят, что x *предельная точка* $\mathscr{F}$ в Y или $\mathscr{F}$ *сходится* к точке x.

ЛЕММА 2.3.2. *Пусть* uX, υY *такие равномерные пространства, что* X *плотно в* Y *и* $\mathcal{Z}_v \wedge X = \mathcal{Z}_u$. *Если* Z u *- замкнуто в* uX *и* $x \in [Z]_Y$, *то существует хотя бы один* z_u *–ультрафильтр* p^x *на* uX, *содержащий* Z *и сходящийся к* x.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathscr{F}$ z_v – фильтр на vY всех v – замкнутых окрестностей точки x и $\mathscr{F}' = \mathscr{F} \wedge X$. Тогда $\mathscr{F}' \subset \mathcal{Z}_u$. Семейство $\mathscr{F}' \cup \{Z\} \subset \mathcal{Z}_u$ центрировано. Следовательно, существует z_u – ультрафильтр p^x, содержащий семейство $\mathscr{F}' \cup \{Z\}$. Ясно, что p^x сходится к точке x. □

СЛЕДСТВИЕ 2.3.3. *В условиях леммы 2.3.2, каждая точка* Y *является пределом хотя бы одного* z_u *–ультрафильтра на* uX.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из леммы 2.3.2 положив $Z = X$. □

СЛЕДСТВИЕ 2.3.4. *В условиях леммы 2.3.2, если* Z *-* u *- замкнуто в* uX, *то множество* $\bar{Z} = \{x \in Y : Z \in p^x\}$ *замкнуто в* Y *и для* $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}_u$ *выполнено:* $\overline{Z_1 \cup Z_2} = \bar{Z}_1 \cup \bar{Z}_2$ *и* $\overline{Z_1 \cap Z_2} = \bar{Z}_1 \cap \bar{Z}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in [Z]_Y$, то $Z \in p^x$ и $x \in \bar{Z}$, т.е. $[Z]_Y \subset \bar{Z}$. Обратное включение очевидно. Итак $[Z]_Y = \bar{Z}$ – замкнуто в Y. Включение $\bar{Z}_1 \cup \bar{Z}_2 \subset \overline{Z_1 \cup Z_2}$ очевидно. Пусть $x \in \overline{Z_1 \cup Z_2}$. Тогда $Z_1 \cup Z_2 \in p^x$. Так как p^x является z_u – ультрафильтром, то он является простым. Следовательно, либо $Z_1 \in p^x$, либо $Z_2 \in p^x$, т.е. либо $x \in \bar{Z}_1$, либо $x \in \bar{Z}_2$. Таким образом $\overline{Z_1 \cup Z_2} \subset \bar{Z}_1 \cup \bar{Z}_2$. Ясно, что $\overline{Z_1 \cap Z_2} \subset \bar{Z}_1 \cap \bar{Z}_2$. Пусть $x \in \bar{Z}_1 \cap \bar{Z}_2$. Тогда $Z_1 \in p^x$ и $Z_2 \in p^x$ - $x \in \overline{Z_1 \cap Z_2}$. □

ТЕОРЕМА 2.3.5. *Пусть* uX, υY *такие равномерные пространства, что* X *плотно в* Y *и* $\mathcal{Z}_v \wedge X = \mathcal{Z}_u$. *Тогда на* Y *существует такая предкомпактная равномерность* v_p, *что* $v_p|_X = u_p^z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha = \{U_i\}_{i=1}^u$ – произвольное базовое конечное u–открытое покрытие Волмэновской предкомпактной равномерности u_p^z. Положим $Ex_Y\alpha = \{Ex_Y U_i\}_{i=1}^n$, где $Ex_Y U_i = Y \setminus \overline{X \setminus U_i}$ $(i = 1,2,...,n)$ открыто в Y и $Ex_Y\alpha$ – является открытым покрытием Y. Семейство $\overline{\mathcal{B}}_p^* = \{Ex_Y\alpha : \alpha \in \mathcal{B}_p^*\}$, где $\mathcal{B}_p^*$ – база равномерности u_p^z, состоящая из всех конечных u–открытых покрытий uX, образует базу некоторой равномерности v_p. Легко проверить следующие свойства:

$$Ex_Y(\alpha \wedge \beta) = Ex_Y\alpha \wedge Ex_Y\beta \text{ для любых } \alpha, \beta \in \mathcal{B}_p^*.$$

Если β сильно звёздно вписано в α и $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_p^*$, то $Ex_Y\beta$ звёздно вписано в $Ex_Y\alpha$.

Для любого $x \in Y$ имеем $\{x\} = \cap\{Ex_Y\alpha(x) : \alpha \in \mathcal{B}_p^*\}$.

Так как, каждое покрытое $Ex_Y\alpha$ $(\alpha \in \mathcal{B}_p^*)$ конечно и открыто, то семейство $\overline{\mathcal{B}}_p^*$ образует базу некоторой предкомпактной равномерности v_p на Y. Имеем $Ex_Y\alpha \wedge X = \alpha$, следовательно, $v_p|_X = u_p^z$. □

СЛЕДСТВИЕ 2.3.6. *В условиях теоремы 2.3.5 для равномерности* v_p *на* Y *имеем* $\mathcal{Z}_{v_p} \wedge X = \mathcal{Z}_{u_p^z} = \mathcal{Z}_u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко следует из равенства $v_p|_X = u_p^z$. □

ТЕОРЕМА 2.3.7. *Пусть* uX, vY *такие равномерные пространства, что* X *плотно в* Y *и* $\mathcal{Z}_v \wedge X = \mathcal{Z}_u$. *Тогда следующие пункты эквивалентны:*

(1) Каждое coz*–отображение* f *из* uX *в произвольный компакт* K *продолжается до* coz*–отображения* $\tilde{f}$ *из* vY *в* K.

(2) uX C_u^* *- вложено в* vY.

(3) Любые два непересекающиеся u*–замкнутые множества в* uX *имеют непересекающиеся замыкания в* vY.

(4) Для любых $u-$замкнутых в uX множеств $Z_1,Z_2\in\mathcal{Z}_u$ выполнено равенство $[Z_1\cap Z_2]_Y=[Z_1]_Y\cap[Z_2]_Y$.

(5) Каждая точка Y есть предел единственного z_u-ультрафильтра на uX.

(6) $X\subset Y\subset\beta_u X$

(7) $\beta_v Y=\beta_u X$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1)$\Rightarrow$(2). Каждая $u-$непрерывная ограниченная функция $f\in C_u^*(X)$ является $coz-$отображением uX в компакт $K=[f(X)]_{\mathbb{R}}\subset\mathbb{R}$ и K наделён равномерностью $\upsilon=u_{\mathbb{R}}|_K$. По пункту (1) f продолжается до $coz-$отображения $\tilde{f}$ из υY в K, т.е. uX C_u^* – вложено в vY.

(2)$\Rightarrow$(3). Пусть $Z_1,Z_2\in Z_u$ и $Z_1\cap Z_2=\varnothing$. Тогда существует такая $u-$функция [9], что $f(Z_1)=\{0\}$ и $f(Z_2)=\{1\}$. По пункту *(2)* f продолжается до $coz-$отображения $\tilde{f}$ из vY в I. Тогда $Z_i\subset[Z_i]_Y\subset\tilde{f}^{-1}(i), i=0,1$ и $[Z_1]_Y\cap[Z_2]=\varnothing$, т.к. $\tilde{f}^{-1}(0)\cap\tilde{f}^{-1}(1)=\varnothing$.

(3)$\Rightarrow$(4). Если $x\in[Z_1]_Y\cap[Z_2]_Y$, то для любой $u-$замкнутой окрестности V точки x в Y имеем $x\in V\cap[Z_i]_Y=[V\cap Z_i]_Y(i=1,2)$. Тогда по пункту *(3)* имеем $V\cap Z_1\cap V\cap Z_2\neq\varnothing$, т.е. $V\cap Z_1\cap Z_2\neq\varnothing$. Следовательно $x\in[Z_1\cap Z_2]_Y$, т.е. $[Z_1]_Y\cap[Z_2]_Y=[Z_1\cap Z_2]_Y$. Обратное включение очевидно.

(4)$\Rightarrow$(5). По лемме 2.3.2., каждая точка $x\in Y$ есть предел хотя бы одного z_u-ультрафильтра на uX. Различные z_u-ультрафильтры содержат непересекающиеся $u-$замкнутые множества и по пункту *(4)* следует, что x не может принадлежать замыканиям в Y этих $u-$замкнутых множеств. Следовательно, два различных z_u-ультрафильтра не могут сходится к точке $x\in Y$.

(5) $\Rightarrow$ (1). Пусть $x\in Y$ и p^x – единственный z_u-ультрафильтр на uX, сходящийся к точке x. Для произвольного $coz-$отображения f равномерного

пространства uX в компакт K, с единственной равномерностью ν по лемме 1.1.1,

$$f^{\#}(p^x) = \{E \in \mathcal{Z}_\nu : f^{-1}(E) \in p^x\}.$$

Семейство $f^{\#}(p^x)$ является простым z_ν – фильтром на компакте K, следовательно, $f^{\#}(p^x)$ имеет предел y в K (теоремы 2.2.7). Положим $\{y\} = \cap f^{\#}(p^x)$. Этим определено отображение $\tilde{f}$ из vY в K. В случае, когда $x \in X$ мы имеем $\{x\} = \cap p^x$ так, что $\tilde{f}(x) = \cap f^{\#}(p^x) = f(x)$, т.е. $\tilde{f}|_X = f$.

Так как $f^{-1}(F) \in \mathcal{Z}_\nu$ для всех ν–замкнутых множеств $F \in \mathcal{Z}_\nu$. то для отображения $\tilde{f} : Y \to K$ имеет место равенство $\overline{f^{-1}(F)} = \tilde{f}^{-1}(F)$ для всех $F \in \mathcal{Z}_\nu$, где

$$\overline{f^{-1}(F)} = \{x \in Y : f^{-1}(F) \in p^x\} \text{ (как в лемме 2.3.2).}$$

Для каждого конечного функционально открытого покрытия $\beta = \{V_i\}_{i=n}^n$ компакта K, семейство

$$\tilde{f}^{-1}(\beta) = \{\tilde{f}^{-1}(V_i) = Y \setminus \overline{f^{-1}(K \setminus V_i)}\}_{i=1}^n$$

является открытым покрытием Y. По теореме 2.3.5, $\tilde{f}^{-1}(\beta) \in v_p$. Следовательно, $\tilde{f} : v_p Y \to K$ равномерно непрерывное отображение. По следствию 2.3.6, имеем $\mathcal{Z}_{v_p} \wedge X = \mathcal{Z}_{u_p^z} = \mathcal{Z}_u$.Отметим, что $\tilde{f}^{-1}(F) \in \mathcal{Z}_{u_p^z}$ для всех $F \in \mathcal{Z}_\nu$. Ясно, что

$$\tilde{f}^{-1}(F) \cap X = \overline{f^{-1}(F)} \cap X = f^{-1}(F) \text{ и } f^{-1}(F) \in \mathcal{Z}_u = \mathcal{Z}_\nu \wedge X.$$

Тогда существует такая последовательность $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{Z}_\nu$ ν–замкнутых множеств такая, что $Int\, Z_n \neq \varnothing$ $(n \in \mathbb{N})$ и $f^{-1}(F) = \cap_{n\in\mathbb{N}} \{Z_n \cap X\}$. Тогда

$$\tilde{f}^{-1}(F) = \overline{f^{-1}(F)} = \overline{\cap_{n\in\mathbb{N}} \{Z_n \cap X\}} = \cap_{n\in\mathbb{N}} Z_n.$$

Таким образом $\tilde{f}^{-1}(F)$ ν–замкнутое множество для всех $F \in \mathcal{Z}_\nu$, т.е. отображение $\tilde{f} : vY \to K$ является coz–отображением.

(5)$\Rightarrow$(7). По теореме 2.3.5 пополнение Y по равномерности v_p является Самюэловской компактификацией $s_{v_p} Y$ равномерного пространства $v_p Y$. Так как X плотно в Y и $v_p|_X = u_p^z$, то $s_{v_p}Y = \beta_u X$. Из пункта (5) следует, что каждая точка компактификации $s_{v_p}Y$ является пределом единственного z_u- ультрафильтра на uX. Тогда из одной теоремы [12] следует, что $s_{v_p}Y = \beta_v Y = \beta_u X$.

(7)$\Rightarrow$(6). $X \subset Y \subset \beta_v Y = \beta_u X$.

(6)$\Rightarrow$(2). Равномерное пространство uX C_u^* - вложено в компактификацию $\beta_u X$, т.е. всякая ограниченная $u-$непрерывная функция $f : uX \to \mathbb{R}$ $(f \in C_u^*(X))$ продолжается до равномерно непрерывной функции $\beta_u f : \beta_u X \to \mathbb{R}$. Так как $v_p^z|_X = u_p^z$, то $\tilde{f} = \beta_u f|_Y : v_\rho^z Y \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывная функция. Из равенство $\mathcal{Z}_v = \mathcal{Z}_{v_p^z}$, следует, что $\tilde{f} - coz -$ отображение, т.е. uX C_u^* - вложено в vY. □

СЛЕДСТВИЕ 2.3.8. *Пусть uX плотное равномерное подпространство равномерного пространства vY. Тогда следующие пункты равносильны:*

(1) Каждое coz – отображение f из uX в произвольный компакт K продолжается до coz – отображения $\tilde{f}$ из vY в K.

(2) uX C_u^* - вложено в vY.

(3) Любые два непересекающиеся u - замкнутые множества в uX имеют непересекающиеся замыкания в vY.

(4) Для любых u – замкнутых в uX множеств $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}_u$ выполнено равенство $[Z_1 \cap Z_2]_Y = [Z_1]_Y \cap [Z_2]_Y$.

(5) Каждая точка Y есть предел единственного z_u – ультрафильтра на uX.

(6) $X \subset Y \subset \beta_u X$

(7) $\beta_v Y = \beta_u X$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из теоремы 2.3.7, так как $u = v|_X$ и, следовательно $\mathcal{Z}_v \wedge X = \mathcal{Z}_u$. □

ТЕОРЕМА 2.3.9. *Каждое равномерное пространство* uX *имеет* $\beta-$ *подобную компактификацию* $\beta_u X$ *со следующими эквивалентными свойствами:*

(I) Каждое $coz-$*отображение* f *из* uX *в произвольный компакт* K *имеет непрерывное продолжение* $\beta_u f$ *из* $\beta_u X$ *в* K.

(II) uX C_u^* *- вложено в* $\beta_u X$.

(III) Любые два дизъюнктных $u-$*замкнутых в* uX *множеств имеют дизъюнктные замыкания в* vY.

(IV) Для любых двух $u-$*замкнутых множеств* Z_1 *и* Z_2 *в* uX *имеет место равенство* $[Z_1 \cap Z_2]_{\beta_u X} = [Z_1]_{\beta_u X} \cap [Z_2]_{\beta_u X}$.

(V) Различные z_u *- ультрафильтры на* uX *имеют различные пределы в* $\beta_u X$.

Компактификация $\beta_u X$ *единственна в следующем смысле: если компактификация* Y *равномерного пространства* uX *удовлетворяет одному из свойств (I) - (V), тогда существует канонический гомеоморфизм* $\beta_u X$ *на* Y, *оставляющий точки* X *поточечно неподвижными.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2.3.7, если компактификация Y пространства uX удовлетворяет одному из свойств *(I)-(V),* то оно удовлетворяет всем этим свойствам. По свойству *(I)* тождественное отображение на uX имеет β – подобное непрерывное продолжение из $\beta_u X$ на Y и, наоборот, из Y на $\beta_u X$, следовательно, эти непрерывные продолжения являются взаимно обратными гомеоморфизмами [8]. □

СЛЕДСТВИЕ 2.3.10. *Пусть* X *плотное подпространство тихоновского пространства* Y. *Тогда следующие пункты равносильны:*

(1) Каждое непрерывное отображение f *из* X *в произвольный компакт* K *продолжается до* coz *– отображения* $\tilde{f}$ *из* Y *в* K.

(2) X C^* *- вложено в* Y.

(3) Любые два непересекающиеся функционально замкнутые множества в X имеют непересекающиеся замыкания в Y.

(4) Для любых функционально замкнутых в X множеств $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}(X)$ выполнено равенство $[Z_1 \cap Z_2]_Y = [Z_1]_Y \cap [Z_2]_Y$.

(5) Каждая точка Y есть предел единственного z – ультрафильтра на X

(6) $X \subset Y \subset \beta X$

(7) $\beta Y = \beta X$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из теоремы 2.3.7, полагая $u = u_f$ - тонкая равномерность. □

СЛЕДСТВИЕ 2.3.11. *Каждое тихоновское пространство X имеет Стоун – Чеховскую компактификацию βX со следующими эквивалентными свойствами:*

(I) Каждое непрерывное отображение f из X в произвольный компакт K имеет непрерывное продолжение βf из βX в K.

(II) X C^* - вложено в βX.

(III) Любые два дизъюнктных функционально замкнутых в X множеств имеют дизъюнктные замыкания в Y.

(IV) Для любых двух функционально замкнутых множеств Z_1 и Z_2 в X имеет место равенство $[Z_1 \cap Z_2]_{\beta X} = [Z_1]_{\beta X} \cap [Z_2]_{\beta X}$.

(V) Различные z - ультрафильтры на X имеют различные пределы в βX.

Компактификация βX единственна в следующем смысле: если компактификация Y тихоновкого пространства X удовлетворяет одному из свойств (I) - (V), тогда существует канонический гомеоморфизм βX на Y, оставляющий точки X поточечно неподвижными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 2.3.10, если компактификация Y тихоновского пространства X удовлетворяет одному из свойств *(I)-(V),* то оно удовлетворяет всем этим свойствам. По свойству *(I)* тождественное отображение на X имеет непрерывное продолжение из βX на Y и, наоборот, из Y на βX, следовательно, эти непрерывные продолжения являются взаимно обратными гомеоморфизмами [8]. □

2.4. Кольцо $C_u(X)$ ($C_u^*(X)$) всех (ограниченных) u - непрерывных функций на равномерном пространстве uX.

Из теоремы 2.3.9 вытекает, что всякая ограниченная u - непрерывная функция $f \in C_u^x(X)$ непрерывно продолжается до функции $\beta_u f : \beta_u X \to K$, где $K = [f(X)]_{\mathbb{R}}$ - компакт в $\mathbb{R}$. Таким образом, имеет место очевидная теорема.

ТЕОРЕМА 2.4.1. *Кольцо $C_u^*(X)$ алгебраически изоморфно кольцу $C^*(\beta_u X) = C(\beta_u X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изоморфизм кольца $C_u^*(X)$ на кольцо $C^*(\beta_u X)$ осуществляет отображение $\beta_u : C_u^*(X) \to C^*(\beta_u X)$ по правилу $\beta_u(f) = \beta_u f$ для любой функции $f \in C_u^x(X)$. Так как X плотно в $\beta_u X$, то это отображение является взаимно однозначным. Ясно, что

$$\beta_u\left(f+g\right) = \beta_u f + \beta_u g \text{ и } \beta_u\left(f \cdot g\right) = \beta_u f \cdot \beta_u g$$

для любых $f, g \in C_u^*(X)$. Таким образом, β_u сохраняет алгебраические операции.

□

СЛЕДСТВИЕ 2.4.2. *Пространство максимальных идеалов $\mathfrak{M}^*$ кольца $C_u^*(X)$, наделённого Стоуновской топологией, гомеоморфно компакту $\mathfrak{M}_{\beta_u X}$ - пространству максимальных идеалов $C^*(\beta_u X)$ [30,15].*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно вытекает из теоремы 2.4.1, т.к. изоморфизм колец $C_u^*(X)$ и $C^*(\beta_u X)$ влечёт непрерывное уплотнениекомпакта $\mathfrak{M}_{\beta_u X}$ на $\mathfrak{M}^*$, которое является гомеоморфизмом [1]. □

СЛЕДСТВИЕ 2.4.3. *Компакт $\mathfrak{M}^*$ гомеоморфен β-подобной компактификации $\beta_u X$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Компакт $\beta_u X$ гомеоморфен компакту $\mathfrak{M}_{\beta_u X}$, который гомеоморфен $\mathfrak{M}^*$, следовательно, компакты $\beta_u X$ и $\mathfrak{M}^*$ являются гомеоморфными. □

Взаимно однозначное соответствие между точками компактификации $\beta_u X$ и всеми максимальными идеалами кольца $C_u^*(X)$

устанавливаетсянепосредственно следующей теоремой, которая является равномерным аналогом теоремы Стоуна [30].

ТЕОРЕМА 2.4.4. *Для любой точки* $x \in \beta_u X$ *семейство* $I_x^* = \{f \in C_u^*(X) : \beta_u f(X) = 0\}$ *образует максимальный идеал кольца* $C_u^*(X)$. □

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $f, g \in I_x^*$ имеем,

$$\beta_u(f+g)(x) = \beta_u f(x) + \beta_u g(x) = 0 \text{ и } \beta_u(f \cdot g)(x) = \beta_u f(x) \cdot \beta_u g(x) = 0$$

т.е. $f+g,\ f \cdot g \in I_x^*$ и I_x^* является подкольцом кольца $C_u^*(X)$. Пусть $h \in C_u^*(X)$ произвольная функция и $f \in I_x^*$. Тогда

$$\beta_u(h \cdot f) = \beta_u h(x) \cdot \beta_u f(x) = \beta_u h(x) \cdot 0 = 0, \text{ т.е. } h \cdot f \in I_x^*.$$

Итак, I_x^* является идеалом в кольце $C_u^*(X)$. Пусть $p^x - z_u$ - ультрафильтр на uX, сходящийся к точке $x \in \beta_u X$. Тогда

$$I_{p^x} = \{f \in C_u^*(X) : \mathcal{Z}_f \in p^x\}$$

является максимальным идеалом в $C_u^*(X)$. Так как, $x \in [\mathcal{Z}_f]_{\beta_u X}$ для любой функции $f \in I_{p^x}$, то $\beta_u f(x) = 0$, следовательно $I_{p^x} \subset I_x^*$. В силу максимальности идеала I_{p^x} имеем, $I_x^* \subset I_{p^x}$. Итак, $I_{p^x} = I_x^*$. □

СЛЕДСТВИЕ 2.4.5. *Отображение, сопоставляющее каждой точки* $x \in \beta_u X$ *максимальный идеал* I_x^* *кольца* $C_u^*(X)$, *устанавливает гомеоморфизм между* β*-подобной компактификацией* $\beta_u X$ *и пространством максимальных идеалов* $\mathfrak{M}^*$ *кольца* $C_u^*(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из теоремы 2.4.4. □

ТЕОРЕМА 2.4.6. *Пусть* uX, vY *равномерные пространства. Тогда кольца* $C_u^*(X)$ *и* $C_v^*(Y)$ *алгебраически изоморфны тогда и только тогда, когда гомеоморфны компактификации* $\beta_u X$ *и* $\beta_v Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изоморфизм колец $C_u^*(X)$ и $C_v^*(Y)$ влечёт изоморфизм колец $C^*(\beta_u X)$ и $C^*(\beta_v Y)$, который влечётгомеоморфность компактификаций $\beta_u X$ и $\beta_v Y$. Обратно, гомеоморфизм $\beta_u X$ и $\beta_v Y$ влечёт изоморфизм колец $C^*(\beta_u X)$ и $C^*(\beta_v Y)$, который влечёт изоморфизм колец $C_u^*(X)$ и $C_v^*(Y)$. □

СЛЕДСТВИЕ 2.4.7. *Пусть uX, vY равномерные пространства с первой аксиомой счётности. Тогда uX coz-гомеоморфно vY тогда и только тогда, когда кольцо $C_u^*(X)$ изоморфно кольцу $C_v^*(Y)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. uX coz-гомеоморфно vY в том и только в том случае, когда $\beta_u X$ гомеоморфно $\beta_v Y$. Следовательно из теоремы 2.4.6 вытекает изоморфизм колец $C_u^*(X)$ и $C_v^*(Y)$ и, наоборот. □

СЛЕДСТВИЕ 2.4.8. *Пусть uX, vY coz-тонкие равномерные пространства с первой аксиомой счётности. Тогда uX равномерно гомеоморфно vY тогда и только тогда, когда кольцо $C_u^*(X)$ изоморфно кольцу $C_v^*(Y)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для coz-тонких равномерных пространств uX и vY их coz-гомеоморфность равносильна равномерной гомеоморфности. Следовательно, это равносильно изоморфности кольца $C_u^*(X)$ кольцу $C_v^*(Y)$. □

Естественно возникает вопрос о взаимосвязях кольца $C_u(X)$ всех u-непрерывных функций на uX и самого пространства uX. Следующая теорема является равномерным аналогом теоремы Гельфанда - Колмогорова [3] и демонстрирует связь компактификации $\beta_u X$ с кольцом $C_u(X)$.

ТЕОРЕМА 2.4.9. *Для любой точки $x \in \beta_u X$ семейство $I_x = \{f \in C_u(X) : x \in [Z_f]_{\beta_u X}\}$ образует максимальный идеал кольца $C_u(X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p^x - z_u$ - ультрафильтр на uX, сходящийся к точке $x \in \beta_u X$. Тогда

$$I_{p^x} = \{f \in C_u(X) : Z_f \in p^x\}$$

максимальный идеал в кольце $C_u(X)$ (теорема 2.1.4) и $x \in [Z_f]_{\beta_u X}$ для любой функции $f \in I_{p^x}$ (или, что равносильно, для любого $Z_f \in p^x$). Тогда $f \in I_x$.

Обратно, для любого $\mathcal{Z}_g \in \mathcal{F}_{I_x} = \{\mathcal{Z}_g : g \in I_x\}$ имеем $\mathcal{Z}_g \in p^x$. Таким образом, имеем $I_{p^x} = I_x$. □

СЛЕДСТВИЕ 2.4.10. *Отображение, сопоставляющие каждой точки* $x \in \beta_u X$ *максимальный идеал* I_x *кольца* $C_u(X)$, *устанавливает гомеоморфизм между* β*-подобной компактификацией и пространством максимальных идеалов* $\mathfrak{M}_X$ *кольца* $C_u(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из теоремы 2.4.9. □

ТЕОРЕМА 2.4.11. *Пусть* uX, vY *равномерные пространства. Тогда если кольца* $C_u(X)$ *и* $C_v(Y)$ *алгебраически изоморфны, то компактификация* $\beta_u X$ *гомеоморфна компактификации* $\beta_v Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изоморфизм колец $C_u(X)$ и $C_v(Y)$ влечёт гомеоморфность пространств $\mathfrak{M}_X$ и $\mathfrak{M}_Y$. Так как $\mathfrak{M}_X = \beta_u X$ и $\mathfrak{M}_Y = \beta_v Y$, то $\beta_u X$ гомеоморфно $\beta_v Y$. □

СЛЕДСТВИЕ 2.4.12. *Пусть* uX, vY *равномерные пространства с первой аксиомой счётности. Тогда равномерное пространства* uX *и* vY coz*-гомеоморфны тогда и только тогда, когда кольца* $C_u(X)$ *и* $C_v(Y)$ *алгебраически изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна. Достаточность следует из теоремы 2.4.11, т.к. изоморфизм колец $C_u(X)$ и $C_v(Y)$ влечёт гомеоморфность компактификаций $\beta_u X$ и $\beta_v Y$, которая влечёт coz-гомемофность uX, vY. □

СЛЕДСТВИЕ 2.4.13. *Пусть* uX, vY coz*-тонкие равномерные пространства с первой аксиомой счётности. Тогда* uX *и* vY *равномерно гомеоморфны, если и только, если кольцо* $C_u(X)$ *изоморфно кольцу* $C_v(Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для coz-тонких равномерных пространств uX и vY их coz-гомеоморфизм равносилен равномерной гомеоморфности, следовательно доказательство следует из 2.4.12. □

СЛЕДСТВИЕ 2.4.14. *Пусть* uX, vY *полные* coz*-тонкие равномерные пространства. Тогда* uX *равномерно гомеоморфно* vY *тогда только тогда, когда* $U(uX)$ *изоморфно* $U(vY)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из равенств $C_u(X)=U(uX)$ и $C_v(Y)=U(vY)$ для coz-тонких пространств. □

ЗАМЕЧЕНИЕ 2.4.15. Предположение о полноте равномерных пространств uX и vY в следствии 2.4.14, существенно, т.к. в противном случае, для пополнений $\tilde{u}\tilde{X}$ и $\tilde{v}\tilde{Y}$ этих пространств $U(uX)=U(\tilde{u}\tilde{X})$ и $U(vY)=U(\tilde{v}\tilde{Y})$. Следовательно, следствие 2.4.14 для не полных пространств не имеет места.

2.5. Конуль гемеоморфное вложение β – подобной компактификации в Тихоновский куб.

Через $C_u(X,I)$ обозначается множества всех u–функций в смысле Хараламбуса из uX в I. Ясно, что $C_u(X,I)\subset C_u^*(X)$ и $C_u(X,I)$ является подкольцом $C_u^*(X)$.

ТЕОРЕМА 2.5.1. *Равномерное пространство uX $coz-$гомеоморфно вложено в $I^{C_u(X,I)}$ и замыкание образа пространства X в $I^{C_u(X,I)}$ является компактом, на который продолжается любая $u-$ функция на нём.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F\subset X$ замкнутое множество и $x\notin F$. Тогда существует такая равномерная непрерывная функция $f:uX\to I$, что $f(x)=0$ и $f(F)=\{1\}$. Ясно, что $f\in C_u(X,I)$. Следовательно, $C_u(X,I)$ расчленяющееся семейство функций. Диагональное произведение

$$i=\Delta\{f:f\in C_u(X,I)\}:uX\to i(X)\subset I^{C_u(X,I)}$$

есть биективное отображение X на $i(X)$.

Волмэновская предкомпактная равномерность u_p^z на X инициальна относительно семейства $C_u(X,I)$, следовательно, u_p^zX равномерно гомеоморфно отображается на $i(X)$, снабженное равномерностью индуцированную из компакта $I^{C_u(X,I)}$. Так как $\mathcal{Z}_u=\mathcal{Z}_{u_p^z}$, то uX $coz-$ гомеоморфно отображается на $i(X)$. Замыканием $[i(X)]_{I^{C_u(X,I)}}$ является некоторым компактным расширением $i(X)$. Пусть $\varphi:i(X)\to I$ произвольная u -функция. Тогда функция $\psi=\varphi\circ i:uX\to I$ также является u-функцией, следовательно $\psi\in C_u(X,I)$. Положим $I_\psi=I$ и рассмотрим естественную проекцию $\pi_\psi:I^{C_u(X,I)}\to I_\psi=I$. По свойствам диагонального отображения $\pi_\psi\circ i=\psi$, т.е. $\pi_\psi\circ i=\varphi\circ i$, следовательно имеем $\pi_\psi(y)=\varphi(y)$ для всех $y\in i(X)$. Таким образом, отображение φ является сужением отображения π_ψ на $i(X)$. Так как отображение π_ψ непрерывно на $I^{C_u(X,I)}$, то сужение π_ψ на

$F=[i(X)]_{I^{C_u(X,I)}}$ также непрерывна, т.е. $\pi_\psi\big|_F$-непрерывное продолжение отображения φ. □

СЛЕДСТВИЕ 2.5.2. *Компакт* $\left[i(X)\right]_{I^{C_u(X,I)}}$ *гомеоморфен* β*-подобной компактификации* $\beta_u X$ *равномерного пространства* uX.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Z_1, Z_2 - v-$замкнутые множества в $i(X)$, где $v-$равномерность индуцирована из $I^{C_u(X,I)}$ и $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$. Тогда существует такая $v-$функция $f: i(X) \to I$ такая, что $f(Z_1)=\{0\}, f_2(Z_2)=\{1\}$. Тогда f - продолжается до непрерывной на компакте $\left[i(X)\right]_{I^{C_u(X,I)}}=F$ функции $\tilde{f}$ и $\left[Z_1\right]_F \subset \tilde{f}^{-1}(\{0\}), \left[Z_2\right]_F \subset \tilde{f}^{-1}(\{1\})$, т.е. $\left[Z_1\right]_F \cap \left[Z_2\right]_F = \varnothing$. Из свойства (5) теоремы 1.5.3. выводится следствие 2.5.2. □

2.6. Характеристика $coz-$совершенных отображений посредством колец.

Пусть $f:uX\to vY$ $coz-$отображение uX на vY. Тогда определено естественное отображение кольца $C_v^*(Y)$ в кольцо $C_u^*(X)$, которое каждой функции $g\in C_v^*(Y)$ сопоставляет функцию $g\circ f\in C_u^*(X)$. Обозначим это отображение через $j:C_v^*(Y)\to C_u^*(X)$.

ЛЕММА 2.6.1. Отображение $j:C_v^*(Y)\to C_u^*(X)$ является инъективным изоморфизмом кольца $C_v^*(Y)$ в кольцо $C_u^*(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем,

$$\big((g+h)\circ f\big)(x)=(g+h)\big(f(x)\big)=g(f(x))+h(f(x))=(g\circ f)(x)+(g\circ h)(x)=\big((g\circ f)+(g\circ h)\big)(x)$$

и

$$\big((g\cdot h)\circ f\big)(x)=(g\cdot h)\big(f(x)\big)=g\big(f(x)\big)\cdot h\big(f(x)\big)=\big((g\circ f)\cdot(g\circ h)\big)(x)$$

для любого $x\in X$ и любых $g,h\in C_v^*(Y)$. Таким образом, j является гомоморфизмом кольца $C_v^*(Y)$ в кольцо $C_u^*(X)$.

Если $g\neq h$ и $g,h\in C_v^*(Y)$, то существует такие $y_1\neq y_2,y_1,y_2\in Y$ и $g(y_1)\neq h(y_2)$. Так как отображение $f:uX\to vY$ сюръективно, то существуют такие $x_1,x_2\in X$, что $x_1\neq x_2$ и $y_i=f(x_i)\,(i=1,2)$. Тогда

$$g(y_1)=g\big(f(x_1)\big)=(g\circ f)(x_1)\neq(h\circ f)(x_2)=h\big(f(x_2)\big)=h(y_2),$$

т.е. $g\circ f\neq h\circ f$. Таким образом, гомоморфизм $j:C_v^*(Y)\to C_u^*(X)$ является инъективным. □

СОГЛАШЕНИЕ 2.6.2. В условиях леммы 2.5.1 кольцо $C_v^*(Y)$ будет отождествляться с его изоморфным образом $j(C_v^*(Y))\subset C_u^*(X)$.

Следующая лемма является по сути, переформулировкой характеристики $coz-$совершенных отображений [7].

ЛЕММА 2.6.3. *Пусть* $f:uX\to vY$ $coz-$*отображение* uX *на* vY. *Тогда* f *является* $coz-$*совершенным тогда и только тогда, когда для любого* *свободного* z_u*-ультрафильтра* p *на* uX *его образ* $f(p)=\{f(z):z\in p\}$ *свободен, т.е.* $\cap\{f(z):z\in p\}\neq\varnothing$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из [12]. □

ТЕОРЕМА 2.6.4. *Пусть* $f:uX\to vY$ $coz-$*отображение* uX *на* vY. *Тогда* f $coz-$*совершенно тогда и только тогда, когда для порожденного* f *изоморфного вложения* j *для каждого свободного идеала* I *в* $C_u^*(X)$ *идеал* $I\cap C_v^*(Y)$ *является свободным в* $C_u^*(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f $coz-$совершенно и I свободный идеал в кольце $C_u^*(X)$. Для каждых $h\in C_u^*(X)$ и $\varepsilon>0$ положим $Z_\varepsilon(h)=\{x:|h(x)|\le\varepsilon\}$. Тогда $Z_\varepsilon(h)\in\mathcal{Z}_u$, т.е. является u-замкнутым множеством. Пусть

$$\mathcal{F}(I)=\{Z\in\mathcal{Z}_u:Z_\varepsilon(h)\subset Z \text{ для некоторых } h\in I \text{ и } \varepsilon>0\}.$$

Тогда $\mathcal{F}(I)$ свободный z_u-фильтр на uX. Дополним $\mathcal{F}(I)$ до z_u-ультрафильтра p, который очевидно является свободным. В силу $coz-$совершенности f предфильтр $f(p)$ является свободным в vY (лемма 2.6.3). Пусть $x\in X$-произвольная точка и $y=f(x)$. Тогда существует $Z\in p$ такое, что $y\notin f(Z)$. Поскольку $f(Z)$ замкнут в Y, то существует $g\in C_v^*(Y)$ такое, что $g(y)>0$ и $g(t)=0$ для всех $t\in f(Z)$. Тогда имеем $(g\circ f)(x)>0$ и $g\circ f\in C_v^*(Y)$, где $C_v^*(Y)$, как мы отмечаем в соглашении 2.6.2, изоморфно вложено в $C_u^*(X)$.

Докажем, что $g\circ f\in I$. Пусть $\varphi=g\circ f$. Тогда $I'=C_u^*(X)\cdot\varphi+I$, где $C_u^*(X)\cdot\varphi=\{g\cdot\varphi:g\in C_u^*(X)\}$, некоторый идеал и $I\subset I'$. Для каждой функции $\xi\in I$ и $\xi>0$, $Z_\varepsilon(\xi)\cap Z\neq\varnothing$, т.к. $Z_\varepsilon(\xi)\in p$ и $Z\in p$. Имеем $\varphi(Z)=0$, следовательно, $|g\cdot\varphi+\xi|\le\varepsilon$ для всех $g\in C_u^*(X)$ и некоторой точки из X. Таким образом, имеем $I'\neq C_u^*(X)$, следовательно $I'=I$, в силу максимальности идеала I. Тогда $\varphi\in I$. Ясно, что $\varphi\in I\cap C_v^*(Y)$, следовательно, $I\cap C_v^*(Y)$ свободен в $C_u^*(X)$.

Докажем обратное. Пусть p-свободный z_u-ультрафильтр на uX. Положим

$$I = \{\varphi \in C_u^*(X) : Z_\varepsilon(\varphi) \in p \text{ для всех } \varepsilon > 0\}.$$

Тогда I свободный максимальный идеал в $C_u^*(X)$. Действительно, предположим, что существует такой идеал I' в $C_u^*(X)$, что $I \subset I'$ и $I \neq I'$. Пусть $g \in I' \setminus I$. Тогда $Z_\varepsilon(g) \notin p$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и $Z_\varepsilon(g) \cap Z \neq \varnothing$ для некоторого $Z \in p$. Положим $\varphi = (|g| - \varepsilon) \wedge 0$. Тогда $\varphi \in I$, так как $Z_\delta(\varphi) \supset Z$ для всех $\delta > 0$. Таким образом $g^2 + \varphi^2 \in I'$ и $g^2 + \varphi^2 \geq \dfrac{\varepsilon^2}{4}$, что влечёт $I' = C_u^*(X)$. Таким образом I-максимальный идеал. Покажем, что $f(p)$ не имеет точек прикосновения в Y. Пусть $y \in Y$-произвольная точка и $x \in f^{-1}(y)$-некоторая точка. По условию теоремы $I \cap C_v^*(Y)$ свободный идеал в $C_u^*(X)$. Следовательно, существует такая функция $\varphi \in C_v^*(Y)$, что $\varphi \circ f \in I$ и $(\varphi \circ f)(x) > 0$. Пусть $(\varphi \circ f)(x) = \varepsilon > 0$. Тогда

$$Z_{\varepsilon/2}(\varphi \circ f) \cap f^{-1}(y) = \varnothing,$$

следовательно $y \notin f(Z_{\varepsilon/2}(\varphi \circ f))$. С другой стороны $Z_{\varepsilon/2}(\varphi \circ f) \in p$ из определения идеала I. Поскольку

$$f(Z_{\varepsilon/2}(\varphi \circ f)) = Z_{\varepsilon/2}(\varphi), \text{ то } |\varphi(t)| \leq \varepsilon / 2$$

для всех $t \in f(Z_{\varepsilon/2}(\varphi \circ f))$. Пусть $V = \{t \in Y : \varphi(t) > \varepsilon / 2\}$. Тогда V u-открытая окрестность точки y и

$$V \cap f(Z_{\varepsilon/2}(\varphi \circ f)) = \varnothing.$$

Таким образом y не является точкой прикосновения предфильтра $f(p)$, т.е. $f(p)$-свободный предфильтр. Следовательно, по лемме 2.6.3, $f - coz -$ совершенно. □

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Во второй главе диссертации решены следующие проблемы:

- установлены общие и новые характеристики $\beta-$подобной компактификации при помощи кольца всех и всех ограниченных $coz-$функций;
- доказано, что кольцо всех $coz-$функций определяет равномерные пространства с первой аксиомой счётности;
- построена $\beta-$подобная компактификация с помощью кольца всех $coz-$функций в единичный отрезок;
- установлена характеристика $coz-$совершенных отображений при помощи колец;

ГЛАВА 3

КОЛЬЦО ВСЕХ НЕПРЕРЫВНЫХ ПО РАВНОМЕРНО ЗАМКНУТЫМ МНОЖЕСТВАМ ФУНКЦИИ И ВОЛМЭНОВСКАЯ РЕАЛКОМПАКТИФИКАЦИЯ

3.1. О новых характеристиках Волмэновской реалкомпактификации

ТЕОРЕМА 3.1.1. *Пусть uX, vY такие равномерные пространства, что X плотно в Y и $\mathcal{Z}_v \wedge X = \mathcal{Z}_u$. Тогда на Y существует такая $\aleph_0$-ограниченная равномерность v_ω, что $v_\omega\big|_X = u_\omega^z$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{B}_\omega^*$ база равномерности u_ω^z, состоящая из всех счётных u-открытых покрытий и $\alpha = \{V_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}_\omega^*$-произвольное базовое счётное u-открытое покрытие. Положим

$$Ex_Y U_i = Y \setminus \overline{X \setminus U_i} \ (i \in \mathbb{N}),$$

где $\overline{X \setminus U_i}$-множество всех точек $x \in Y$ таких, что $X \setminus U_i$ принадлежит некоторому счётноцентрированному z_u − ультрафильтру p_x на uX. □

ЛЕММА 3.1.2. *Множество $\overline{X \setminus U_i}$ замкнуто в Y $(i \in \mathbb{N})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in [X \setminus U_i]_Y$ и $p^x = \{Z \in \mathcal{Z}_v : x \in Z\}$. Тогда p^x - счётноцентрированный z_v-ультрафильтр на vY. Так как по условию $\mathcal{Z}_v \wedge X = \mathcal{Z}_u$, то $p^x \wedge X$ счётноцентрированная z_u-система на X. Тогда существует хотя бы один счётноцентрированный z_u-ультрафильтр p_x такой, что $p^x \wedge X \subset p_x$. Ясно, что $X \setminus U_i \in p_x$. Следовательно $x \in \overline{X \setminus U_i}$, т.е. $[X \setminus U_i]_Y \subset \overline{X \setminus U_i}$. Обратное включение очевидно. □

ЛЕММА 3.1.3. *Для каждой последовательности $\{Z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ u−замкнутых в uX множеств $\overline{\cap_{i\in\mathbb{N}} Z_i} \subset \cap_{i\in\mathbb{N}} \overline{Z_i}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $\overline{\cap_{i\in\mathbb{N}} Z_i} = \cap_{i\in\mathbb{N}} \overline{Z_i}$ очевидно. Обратно, пусть $x \in \cap_{i\in\mathbb{N}} \overline{Z_i}$, т.е. $x \in \overline{Z_i}$ или $Z_i \in p_x$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Так как, p_x-счётноцентрированный z_u-ультрафильтр, то $\cap_{i\in\mathbb{N}} Z_i \in p_x$, т.е. $x \in \overline{\cap_{i\in\mathbb{N}} Z_i}$. □

Продолжение доказательства теоремы 3.1.1. Семейство $Ex_Y\alpha = \{Ex_Y U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$является открытым покрытием Y, в силу леммы 3.1.3.

Для семейства $\overline{\mathcal{B}_\omega^*} = \{Ex_Y\alpha : \alpha \in \mathcal{B}_\omega^*\}$ *выполнены следующие свойства:*

(1) $Ex_Y\alpha \wedge Ex_Y\beta = Ex_Y(\alpha \wedge \beta)$ для всех $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_\omega^*$.

(2) Покрытие $Ex_Y\beta$ звёздно вписано в $Ex_Y\alpha$, если $\beta \in \mathcal{B}_\omega^*$ сильно звёздно вписано в покрытие $\alpha \in \mathcal{B}_\omega^*$

(3) $\{y\} = \cap\{Ex_Y\alpha(y) : \alpha \in \mathcal{B}_\omega^*\}$ для любой точки $y \in Y$.

Таким образом семейство $\overline{\mathcal{B}_\omega^*}$ база некоторой $\aleph_0^*$-ограниченной равномерности v_ω на Y. Так как $Ex_Y\alpha \wedge X = \alpha$ для любого $\alpha \in u_\omega^z$, то $v_\omega|_X = u_\omega^z$. □

СЛЕДСТВИЕ 3.1.4. *В условиях теоремы 3.1.1., для равномерности* v_ω *на* Y, $\mathcal{Z}_{v_\omega} \wedge X = \mathcal{Z}_{u_\omega^z} = \mathcal{Z}_u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из условия $v_\omega|_X = u_\omega^z$ теоремы 3.1.1. □

ТЕОРЕМА 3.1.5. *Пусть* uX, vY *такие равномерные пространства, что* X *плотнов* Y *и* $\mathcal{Z}_v \wedge X = \mathcal{Z}_u$. *Тогда следующие пункты равносильны:*

(1) Каждое $coz-$ *отображение из* uX *в* $\mathbb{R}-z_u-$*полное равномерное пространство* vR *продолжается до* $coz-$ *отображения* $\tilde{f}$ *из* vY *в* vR

(2) uX C_u*-вложено в* vY.

(3) Если для последовательности $\{Z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$*-*u *- замкнутых множеств в* uX *множеств* $\cap_{i\in\mathbb{N}} Z_i = \varnothing$, *то* $\cap_{i\in\mathbb{N}} [Z_i]_Y = \varnothing$

(4) Для любой последовательности $\{Z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ u*-замкнутых в* uX *множеств выполнено равенство* $[\cap_{i\in\mathbb{N}} Z_i]_Y = \cap_{i\in\mathbb{N}} [Z_i]_Y$.

(5) Каждая точка Y является пределом единственного счётноцентрированного z_u-ультрафильтра на uX.

(6) $X \subset Y \subset \upsilon_u X$.

(7) $\upsilon_v Y = \upsilon_u X$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $(1) \Rightarrow (2)$. Эта импликация очевидна, так как $\mathbb{R}$ со своей естественной равномерностью $u_{\mathbb{R}}$ является $\mathbb{R} - z_{u_{\mathbb{R}}}$-полным равномерным пространством.

$(2) \Rightarrow (3)$. Пусть $\cap_{i\in\mathbb{N}} Z_u = \varnothing$ и $Z_i \in \mathcal{Z}_u$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Для каждого $i \in \mathbb{N}$, $Z_i = f^{-1}(0)$, $f_i \in C_u(X)$. Из пункта (2) следует, что каждая функция f_i единственным образом продолжается до v-непрерывной функции $\tilde{f}_i \in C_v(Y)$ $(i \in \mathbb{N})$. Очевидно, что $[Z_i]_Y \subset \tilde{f}_i^{-1}(0)$ $(i \in \mathbb{N})$. Покажем, что семейство $\tilde{\alpha} = \{Y \setminus \tilde{f}_u^{-1}(0)\}_{i\in\mathbb{N}}$ является покрытием Y. Тогда семейство $\alpha = \{Y \setminus [Z_i]\}_{i\in\mathbb{N}}$ тем более является покрытием Y. Предположим, что существует $y \in Y \setminus \cup\tilde{\alpha}$, т.е. $y \in \cap_{i\in\mathbb{N}} \tilde{f}_i^{-1}(0)$. Пусть p^y – счётноцентрированный z_u -ультрафильтр такой, что $\cap p^y = \{y\}$. Тогда $\tilde{f}_i^{-1}(0) \in p^y$ и $p^y \wedge X$ счётноцентрированная на uX z_u-система. Пусть p – счётноцентрированный z_u-ультрафильтр на uX такой, что $p^y \wedge X \subset p$. Тогда $\tilde{f}_i^{-1}(0) \cap X = Z_i \in p$ $(i \in \mathbb{N})$. Следовательно $\cap_{i\in\mathbb{N}} Z_i \in p$, т.е. $\cap_{i\in\mathbb{N}} Z_i \neq \varnothing$. Противоречие. Таким образом, $\tilde{\alpha}$ является покрытием Y и $\cap_{i\in\mathbb{N}} [Z_i]_Y = \varnothing$.

$(3) \Rightarrow (4)$. Включение $[\cap_{i\in\mathbb{N}} Z_i]_Y \subset \cap_{i\in\mathbb{N}} [Z_i]$ очевидно. Обратно, пусть $x \in \cap_{i\in\mathbb{N}} [Z_i]_Y$. Тогда для каждой v-замкнутой окрестности V точки x имеем $x \in V \cap [Z_i]_Y = [V \cap Z_i]_Y$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Следовательно $\cap_{i\in\mathbb{N}} (V \cup Z_i) \neq \varnothing$, т.е. $V \cap (\cap_{i\in\mathbb{N}} Z_i) \neq \varnothing$. Тогда $x \in [\cap_{i\in\mathbb{N}} Z_i]_Y$ и включение $\cap_{i\in\mathbb{N}} [Z_i]_Y \subset [\cap_{i\in\mathbb{N}} Z_i]_Y$ имеет место.

$(4) \Rightarrow (3)$. Очевидно.

(3)=>(5). Пусть $x \in Y$ и $p,q-$-счётноцентрированные z_u-ультрафильтры на uX сходящиеся к x и $p \neq q$. Тогда существует такие счётные подмножества $P \subset p$ и $Q \subset q$ такие, что $\cap P \in p$, $\cap Q \in q$ и $(\cap P) \cap (\cap Q) = \varnothing$. Тогда $[\cap P]_Y \cap [\cap Q]_Y = \varnothing$. Противоречие, так как $x \in [\cap P]_Y \cap [\cap Q]_Y \neq \varnothing$.

$(5) => (1)$. Пусть $x \in Y$-произвольная точка и $f : uX \to \nu R$ $coz-$отображение в $\mathbb{R} - z_\nu -$полное равномерное пространство νR. Пусть p_x единственный счётноцентрированный z_u-ультрафильтр на uX сходящийся к точке $x \in Y$. По лемме 1.1.1, положим

$$f^{\#}(p_x) = \{E \in \mathcal{Z}_\nu : f^{-1}(E) \in p_x\}.$$

Семейство $f^{\#}(p_x)$ является счётноцентрированным простым z_ν-фильтром на νR. По следствию 1.1.1, $f^{\#}(p_x)$ содержится в единственном счётноцентрированном z_ν-ультрафильтре p^x. По теореме 1.1.1, $f^{\#}(p_x)$ и p^x имеют один и тот предел $y \in R$. Положим, $\{y\} = \cap p^x = \cap f^{\#}(p_x)$. Тем самым определено отображение $\tilde{f} : \nu Y \to \nu R$ из νY в νR. Когда $x \in X$, то $\{x\} = \cap p_x$ и $y = \tilde{f}(x) = f(x) = \cap f^{\#}(p_x)$, т.е. $\tilde{f}|_X = f$. Имеем $f^{-1}(F) \in \mathcal{Z}_\nu$ для всех $F \in \mathcal{Z}_\nu$. Тогда для отображения $\tilde{f} : Y \to \nu R$ имеет место равенство $\overline{f^{-1}(F)} = \tilde{f}^{-1}(F)$ для всех $F \in \mathcal{Z}_\nu$, где

$$\overline{f^{-1}(F)} = \{x \in Y : f^{-1}(F) \in p_x\}$$

(как в доказательстве теоремы 3.1.1 и леммы 3.1.2). Тогда для любого счетного ν-открытого покрытия $\beta = \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \nu_\omega^z$ $\mathbb{R} - z_\nu -$полного равномерного пространства νR покрытие $\tilde{f}^{-1}(\beta) = \{\tilde{f}^{-1}(V_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ открытое покрытие Y и

$$\tilde{f}^{-1}(V_i) = Y \setminus \overline{f^{-1}(R \setminus U_i)}$$

для всех $i \in \mathbb{N}$ и $\tilde{f}^{-1}(\beta) \in \nu_\omega$. Следовательно, $\tilde{f} : \nu_\omega Y \to \nu R -$ равномерно непрерывное отображение. Тогда $\tilde{f}^{-1}(F) \in \mathcal{Z}_{\nu_\omega}$ для любого $F \in \mathcal{Z}_\nu$. Очевидно, что

$$\tilde{f}^{-1}(F) \cap X = \overline{f^{-1}(F)} \cap X = f^{-1}(F) \text{ и } f^{-1}(F) \in \mathcal{Z}_v \wedge X .$$

Тогда существуют v-замкнутые множества $Z_i \in \mathcal{Z}_v$ $(i \in \mathbb{N})$ такие, что $f^{-1}(F) = \cap_{i\in\mathbb{N}}\{Z_i \cap X\}$. Тогда

$$\tilde{f}^{-1}(F) = \overline{f^{-1}(F)} = \cap_{i\in\mathbb{N}}\{Z_i \cap X\} = \cap_{i\in\mathbb{N}} Z_i$$

Таким образом $\tilde{f}^{-1}(F)$ является v-замкнутым множеством, т.е. $\tilde{f} : vY \to vR$ является v-непрерывным отображением.

$(5) => (7)$. По теореме 1.1.1 пополнение $\tilde{v}^z_\omega \tilde{Y}$ пространства Y по равномерности v^z_ω совпадает с Волмэновской реалкомпактификацией $\upsilon_v Y$. Так как каждая точка Y является пределом единственного счётноцентрированного z_u-ультрафильтра, то пополнение $\tilde{v}^z_\omega \tilde{Y} = \upsilon_u X$ совпадает с $\upsilon_v Y$.

$(7) => (6)$. $X \subset Y \subset \upsilon_u X = \upsilon_v Y$.

$(6) => (2)$. Равномерное пространство uX C_u-вложено в Волмэновскую реалкомпактификацию $\upsilon_u X$. Тогда, всякая непрерывная функция $f : uX \to \mathbb{R}$ продолжается до равномерно непрерывной функции $\upsilon_u f : \upsilon_u X \to \mathbb{R}$ и сужение $\tilde{f} = \upsilon_u f\,|_Y$ является равномерно непрерывным, следовательно, является v-непрерывной функцией, т.е. uX C_u-вложено в vY. □

СЛЕДСТВИЕ 3.1.6. Пусть uX плотное равномерное подпространство vY. Тогда следующие пункты эквивалентны:

(1) *Каждое* $coz-$*отображение из* uX *в* $\mathbb{R}-z_u-$*полное равномерное пространство* vR *продолжается до* $coz-$*отображения* $\tilde{f}$ *из* vY *в* vR.

(2) uX C_u *-вложено в* vY.

(3) Если для последовательности $\{Z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *-*u *- замкнутых множеств в* uX *множеств* $\cap_{i\in\mathbb{N}} Z_i = \varnothing$, *то* $\cap_{i\in\mathbb{N}}[Z_i]_Y = \varnothing$.

(4) Для любой последовательности $\{Z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ u*-замкнутых в* uX *множеств выполнено равенство* $[\cap_{i\in\mathbb{N}} Z_i]_Y = \cap_{i\in\mathbb{N}}[Z_i]_Y$.

(5) *Каждая точка Y является пределом единственного счётноцентрированного z_u-ультрафильтра на uX.*

(6) $X \subset Y \subset \upsilon_u X$.

(7) $\upsilon_v Y = \upsilon_u X$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из теоремы 3.1.5, так как $u = v|_X$, следовательно $\mathcal{Z}_v \wedge X = \mathcal{Z}_u$. □

ТЕОРЕМА 3.1.7. *Каждое равномерное пространство uX имеет Волмэновскую реалкомпактификацию $\upsilon_u X$, содержащуюся в β-подобной компактификации $\beta_u X$, удовлетворяющую следующим эквивалентным свойствам:*

(I) *Каждое $coz-$отображение из uX в $\mathbb{R}-z_v-$полное равномерное пространство vR продолжается до $coz-$отображения $\upsilon_u f$ из υX в υR.*

(II) *uX C_u-вложено в $\upsilon_u X$.*

(III) *Если для последовательности $\{Z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$-u - замкнутых в uX множеств $\cap_{i\in\mathbb{N}} Z_i = \varnothing$, то $\cap_{i\in\mathbb{N}}[Z_i]_{\upsilon_u X} = \varnothing$.*

(IV) *Для любой последовательности $\{Z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ u-замкнутых в uX множеств выполнено равенство $[\cap_{i\in\mathbb{N}} Z_i]_{\upsilon_u X} = \cap_{i\in\mathbb{N}}[Z_i]_{\upsilon_u X}$.*

(V) *Каждая точка $\upsilon_u X$ является пределом единственного счётноцентрированного z_u-ультрафильтра на uX.*

Волмэновская реалкомпактификация $\upsilon_u X$ единственная в следующем смысле: если $\mathbb{R}$-z_v-полное равномерное пространство vY содержит uX всюду плотно и $\mathcal{Z}_v \wedge X = \mathcal{Z}_u$ удовлетворяет условиям (I) – (V), то существует $coz-$гомеморфизм $\upsilon_u X$ на vY оставляющий точки X неподвижно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения Волмэновской реалкомпактификации $\upsilon_u X$ равномерного пространства uX следует, что

$\upsilon_u X \subset \beta_u X$. Из теоремы 3.1.5 следует, если $\mathbb{R}$-z_v-полное равномерное пространство vY содержит X всюду плотно и $\mathcal{Z}_v \wedge X = \mathcal{Z}_u$, то если vY удовлетворяет одному из свойств (I)-(V), то оно удовлетворяет всем этим свойствам. По свойству (I) тождественное отображение на uX продолжается на vY и $\upsilon_u X$, следовательно, эти отображения являются взаимно обратными $coz-$ -гомеоморфизмами [8]. □

СЛЕДСТВИЕ 3.1.8. Пусть X плотное подпространство тихоновского пространства Y. Тогда следующие пункты эквивалентны:

(1) *Каждое непрерывное отображение из X в реалкомпактное пространства R продолжается до непрерывного отображения $\tilde{f}$ из Y в R.*

(2) X C-вложено в Y.

(3) Если для последовательности $\{Z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ - функционально замкнутых в X множеств $\cap_{i\in\mathbb{N}} Z_i = \varnothing$, то $\cap_{i\in\mathbb{N}}[Z_i]_Y = \varnothing$.

(4) Для любой последовательности $\{Z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ функционально замкнутых в X множеств выполнено равенство $[\cap_{i\in\mathbb{N}} Z_i]_Y = \cap_{i\in\mathbb{N}}[Z_i]_Y$.

(5) Каждая точка Y является пределом единственного счётноцентрированного z-ультрафильтра на X.

(6) $X \subset Y \subset \upsilon X$.

(7) $\upsilon Y = \upsilon X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из теоремы 3.1.5, случае когда $u = u_f$ - тонкая равномерность. □

СЛЕДСТВИЕ 3.1.9. *Каждое тихоновское пространство X имеет реалкомпактификацию υX, содержащуюся в Стоун – Чеховской компактификации βX, удовлетворяющую следующим эквивалентным свойствам:*

(I) *Каждое непрерывное отображение из* X *в реалкомпактное пространство* R *продолжается до непрерывного отображения* υf *из* X *в* R.

(II) X C *-вложено в* υX.

(III) *Если для последовательности* $\{Z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *-функционально замкнутых в* X *множеств* $\cap_{i\in\mathbb{N}} Z_i = \varnothing$, *то* $\cap_{i\in\mathbb{N}} [Z_i]_{\upsilon X} = \varnothing$.

(IV) *Для любой последовательности* $\{Z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *функционально замкнутых в* υX *множеств выполнено равенство* $[\cap_{i\in\mathbb{N}} Z_i]_{\upsilon X} = \cap_{i\in\mathbb{N}} [Z_i]_{\upsilon X}$.

(V) *Каждая точка* υX *является пределом единственного счётноцентрированного* z *-ультрафильтра на* X.

Реалкомпактификация υX *единственная в следующем смысле: если реалкомпактное пространство* Y *содержит* X *всюду плотно и удовлетворяет условиям (I) – (V), то существует гомеморфизм* υX *на* Y *оставляющий точки* X *неподвижно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения реалкомпактификации υX пространства X следует, что $\upsilon X \subset \beta X$. Из следствия 3.1.8 следует, если реалкомпактное пространство Y содержит X всюду плотно и удовлетворяет одному из свойств (I)-(V), то оно удовлетворяет всем этим свойствам. По свойству (I) тождественное отображение на X продолжается на Y и υX, следовательно, эти отображения являются взаимно обратными гомеоморфизмами [8]. □

3.2. Различные свойства реалкомпактных в категории $ZUnif$ пространств.

Как мы отмечали в главе I, реалкомпактным в категории $ZUnif$ равномерным пространством uX является $\mathbb{R}-z_u-$полное пространство. Из теоремы 3.1.7 имеем следующие характеристики реалкомпактности в категории $ZUnif$.

ТЕОРЕМА 3.2.1. *Для равномерного пространства uX следующие пункты эквивалентны:*

(1) uX $\mathbb{R}-z_u-$полно

(2) X – полно относительно равномерности u_ω^z.

(3) $X=\upsilon_u X$.

(4) X – полно относительно равномерности u_c^z, слабой относительно кольца $C_u(X)$.

(5) uX coz – гомеоморфно отображается на некоторое замкнутое подпространство $\mathbb{R}^\tau(\tau\geq\aleph_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность $(1)\Leftrightarrow(2)\Leftrightarrow(3)$ вытекает из теоремы 2.1 [12].

Эквивалентность $(4)\Leftrightarrow(5)$ для $\tau=|C_u(X)|>\aleph_0$ также очевидна и вытекает из определения слабой, относительного кольца $C_u(X)$ равномерности u_c^z [20].

$(4)\Rightarrow(2)$. Так как $u_c^z\subset u_\omega^z$, то из полноты X по равномерности u_c^z вытекает полнота по равномерности u_ω^z.

$(3)\Rightarrow(4)$. uX C_u - вложено в $\upsilon_u X$, следовательно, равномерность $\upsilon_u X$ индуцирует на X равномерность u_c^z и $\upsilon_u X$ - полно относительно равномерности u_c^z, так как $X=\upsilon_u X$. □

Различие реалкомпактности в категории $Tych$ и реалкомпактности в категории $ZUnif$ демонстрирует следующий пример.

ПРИМЕР 3.2.2. Пусть X реалкомпактное не Линделёфово пространство в категории $Tych$. Тогда на X существует такая равномерность u, что равномерное пространство uX не $\mathbb{R}-z_u-$полно (не реалкомпактно в $ZUnif$) и uX C_u-вложено, но не C - вложено в Волмэновскую компактификацию $\upsilon_u X$.

Так как X не Линделёфово, то существует такой счётноцентрированный фильтр ξ, состоящий из функционально замкнутых множеств, т.е. $\xi \subset \mathcal{Z}(X)$, что $\cap\xi = \varnothing$ [8]. По одной лемме работы [29] семейство

$$\mathcal{F} = \{Z \in \mathcal{Z}(X) : Z \in \xi \text{ или } Z \cap K = \varnothing \text{ для некоторого } K \in \xi\}$$

образует $s.n.-j.i.r.$- базу в смысле [29]. Следовательно, Волмэновская компактификация $\omega(X,\mathcal{F})$ является β - подобной компактификацией. Пусть $C\mathcal{F} = \{X \setminus Z : Z \in \mathcal{F}\}$. Тогда все счётные покрытия образованные из семейства $C\mathcal{F}$ образуют равномерность u и $\omega(X,\mathcal{F}) = \beta_u X$, $\upsilon(X,\mathcal{F}) = \upsilon_u X$. При этом ξ - свободный счётноцентрированный z_u - ультрафильтр на uX и $\xi \in \upsilon_u X$. Ясно, что $X = \upsilon X \neq \upsilon_u X$. Отметим, что uX C_u- вложено, но не C - вложено в $\upsilon_u X$.

Следующая теорема есть характеристика Линделёфовых пространств в теоремах равномерных структур.

ТЕОРЕМА 3.2.3. *Тихоновское пространство X является Линделёфовым тогда и только тогда, когда X $\mathbb{R}-z_u-$полно относительно любой равномерности u на нём.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если X является Линделёфовым, то оно $\mathbb{R}-z_u-$ полно относительно любой равномерности u на X [8].

Пусть X $\mathbb{R}-z_u-$полно относительно любой равномерности u на X, но X не является Линделёфовым. Тогда на X существует функционально замкнутый счетноцентрированный фильтр ξ такой, что $\cap\xi = \varnothing$. Тогда на X существует такая равномерность u, что uX не $\mathbb{R}-z_u-$полно (см. пример 3.2.2). Противоречие. □

СЛЕДСТВИЕ 3.2.4. *Каждое открытое равномерное подпространство сепарабельного метрического равномерного пространства $u_\rho X$ является $\mathbb{R}-z_{u_\rho}-$полным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждое сепарабельное метрическое равномерное пространство является наследственно Линделёфовым, следовательно, всякое открытое его подпространство Линделёфово [8]. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.5. *Замкнутое подпространство* Y $\mathbb{R}-z_u-$*полного равномерного пространства* uX *является* $\mathbb{R}-z_v-$*полным, где* $v=u|_Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть vY замкнутое равномерное подпространство $\mathbb{R}-z_u-$полного пространства uX, где $v=u|_Y$. Пространство uX полно относительно равномерности $u_\omega Z$ ((2), теорема 3.2.1), следовательно vY полно относительно равномерности $u_\omega^z|_Y$. Так как, $u_\omega^z|_Y \subset v_\omega^z$, то vY полно относительно равномерности v_ω^z, следовательно vY является $\mathbb{R}-z_v-$полным пространством. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.6. *Пусть* $\{u_t X_t : t \in T\}$ *некоторое семейство равномерных пространств. Тогда произведение* $\prod_{t\in T} u_t X_t$ $\mathbb{R}-z_u-$*полно, где* $u=\prod_{t\in T} u_t$, *тогда и только тогда, когда* $u_t X_t - \mathbb{R}-z_{u_t}-$ *- полно для всех* $t\in T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равномерное пространство $u_t X_t$ замкнуто и равномерно гомеоморфно вложено в произведение $\prod_{t\in T} u_t X_t$ для любого $t\in T$. Следовательно, если это произведение $\mathbb{R}-z_u-$полно для равномерности произведения $u=\prod_{t\in T} u_t$, то каждое $u_t X_t$ является $\mathbb{R}-z_{u_t}-$полным для всех $t\in T$, как замкнутое подпространство этого произведения (предложение 3.2.5).
Обратно, пусть $u_t X_t$ полно относительно равномерности u_t^z для всех $t\in T$. Тогда $X=\prod_{t\in T} X_t$ полно относительно равномерности $v=\prod_{t\in T} u_{t,\omega}^z$. Ясно, что $v\subset u_\omega^z$. Следовательно, X полно относительно равномерности u_ω^z, т.е. uX $\mathbb{R}-z_u-$ полно. □

СЛЕДСТВИЕ 3.2.7. *Пусть* uX *предел обратного спектра* $S=\{u_t X_t, f_{t'}^t, M\}$, *где* $u_t X_t$ $\mathbb{R}-z_{u_t}-$*полные пространства,* $f_{t'}^t : u_t X_t \to u_{t'} X_{t'}$ -

$coz-$отображение, M - некоторое исправленноемножество. Тогда uX является $\mathbb{R}-z_u-$полным пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно вытекает из того факта, что uX является замкнутым подпространством произведения $\prod_{t\in T} u_t T_t$ $\mathbb{R}-z_{u_t}-$полных равномерных пространств $u_t X_t$. □

СЛЕДСТВИЕ 3.2.8. *Пусть в семействе $\{u_t X_t : t\in T\}$ каждое $u_t X_t$ является $\mathbb{R}-z_{u_t}-$полным подпространством $\mathbb{R}-z_u-$полного пространства uX , т.е. $u_t = u|_{X_t}$ для каждого $t\in T$. Тогда пересечение $Y=\bigcap_{t\in T} X_t$, наделённого равномерностью $v=u|_Y$, является $\mathbb{R}-z_v-$полным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X'=\prod_{t\in T} X_t$, $u'=\prod_{t\in T} u_t$. Тогда $u'X'$ $\mathbb{R}-z_u-$ полно (предложение 3.2.6) и является равномерным подпространством степени $u^T X^T$ равномерного пространства uX, которое также $\mathbb{R}-z_{u^T}-$полно. Диагональ Δ степени X^T является замкнутым подпространством. Ясно, что равномерное пространство vY равномерно гемеоморфно замкнутому в X' равномерному подпространству $\Delta\cap X'$, наделенного равномерностью $u'|_{\Delta\cap X'}$, следовательно, является $\mathbb{R}-z_v-$полным. □

СЛЕДСТВИЕ 3.2.9. *Пусть $f: uX\to vY$ $coz-$отображается $\mathbb{R}-z_u-$ полного равномерного пространства uX в vY. Тогда для любого $\mathbb{R}-z_w-$полного подпространства wR пространства vY, где $w=v|_R$, полный прообраз $f^{-1}(R)$, наделённой равномерностью $u|_{f^{-1}(R)}=u'$, является $\mathbb{R}-z_{u'}-$полным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. График $Gr(f_B)$ $coz-$отображения $f_B: f^{-1}(B)\to B$ совпадает с пересечением $(X\times B)\cap Gr(f)$, где $Gr(f)$-график отображения f. Следовательно, замкнут в реалкомпактном в $ZUnif$ пространстве $X\times B$ (предложение 3.2.6), т.е. является реалкомпактным в $ZUnif$ пространством. Прообраз $f^{-1}(B)$ $coz-$гомеоморфен $Gr(f_B)$, следовательно $f^{-1}(B)$ - реалкомпактно в категории $ZUnif$, то $\mathbb{R}-z_{u'}-$полно, где $u|_{f^{-1}(R)}=u'$. □

ТЕОРЕМА 3.2.10. *Равномерное пространство* uX $\mathbb{R}-z_u-$*полно тогда и только тогда, когда не существует такого равномерного пространства* $\tilde{u}\tilde{X}$, *что выполнены следующие условия:*

(1) Существует $coz-$*гомеоморфное вложение* $r:uX\to\tilde{u}\tilde{X}$ *такое, что* $r(X)\neq[r(X)]_{\tilde{X}}=\tilde{X}$.

(2) Для каждой u *- непрерывной функции* $f:uX\to\mathbb{R}$ *(*$f\in C_u(X)$*) найдется* $\tilde{u}-$*непрерывная функция* $\tilde{f}:\tilde{u}\tilde{X}\to\mathbb{R}$ *такая, что* $\tilde{f}\circ r=f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть равномерное пространство $\mathbb{R}-z_u-$полно. Тогда uX $coz-$гомеоморфно вложено в $\mathbb{R}^{C_u(X)}$ посредством диагонального отображения

$$i=\underset{f\in C_u(X)}{\Delta}f:uX\to\prod_{f\in C_u(X)}\mathbb{R}_f=\mathbb{R}^{C_u(X)},\text{ где }\mathbb{R}_f=\mathbb{R}\text{ при }f\in C_u(X).$$

Положим $\tilde{X}=[i(X)]\subset\mathbb{R}^{C_u(X)}$, где замыкание $[i(X)]$ берётся в $\mathbb{R}^{C_u(X)}$. Пусть $\tilde{u}-$ равномерность индицирования на $[i(X)]$ из $\mathbb{R}^{C_u(X)}$. Пусть теперь $f:uX\to\mathbb{R}$- произвольная $u-$непрерывная функция, т.е. $f\in C_u(X)$. Тогда функция $\tilde{f}=\pi_f|_{\tilde{X}}$, где $\pi_f:\mathbb{R}^{C_u(X)}\to\mathbb{R}_f$ для функции $f:uX\to\mathbb{R}_f=\mathbb{R}$ является равномерно непрерывным, следовательно, $u-$ непрерывным продолжением. Следовательно, по одному из критериев $\mathbb{R}-z_u-$полных пространств, $i(X)=\tilde{X}$, следовательно, если существует такое равномерное пространство $\tilde{u}\tilde{X}$ удовлетворяющие условиям (1), (2) теоремы, то непременно $uX=\tilde{u}\tilde{X}$.

Обратно, если uX $\mathbb{R}-z_u-$полно, то по одному из свойств $\mathbb{R}-z_u-$полноты uX можно считать замкнутым подпространством $\mathbb{R}^S=\prod_{s\in S}\mathbb{R}$, где $\mathbb{R}_s=\mathbb{R}$ для $s\in S$. Пусть дано равномерное пространство $\tilde{u}\tilde{X}$ и $coz-$гомеоморфное вложения $r:uX\to\tilde{u}\tilde{X}$ удовлетворяющее условию (2) теоремы 3.2.10. Пусть $[r(X)]_{\tilde{X}}=\tilde{X}$. Для каждого $s\in S$ существует проекция $\tilde{\pi}_s:\tilde{X}\to\mathbb{R}_s=\mathbb{R}$ такая, что $\tilde{\pi}_s\circ r=\pi_s$, где $\pi_s:\mathbb{R}^S\to\mathbb{R}_s$ - естественная проекция на $s-$й - множитель. Положим $i=\underset{s\in S}{\Delta}\tilde{\pi}_s:\tilde{X}\to\mathbb{R}^S$. Так как $(i\circ r)(x)=x$ при всех $x\in X$ то

$$i(\tilde{X}) = i([r(X)]_{\tilde{X}}) \subset [(i \circ r)(X) = [X] = X,$$

т.е. сужение $i|_X : \tilde{X} \to X$ отображает $\tilde{X}$ на X. Имеем $(r \circ i|_X)(r(x)) = r(X)$ для всех точек $x \in X$. Это означает, что отображение $r \circ i|_X : \tilde{X} \to \tilde{X}$ при сужении на $r(X)$ совпадает с тождественным отображением $1_{r(X)} : r(X) \to r(X)$. Тогда $r \circ i|_X = 1_{\tilde{X}}$. Так как $r \circ i|_X (\tilde{X}) \subset r(X)$, то $r(X) = \tilde{X}$. Итак, не существует равномерного пространства $\tilde{u}\tilde{X}$, которое удовлетворяло бы условиям (1), (2) теоремы 3.2.10. □

Следующая теорема также является характеристикой $\mathbb{R} - z_u -$полных пространств и является аналогом теоремы Мрувки из [23].

ТЕОРЕМА 3.2.11. *Равномерное пространство uX $\mathbb{R} - z_u -$полно тогда и только, когда для каждой точки $x_0 \in \beta_u X \setminus X$ найдется такая непрерывная функция $h : \beta_u X \to I$, что $h(x_0) = 0$ и $h(x) > 0$ для всех $x \in X$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть uX $\mathbb{R} - z_u -$полно и $x_0 \in \beta_u X \setminus X$. Положим $\tilde{X} = X \cup \{x_0\} \subset \beta_u X$ и $\tilde{X}$ наделено равномерностью $\tilde{u}$, индуцированной из компактификации $\beta_u X$. Тогда uX $coz -$гомеоморфно вложено в $\tilde{u}\tilde{X}$ и существует u - непрерывная функция $f : uX \to \mathbb{R}$ $(f \in C_u(X))$ которую нельзя продолжить на $\tilde{u}\tilde{X}$.

ЛЕММА 3.2.12. *Пусть vY равномерное подпространство uX, где $v = u|_Y$. Если каждая v - непрерывная функция $g : vY \to \mathbb{R}$, для которой $g(x) \geq 1$ при всех $x \in Y$, продолжается на uX, то и любая v - непрерывная функция $f : vY \to \mathbb{R}$ продолжается на uX.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f : vY \to \mathbb{R}$ произвольная v - непрерывная функция. Тогда для функций

$$g_1 = 1 + (f \vee 0) \text{ и } g_2 = 1 - (f \wedge 0)$$

имеем, $g_i \in C_v(X)$ и $g_i(x) \geq 1$ при всех $x \in Y$ и $i = 1.2$. Ясно, что $f = g_1 - g_2$. Тогда функция $\tilde{f} = \tilde{g}_1 - \tilde{g}_2$, где $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2$ - продолжения функций g_1, g_2, соответственно, является продолжением функции f на uX. □

Продолжение доказательства теоремы 3.2.11.

По лемме 3.2.12, можно считать, что $f(x)\geq 1$ для всех $x\in X$. Это означает, что функция $1/f$ является u - непрерывной и $1/f:uX\to I$ и $h\in C_u^*(X)$ [12]. Следовательно $1/f$ - продолжается до непрерывной функции $\beta_u(1/f)=h:\beta_u X\to I$. Ясно, что $h(x)>0$ при всех $x\in X$ и $h(x_0)=0$. Так, в противном случае, если $h(x_0)\neq 0$, то определяется $coz-$непрерывное продолжение $\tilde{f}:\tilde{u}\tilde{X}\to\mathbb{R}$ функции f пологая $\tilde{f}(x)=1/h(x)$.

Обратно, для любой точки $y\in\beta_u X\setminus X$ найдётся непрерывная функция $h_y:\beta_u X\to I$ такая, что $h_y(y)=0$ и $h_y(x)>0$ для всех $x\in X$. Тогда $X=\bigcap\limits_{y\in\beta_u X\setminus X} h_y^{-1}((0,1])$ и uX является реалкомпактным ($\equiv\mathbb{R}-z_u-$полным) в $ZUnif$ как пересечение реалкомпактных в $ZUnif$ пространств $h_y^{-1}((0,1])$ (следствие 3.2.9). □

ЛЕММА 3.2.13. *Равномерно открытое подпространство vY некоторой степени $\mathbb{R}^A$, наделённой степенью $u_{\mathbb{R}}^A$ естественной равномерности $u_{\mathbb{R}}$, является $\mathbb{R}-z_v-$полным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $|A|\leq\aleph_0$, то $\mathbb{R}^A$ является сепарабельным метризуемым пространством, следовательно, по следствию 3.2.4, равномерно открытое подпространство vY является $\mathbb{R}-z_v-$полным. Пусть $|A|>\aleph_0$. Тогда существует такая равномерно непрерывная функция $f:\mathbb{R}^A\to\mathbb{R}$, что $Y=f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$, счетное множество $B\subset A$ и равномерно непрерывная функция $g:\mathbb{R}^B\to\mathbb{R}$ такие, что $f=g\circ\pi_B$, где $\pi_B:\mathbb{R}^A\to\mathbb{R}^B$ естественная проекция. Тогда, существует такое открытое множество $Y_B\subset\mathbb{R}^B$, что $Y=\pi_B^{-1}(Y_B)$. Очевидно, что равномерное пространство vY равномерно гомеоморфно произведению $\mathbb{R}-z_v-$полного равномерного пространства $v_B Y_B$, где v_B индуцированная из $\mathbb{R}^B$ равномерность, и реалкомпактного в $ZUnif$ пространства $\mathbb{R}^{A\setminus B}$. Следовательно, $v_B Y$ $\mathbb{R}-z_v-$полно. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.14. *Равномерно открытое подпространство vY $\mathbb{R}-z_u-$полного пространства uX является $\mathbb{R}-z_v-$полным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть uX $\mathbb{R}-z_v-$полно и vY равномерно открытое подпространство, где $v=u|_Y$. По пунктам *(4), (5)* теоремы 3.2.1, uX $coz-$гемеоморфно и замкнуто вложено в $\mathbb{R}^{C_u(X)}$, где вложение осуществляется диагональным произведение $i=\underset{f\in C_u(X)}{\Delta}:uX\to\mathbb{R}^{C_u(X)}$. Ясно, что uX C_u - вложено в $\mathbb{R}^{C_u(X)}$. Так как vY равномерно открытое подпространство uX, то существует равномерно открытое в $\mathbb{R}^{C_u(X)}$ множество Y' такое, что $Y=Y'\cap X$. Из леммы 3.2.13 следует, что $v'Y'$ $\mathbb{R}-z_{v'}-$полно, где v' равномерность на Y' индуцированная из $\mathbb{R}^{C_u(X)}$. Из следствия 3.2.8 следует, что vY $\mathbb{R}-z_v-$полно. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.15. *Пусть равномерное пространство* uX $\mathbb{R}-z_u-$ *полно и* C_u *- вложено в равномерное пространство* vY. *Тогда* X *замкнуто в* Y.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть uX $\mathbb{R}-z_u-$полно и C_u - вложено в vY. Тогда uX $coz-$гомеоморфно замкнутому подпространству $u'X'$ пространства $\mathbb{R}^A$ для некоторого A, где u' равномерность индуцированная из $\mathbb{R}^A$. Зафиксируем $coz-$гомеоморфизм $f:uX\to u'X'$. Для любого индекса $\alpha\in A$ пусть $\pi_\alpha:\mathbb{R}^A\to\mathbb{R}_\alpha=\mathbb{R}$ - естественное проектирование. Так как uX C_u - вложено в vY, то для каждого $\alpha\in A$ найдется v - непрерывная функция $g_\alpha\in C_v(Y)$ такая, что $\varphi_\alpha|_X=\pi_\alpha\circ f$. Пусть $g=\underset{\alpha\in A}{\Delta}g_\alpha:vY\to\mathbb{R}^A$. Тогда g $coz-$отображение vY в $\mathbb{R}^A$ и $g|_X=f$. Из v - непрерывности g и замкнутости X' в $\mathbb{R}^A$ имеем

$$g([X]_Y)\subseteq[g(X)]_{\mathbb{R}^A}=[f(X)]_{\mathbb{R}^A}=[X']_{\mathbb{R}^A}=X'$$

Так как $f-coz-$гомеоморфизм, то имеем отображение

$$r=f^{-1}\circ(g|_{[X]_Y}):[X]_Y\to X.$$

Ясно, что $r(X)=X$. Следовательно, $X=[X]_Y$. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.16. *Если равномерное пространство* uX C_u *- вложено в равномерное пространство* vY. *Тогда* $[X]_{\upsilon_v Y}=\upsilon_u X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что uX C_u - вложено в $\upsilon_v Y$. Тогда uX C_u - вложено в $[X]_{\upsilon_v Y}$. Так как X плотно в $\upsilon_u X$ и $[X]_{\upsilon_v Y}$, то $[X]_{\upsilon_v Y} = \upsilon_u X$. □

ЗАМЕЧАНИЕ 3. 2.17. Если I *максимальный вещественный идеал* кольца $C_u(X)$, то семейство $\mathscr{F}_I = \{Z_f : f \in I\}$ является счётноцентрированным z_u - ультрафильтром на uX и если $\mathscr{F}_I$ сходится, то идеал I называется *фиксированным,* поэтому $\mathbb{R} - z_u -$полнота равномерного пространства uX равносильна фиксированности в кольце $C_u(X)$ каждого максимального вещественного идеала.

ТЕОРЕМА 3.2.18. *Пусть* uX $\mathbb{R} - z_u -$*полное и* vY $\mathbb{R} - z_v -$*полное равномерные пространства. Тогда* uX $coz-$*гомеоморфно* vY *тогда и только тогда, когда кольцо* $C_u(X)$ *алгебраически изоморфно кольцу* $C_v(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если uX $coz-$гомеоморфно vY, то очевидно, что $C_u(X)$ алгебраически изоморфно $C_v(X)$.

Обратно, пусть uX $\mathbb{R} - z_u -$полно и $i : C_u(X) \to C_v(X)$ изоморфизм кольца $C_u(X)$ на кольцо $C_v(X)$. Каждый счётноцентрированный z_u - ультрафильтр p_x на uX сходится к некоторой точке x, причем, если $x \neq x'$, то $p_x \neq p'_x$. Максимальный идеал $I_{p_x} = \{f \in C_u(X) : Z_f \in p_x\}$ является вещественным и фиксированным. Тогда $i(I_{p_x})$ максимальный вещественный фиксированный идеал в кольце $C_v(Y)$, следовательно в $C_v(Y)$ все максимальные вещественные идеалы фиксированы. Это означает, что vY является $\mathbb{R} - z_v -$полным. Фильтр $\mathscr{F}_{i(I_{p_x})}$ является счётноцентрированным z_v - ультрафильтром на vY. Так как идеал $i(I_{p_x})$ - фиксирован, то $\mathscr{F}_{i(I_{p_x})}$ сходится к некоторой точке $y \in Y$. Положим $y = \cap \mathscr{F}_{i(I_{p_x})}$. Тем самым, определена биекция $f : uX \to vY$. Так как изоморфизм i сохраняет равномерно замкнутые множества, то f - является $coz-$гомеоморфизмом. □

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2.19. Теорема 3.2.18 является равномерным аналогом теоремы Хьюитта [18]. Отметим, что для равномерного пространства uX кольцо $C_u(X)$ изоморфно кольцу $C(v_u X)$, поэтому, теорема 3.2.18 для не реалкомпактных в категории $ZUnif$ пространств не имеет места.

3.3. Алгебры функций в смысле Исбелла-Хейджера-Джонсона.

Под *алгеброй* A *в смысле Исбелла-Хейджера и Джонсона* [19, 16, 17] понимается подалгебра $C(X)$, содержащая все константы, разделяющая точки и замкнутые множества, замкнутое в $C(X)$ относительно равномерной сходимости (т.е., если последовательность $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ из A равномерно сходится к функции f ,то $f\in A$) и замкнутое относительно инверсии (т.е. если $f\in A$ и $f(x)\neq 0$ для любой точки $x\in X$, то $1/f\in A$). Если A является алгеброй на X , то A^* множество всех ограниченных функций алгебры A образует кольцо. $\mathcal{K}(A^*)$ - пространство максимальных идеалов алгебры A наделённое Стоуновской топологией [30] является компактом и совпадает с некоторой $\beta-$подобной компактификацией X и кольцо A^* изоморфно кольцу $C(\mathcal{K}(A^*))$ ($A^*=C(\mathcal{K}(A^*))$ в терминах работ [17, 19]). Через $\mathcal{K}(A)$ обозначается подпространство $\mathcal{K}(A^*)$, полученное как пересечение всех конуль-множеств, содержащих X . По лемме 1.4 [29] следы на X всех нуль-множеств на $\mathcal{K}(A^*)$ является нуль множествами функций из кольца A^* и образуют $s.n-g.i.r$ - базу в смысле работы [29] $\mathcal{Z}(A^*)=\{Z_f : f\in A^*\}$. Из работы [19] следует, что A в точности множество всех суженый на X непрерывных функций на $\mathcal{K}(A^*)$ в двухточечную компактификацию $[-\infty;+\infty]$ числовой прямой $\mathbb{R}$. Тогда имеем

$$\mathcal{Z}(A)=\mathcal{Z}(A^*)=\{Z\cap X : Z\in\mathcal{Z}(\mathcal{K}(A^*))\}\text{, где }\mathcal{Z}(\mathcal{K}(A^*))=\{Z_f : f\in A^*=C(\mathcal{K}(A^*))\}$$

и, следовательно, $\mathcal{Z}(A)$ образует $s.n-j.i.r$ - базу. Таким образом, для алгебры A на X , Волмэновская компактификация $\omega(X,\mathcal{Z}(A))$ совпадает с $\mathcal{K}(A^*)$ и Волмэновская реалкомпактификация $\upsilon(X,\mathcal{Z}(A))$ совпадает с $\mathcal{K}(A)$, однако алгебра A не изоморфна некоторой алгебре $C(Y)$ [29], [19].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3.2. Пусть A алгебра на X и $\mathcal{Z}(A)=\{Z_f : f\in A\}$. Функции $f:X\to\mathbb{R}$называется $A-coz-$непрерывной, если прообраз $f^{-1}(F)$ любого замкнутого подмножества F из $\mathbb{R}$ принадлежит $\mathcal{Z}(A)$, т.е. $f^{-1}(F)\in\mathcal{Z}(A)$.

Через $C_A(X)$ обозначим *множество всех* $A-coz-$*непрерывных функций* на X , где A - некоторая алгебра

ТЕОРЕМА 3.3.2. *Для любой алгебры* A *на* X *имеет место равенство* $A = C_A(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любая функция $f : X \to \mathbb{R}$ из A продолжается до непрерывной функции $\tilde{f} : \mathcal{K}(A^*) \to [-\infty, +\infty]$, где $[-\infty, +\infty]$ двухточечная компактификация $\mathbb{R}$. Так как $\mathcal{K}(A^*) = \omega(X, \mathcal{Z}(A))$ - Волмэновская β - подобная компактификация X, то f - является $A - coz -$непрерывной функций, т.е. $A \subset C_A(X)$.

Из конструкции Волмэновской компактификации [13] следует, что всякая $A - coz -$непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$ продолжается на $\mathcal{K}(A^*)$ с сохранением непрерывности, т.е. $\tilde{f} : \mathcal{K}(A^*) \to [-\infty, +\infty]$ - непрерывная функция. Это означает, что $f \in A$, т.е. $C_A(X) \subset A$. Итак, доказано равенство $A = C_A(X)$. □

СЛЕДСТВИЕ 3.3.3. *Для любой алгебры на* X *существует такая равномерность u, что* $A = C_u(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть равномерность u слабо порождена всеми функциями алгебры A. Тогда $A = U(uX)$. Из теоремы 3.3.2, следует, что выполнено $U(uX) = C_A(X)$. Ясно, что $\mathcal{Z}_u = \mathcal{Z}(A)$, следовательно $A = C_u(X)$. □

СЛЕДСТВИЕ 3.3.4. *Для равномерности* u *на* X*, порождённой алгеброй* A*, и для равномерности* u_ω^z *из всех счётных* u *- открытых покрытий имеем* $U(uX) = C_u(X) = U(u_\omega^z X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из одной леммы работы [12]. □

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3.5. Равномерности u, u_ω^z в следствиях 3.3.3 и 3.3.4, вообще говоря, не совпадает.

Следующая теорема является ответом на один вопрос Хейджера [29, 16].

ТЕОРЕМА 3.3.6. *Пусть* A *некоторая алгебра на* X. *Тогда* $A = C_u(X)$ *для некоторой равномерности* u *на* X *если и только, если* $\mathcal{K}(A^*) = \beta_u(\mathcal{K}(A))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = C_u(X)$ для некоторой равномерности u на X. Тогда $\beta_u X = \mathcal{K}(C_u^*(X)) = \mathcal{K}(A^*)$ [12, теорема 2.6.(3)]. Из пункта (3) теоремы

2.12 [12] следует, что $\upsilon_u X = \mathcal{K}(A)$. Тогда $\beta_u(\upsilon_u X) = \beta_u X$ [29], т.е. $\mathcal{K}(A^*) = \beta_u(\mathcal{K}(A))$.

Обратно, пусть $\mathcal{K}(A^*) = \beta_u(\mathcal{K}(A))$ для некоторой равномерности u на X. Тогда

$$\beta_u(\mathcal{K}(A)) = \omega\left(X, \mathcal{Z}'_u\right), \text{ где } \mathcal{Z}'_u = \mathcal{K}(A) \wedge \mathcal{Z}(\mathcal{K}(A^*)).$$

Так как $\mathcal{Z}(\mathcal{K}(A^*)) \wedge X = \mathcal{Z}(A)$ [29, теорема 2.2], то $\mathcal{Z}(A) = X \wedge \mathcal{Z}'_u = \mathcal{Z}_u$. Следовательно, $A = C_u(X)$. □

Так как компактификация $\beta_u X$ совпадает со Стоун-Чеховской компактификацией βX, когда $u = u_f$ - тонкая равномерность [12], то получаем следующее известное следствие.

СЛЕДСТВИЕ 3.3.7 [16, 1.2 (i),(ii)]. *Пусть A алгебра на X. Тогда $A = C(X)$ если и только, если $\mathcal{K}(A^*) = \beta_u(\mathcal{K}(A))$.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В третьей главе диссертации решены следующие проблемы:

- установлены общие и новые характеристики Волмэновской реалкомпактификации при помощи кольца всех $coz-$функций;
- установлены новые характеристики реалкомпактных в категории $ZUnif$ равномерных пространств;
- получен ответ на одну проблему Хейджера, о совпадении алгебры всех $coz-$функций с алгеброй непрерывных функций, по которым строится $\beta-$подобная компактификация и Волмэновская реалкомпактификация.

ВЫВОДЫ

Посредством кольца всех (ограниченных) $coz-$функций данного равномерного пространства хорошо описывается структура некоторых классов равномерных пространств, а именно структура равномерных пространств с первой аксиомой счётности, а также существует естественное взаимосвязь между структурой $\beta-$подобной компактификации и Волмэновской реалкомпактификации с этими кольцами и по итогам научных результатов диссертации имеют место следующие новые результаты:

- установлены общие и новые характеристики $\beta-$подобной компактификации при помощи кольца всех и всех ограниченных $coz-$ функций;
- доказано, что кольцо всех $coz-$функций определяет равномерные пространства с первой аксиомой счётности;
- построена $\beta-$подобная компактификация с помощью кольца всех $coz-$ функций в единичный отрезок;
- установлена характеристика $coz-$совершенных отображений при помощи колец;
- установлены общие и новые характеристики Волмэновской реалкомпактификации при помощи кольца всех $coz-$функций;
- установлены новые характеристики реалкомпактных в категории $ZUnif$ равномерных пространств;
- решена проблема Хейджера, о совпадении алгебры всех $coz-$функций с алгеброй непрерывных функций, по которым строится $\beta-$подобная компактификация и Волмэновская реалкомпактификация.

СПИСОК ЦИТИРУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Архангельский, А.В.** Основы общей топологии в задачах и упражнениях [Текст]: учеб. пособие для вузов /А.В.Архангельский, В.И. Пономарев - М.: Наука, 1974. -525с.
2. **Борубаев, А.А**. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения [Текст]: монография /А.А. Борубаев - Б.: Илим, 1991. - 171 с.
3. **Гельфанд, И.М., Колмогоров, А.Н.** О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах [Текст] /И.М Гельфанд, А.Н Колмогоров //ДАН СССР, 1939, №22. -С. 11-15.
4. **Рахманкулов, Б.З.** Волмэновская компактификация и алгебра функций на равномерных пространствах [Текст] /Б.З. Рахманкулов //Наука, новые технологии и инновации, Бишкек, 2016, №7.-С. 12-17.
5. **Рахманкулов, Б.З.** О равномерном аналоге конструкции Гиллмана-Джерисона и новых классах равномерных пространств с базами из равномерно открытых покрытий [Текст] /А.А Чекеев, Г.О. Намазова //Доклады НАН КР, Бишкек, 2014, №1.– С. 8-12.
6. **Рахманкулов, Б.З.**О -подобной компактификации и инверсно-замкнутых кольцах равномерных пространств [Текст] /А.А Чекеев, Б.З. Рахманкулов //Вестник науки и образования, Москва, РФ, 2016, №6(18). - С.6-14.
7. **Чанбаева, А.И.** О замкнутых и совершенных отображениях равномерных пространств [Текст] /А.А Чекеев, А.И.Чанбаева //Наука и новые технологии, №4, Бишкек, 2014. - С.3 - 6.
8. **Энгелькинг, Р.** Общая топология [Текст]: учеб. для вузов /Р.Энгелькинг - М.:Мир, 1986. – 752 с.
9. **Charalambous, M. G.** A new covering dimension function for uniform spaces [Text] /M.G. Charalambous //J. London Math. Soc. (2)11, (1975), 137 - 143.
10. **Chekeev, A.A.** Epi - reflective hull of all metric uniform spaces class with given weight [Text] /A.A. Chekeev, T.J. Kasymova //International conference dedicated 120 anniversary of K. Kuratowski, 2016, 27-30 September (Lviv, Ukraine), Topology Atlas, 2016, 12 - 15.

11. **Chekeev, A.A.** Ultrafilter - completeness on zero-sets of uniformly continuous functions [Text] /A.A. Chekeev, T.J. Kasymova //TOPOSYM-2016, 25-29 July (Prague, Czech Republic), Topology Atlas, 2016, p.76. (to appear)
12. **Chekeev, A.A.** Uniformities for Wallman compactifications and realcompactifications [Text] /A.A. Chekeev //Topol. Appl.,V.201,(2016), 145 - 156.
13. **Frink, O.** Compactifications и seminormal spaces [Text] /O. Frink //Amer. J. Math., 86,(1964), 602 - 607.
14. **Frolik, Z.** Four functors in paved spaces [Text]: In seminar uniform spaces 1973-4 /Z. Frolik //Matematický ústav USAV, Praha, (1975), 27 - 72.
15. **Gillman, L.** Rings of continuous functions [Text] /L. Gillman, M.Jerison - New York, 1960. - 303 p.
16. **Hager, A. W.** On inverse – closed subalgebra of $C(X)$ [Text] /A.W.Hager //Proc. Lond. Math. Soc. 19 (3) (1969), 233 – 257.
17. **Hager, A. W.** A note on certain subalgebras of $C(X)$ [Text] /A.W.Hager, D.J. Johnson //Can J.Math.20 (1968), 389-393.
18. **Hewitt, E.** Rings of real-valued continuous functions, I. [Text] /E.Hewitt //Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948), 45 - 99.
19. **Isbell, J.R.** Algebras of uniformly continuous functions [Text] /Ann. Math. 68 (1958), 96 – 125.
20. **Isbell, J.R.** Uniform spaces [Text] /J.R. Isbell - Providence, 1964. - 175 p.
21. **Kaplansky, I.** Lattices of continuos functions [Text] /I. Kaplansky //Bull. Amer.Math. 53 (1947), 617-623.
22. **Mrówka, S.** $\beta-$like compactifications [Text] /S.Mrówka //Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, 24(3-4), (1973), 279 - 287.
23. **Mrówka, S.** Some properties of Q-spaces [Text] /S.Mrówka //Bull. Acad. Pol. Sci. Cl. III 5 (1957), 947 - 950.
24. **Rakhmankulov, B.Z.** Inversion - closed algebras of functions on a uniform space [Text] /A.A.Chekeev, T.J. Kasymova, B.Z.Rakhmankulov //Проблемы современной науки и образования, Москва, РФ, 2017, №9 (91). – С. 32-43

25.**Rakhmankulov, B.Z.** Inversion - closed ring on uniform spaces [Text] /A.A.Chekeev, B.Z.Rakhmankulov //Вестник КРСУ, Бишкек, 2016, Том 16, №5. - С. 85-87.

26.**Rakhmankulov, B.Z.** On β - like compactification of the uniform spaces [Text] /A.A.Chekeev, B.Z.Rakhmankulov //Вестник КРСУ, Бишкек, 2016, Том 16, №9. - С. 32-36.

27.**Rakhmankulov, B.Z.** Wallman compactification and algebra of functions of uniform spaces [Электронный ресурс] /A.A. Chekeev, B.Z.Rakhmankulov– Электронный журнал ВАК КР, ISSN 1694-7878, 2017, № 1. - 10 p.– Режим доступа: http://vak.kg/jurnalVAK/

28.**Shirota, T.** A class of topological spaces [Text] /T.Shirota //Osaka Math. J. 4 (1952), 23 - 40.

29.**Steiner, A.K.** Nest generated intersection rings in Tychonoff spaces [Text] /A.K. Steiner, E. F. Steiner //Trans. Amer. Math. Soc. 148,(1970), 589 - 601.

30.**Stone, M.H.** Applications of Boolean algebras to topology [Text] /M.H. Stone //Матем. сб. 1 (1936), 765 – 772.