МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ОШСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. академика М.М. Адышева

На правах рукописи

УДК 517. 968

МАМБЕТОВ ЖООМАРТ ИМАНАЛИЕВИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА

Специальность 01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель,
д.ф.-м.н., доцент Аширбаева А.Ж.

Ош - 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ

$\forall x$ – для всех x; $\exists x$ – хотя бы для одного x; $\exists ! x$ – точно для одного x;

N – множество натуральных чисел;

R – множество вещественных чисел;

$R_+=[0,\infty)$, $R_{++}=(0,\infty)$;

R^n $(n \in N)$ – n-мерное вещественное евклидово пространство и его точки $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

$\|\cdot\|$ - норма; для непрерывных (и ограниченных, если область определения не ограничена) функций будем подразумевать максимум модуля функции;

$\delta_{ii}=1$, $\delta_{ij}=0$ $(i \neq j)$ – символ Кронекера;

$\equiv$ – знак тождества;

$T \in R_{++}$, m, $n \in N$ - некоторые фиксированные числа;

$G_m(T)=\{(t_1,t_2,t_3,..,t_m) \mid 0 \le t_1 \le t_2 \le t_3 \le \ldots \le t_m \le T\}$;

$G_m=\{(t_1,t_2,t_3,..,t_m) \mid 0 \le t_1 \le t_2 \le t_3 \le \ldots \le t_m < \infty\}$;

$Q_m(T)=\{(t_1,t_2,t_3,..,t_m,x) \mid 0 \le t_1 \le t_2 \le t_3 \le \ldots \le t_m \le T, x \in R\}$;

$Q_m^n(T)=\{(t_1,t_2,t_3,..,t_m,x) \mid 0 \le t_1 \le t_2 \le t_3 \le \ldots \le t_m \le T, x \in R^n\}$;

$Q_m=\{(t_1,t_2,t_3,..,t_m,x) \mid 0 \le t_1 \le t_2 \le t_3 \le \ldots \le t_m < \infty, x \in R\}$;

$Q_m^n=\{(t_1,t_2,t_3,..,t_m,x) \mid 0 \le t_1 \le t_2 \le t_3 \le \ldots \le t_m < \infty, x \in R^n\}$;

Ω - подмножества евклидова пространства R^n;

$C(\Omega \to B)$ и $C^{(..)}(\Omega \to B)$ - пространства функций $\Omega \to B$, определенных и непрерывных (соответственно с дополнительными условиями); при $B=R$ обозначение «$\to R$» будем опускать;

$C(\Omega)$, $C^{(k)}(\Omega)$, $C^{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)}(\Omega)$ – пространства функций, определенных и непрерывных (соответственно вместе со всеми своими производными до порядка k; соответственно вместе со своими производными до порядка α_i по i-му аргументу $(i=1,\ldots,n)$) на Ω;

$\overline{C}, \overline{C}^{(...)}$ - пространства функций с дополнительным условием ограниченности (соответственно и для указанных производных);

Lip($N|_u, M|_v, \ldots$) – класс функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменной u с коэффициентом N, по переменной v с коэффициентом $M, \ldots$; для функции одной переменной индекс будем опускать;

$S^{(\alpha_1,\alpha_2)}(Q_1)$ – пространства тех функций $u(t,x) \in C^{(\alpha_1,\alpha_2)}(Q_1)$, для которых соответствующие производные ограничены относительно x в полуплоскости Q_1.

Будем использовать различные способы записи производных:

$$D_x u(t,x) = u_x'(t,x) = \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}; \quad D_x^2 u(t,x) = u_{xx}''(t,x) = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}.$$

По предложению [7] операторы от функций будем записывать в следующем виде:

- имя оператора, далее в скобках

- переменные результирующей функции (если таких переменных нет, то по традиции оператор называется функционалом);

- после знака (;) имя и (в скобках) переменные функции-аргумента;

- после знака (:) связанные переменные функции-аргумента (если все переменные связаны, то их перечислять не обязательно).

Следуя терминологии [74], о связанных переменных будем говорить, что «оператор действует по (первому, второму, …) аргументу».

В соответствии со свойствами связанных переменных, их имена не имеют значения, в отличие от свободных переменных.

Например:

$H(t,x,z;\ u(x,s,z){:}s,z;\ w(t,s){:}t,s) = H(t,x,z;\ u(x,\xi,z){:}\ \xi, z;\ w(p,q){:}p,q) =$

$$= t + \int_0^1 u(x,s,z)ds + u(x,\frac{1}{2},\frac{1}{4}) + w(0,0) = t + \int_0^1 u(x,\xi,z)d\xi + u(x,\frac{1}{2},\frac{1}{4}) + w(0,0).$$

«Оператор действует по второму и третьему аргументам функции u и по обеим аргументам функции w».

Оператор, определенный для функций, можно расширить для функций от большего количества переменных. Это будем называть «каноническим расширением оператора» и обозначать соответственно.

Например: функционал и его каноническое расширение

$$G(u(s):s)=\int_0^1 u^3(s)ds; G(x;u(x,s):s)=\int_0^1 u^3(x,s)ds.$$

$\Omega(t)\in C(R_+)$ (также с индексами) - строго возрастающие функции, удовлетворяющие условию $\Omega(0)=0$; $\Lambda(T; \Omega(t):t)$ - любое такое число T^* из $(0,T]$, что $\Omega(T^*)<1$.

Неизвестные функции будем обозначать через u, вспомогательные неизвестные функции - через v, p, ω.

МДА - метод дополнительного аргумента.

ИУ - интегральное уравнение.

Квазилинейное уравнение - дифференциальное уравнение с частными производными, линейное относительно старших производных от неизвестной функции.

ВВЕДЕНИЕ

.

Актуальность темы. В настоящее время МДА развивается для нелинейных уравнений в частных производных и их систем [24, с. 410-414], [31, с. 17-23], [25, с. 111-115] и др.

М.И. Иманалиев и Ю.А.Ведь [32] разработали метод дополнительного аргумента, как развитие метода характеристик, свели различные нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных с начальными условиями на оси к интегральным уравнениям и нашли с помощью принципа сжимающих отображений достаточные условия локального существования и единственности решений.

Аксиоматические основы этого метода были выявлены в работе П.С. Панкова, Т.М. Иманалиева [74], где также введены соответствующие новые понятия и определения. Показано, что в МДА основным является то, что дифференциальные операторы с частными производными являются в некотором смысле перестановочными с интегральными операторами, что было названо кратко «квазикоммутативностью».

МДА [72] применяется и для численного решения начальных задач для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, при этом он имеет преимущества перед методами, использующими фиксированные сетки (не производится численное дифференцирование) и перед методами типа метода характеристик (расчет ведется не вдоль ломаных, а вдоль прямых). Кроме того, этот метод, как использующий результаты для интегральных уравнений, более удобен для получения гарантированных результатов [72].

В работах Аширбаевой А.Ж. построена общая схема МДА при исследовании широкого класса начальных задач для нелинейных оператор-но-дифференциальных уравнений с композицией дифференциальных операторов любого порядка [11, с. 12-24]. Показана применимость этой схемы для различных конкретных типов уравнений, второго, третьего, четвертого, а также произвольного порядка [11, с. 52-76], в конце обобщается для уравнений со многими пространственными переменными [11, с. 91-123]. Для отдельных примеров получены решения в виде сходящихся рядов, также в случае, когда метод характеристик, как показано, применить невозможно [11, с. 59-61]. Предложенная схема реализована в виде компьютерной программы, произведены расчеты, показывающие возможности превосходства МДА [13, с. 37-40].

Используя МДА, исследованы дифференциальные уравнения в частных производных и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных типа Кортевега-де Фриза, а также нелинейные волновые дифференциальные уравнения в частных производных [26, с. 543-546], [27, с. 17-19].

В последнее время МДА находит свое применение при исследовании разрешимости систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с разными характеристическими направлениями.

Также идея МДА находит свое применение при исследовании нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков. Изучению таких уравнений посвящены работы М.И. Иманалиева, П.С. Панкова, Т.М. Иманалиева, А.Ж. Аширбаевой.

Имеются классы систем дифференциальных уравнений и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, представляющие теоретический интерес, которые не исследовались ни с помощью МДА, ни другими методами. Необходимость развития МДА для систем дифференциальных уравнений в частных производных определяет актуальность работы.

Цель исследования. Целью данной работы является распространение и развитие МДА на новые классы систем дифференциальных уравнений и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных.

Методика исследования. С помощью МДА начальные задачи для рассмотренных систем уравнений сводятся к системам интегральных уравнений. Доказательство существования решений таких систем с помощью принципа сжимающих отображений обеспечивает существование решений исходных задач. Также используются приближенные вычисления.

Научная новизна работы. Получены следующие результаты:

- найдены достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, более общих, чем изученные ранее;

- найдены достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для общих систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими пространственными переменными;

- построено решение системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с вырожденным ядром;

- полученные результаты для дифференциальных уравнений обобщены на широкие классы систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных;

- впервые реализована компьютерная программа для решения систем уравнений по МДА.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации подтверждены строгими доказательствами. По полученным результатам работы построены решения конкретных задач. Разработанную схему применения МДА для решения систем нелинейных уравнений в частных производных можно использовать при решении систем нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений других классов.

В диссертации получены новые результаты, которые вносят определенный вклад в теорию нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Доказательство теорем существования и единственности решения начальных задач для более широких, чем известные ранее, классов систем

квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка;

2. Построение решений системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с вырожденным ядром;

3. Установление условий существования решений систем квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими пространственными переменными;

4. Доказательство теорем существования и единственности решения начальных задач для широких классов нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных;

5. Методика компьютерного программирования для решения систем уравнений по МДА.

Апробация работы. Результаты исследований докладывались:

- на V конгрессе математиков Тюркского мира (с. Булан-Соготту, июнь 2014, опубликованы тезисы [67]);
- на научной конференции, посвященной 75-летию ОшГУ (Ош, октябрь 2015);
- на международной научной конференции «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», посвященной 85-летию академика М.И. Иманалиева (г. Бишкек-г. Чолпон-Ата, сентябрь 2016, опубликованы тезисы [68]);
- на международной научной конференции «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», посвященной 70-летию профессора А. Керимбекова (г. Бишкек-г.Чолпон–Ата, июнь 2017, опубликованы тезисы [69]);
- на VI конгрессе математиков Тюркского мира (Республика Казахстан, г. Астана, октябрь 2017, опубликованы тезисы [70]);
- на международной научной конференции «II Борубаевские чтения» (Бишкек, март 2018, опубликованы тезисы [71]);

- на семинарах кафедры «Прикладная математика» Ошского технологического университета (2014-2018).

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в статьях [58-66]. В [58-62, 64, 65] соавтору принадлежит постановка задачи, соискателю – получение конкретных результатов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, выводов, списка использованных источников, приложения - всего 82 страниц.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н., доценту Аширбаевой Айжаркын Жоробековне за постановку проблемы исследования и постоянное внимание к работе.

ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ И РЕЗУЛЬТАТОВ

Исследование системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, методом характеристик, сводится к исследованию нелинейной системы интегральных уравнений, где всегда присутствует суперпозиция неизвестных функций. И после нахождения решение в характеристических переменных, для получения решения исходной задачи требуется перейти от характеристических переменных к исходным переменным. Последняя задача во многих случаях бывает настолько сложной, что её не решают, а принимают допустимость обратного преобразования переменных в качестве условия.

Целью данной работы является исследование решений системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими переменными методом дополнительного аргумента, при помощи которого рассмотренная система уравнений приводится к системам ИУ. При этом в системе ИУ не присутствует суперпозиция неизвестных функций. Доказательство существования решения системы ИУ проводится с более строгим способом записи операторов в функциональных пространствах с использованием принципа «сжимающих отображений» для операторов запаздывающего типа.

1.1. Основы метода дополнительного аргумента

Начиная со статьи [22], в ряде работ было доказано, что для начальных задач для некоторых дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, которые раньше не удавалось исследовать известными методами, в том числе методом характеристик, можно построить такие ИУ с количеством аргументов, на единицу большим, что при приравнивании двух аргументов в их решении получается решение исходной начальной задачи, что и дало название этому новому методу - МДА.

В [74] было установлено, что основным в МДА является то, что дифференциальные операторы с частными производными являются в некотором смысле перестановочными с интегральными операторами, и введены следующие определения (мы излагаем их с нашими комментариями и дополнениями).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.1. Пусть V – некоторое множество, операторы D (обобщение дифференциального оператора), F (обобщение интегрального оператора) отображают его в себя. Оператор D называется квазикоммутирующим с оператором F, если существует такой оператор $F_1\colon V \to V$, что

$$DF=F_1D. \qquad (1.1.1)$$

Оператор F_1 назван левым квазиподобным для оператора F (относительно оператора D).

(Данное определение было новым только для операторов, не имеющих обратного).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.2. Оператор $F_2 : V\times V \to V$, существенно зависящий от первого операнда, называется обобщенно-левым квазиподобным для оператора F (относительно оператора D), если выполняется тождество $(DF)(u)=F_2(D(u),u)$.

Основная лемма МДА:

ЛЕММА 1.1.1. Если 1) оператор $F_2 : V\times V \to V$ является обобщенно-левым квазиподобным для оператора F относительно оператора D;
2) $(\exists a\in V)\ (\forall v\in V)\ (F_2 (a, v)=a)$; 3) $(\forall v\in V)\ (\exists! w\in V)\ (w = F_2(w, v))$, то из

$$v = F(v) \qquad (1.1.2)$$

следует

$$D(v) = a. \qquad (1.1.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воздействуя на тождество (1.1.2) $v_0 \equiv F(v_0)$ оператором D, получим $D(v_0) = DF(v_0)$. Используя Определение 1.1.2, отсюда выводим $D(v_0) = F_1(D(v_0),v_0)$.

Обозначая

$$w_0 = D(v_0), \qquad (1.1.4)$$

получим уравнение вида $w_0 = F_1(w_0 , v)$.

В силу условия 3) это уравнение имеет единственное решение, а в силу условия 2) это решение $w_0 = a$, то есть $D(v_0)=a$. Лемма доказана.

Эти общие результаты использованы в [74] для уравнений в пространствах функций нескольких переменных.

Предполагается, что множество V является некоторым множеством V_{XY} функций $u: X\times Y \to U$, где X, Y, U – множества, содержащие больше одного элемента.

Если V_{XY} - пространство дифференцируемых функций, D – дифференциальный оператор и F – интегральный оператор, отображающие это пространство в себя и действующие по разным аргументам, то при некоторых естественных предположениях, обеспечивающих законность «дифференцирования под знаком интеграла», они являются квазикоммутативными.

Схема МДА. Рассматривается уравнение вида

$$D(u, u)=J(u), \qquad (1.1.5)$$

где $u(z)$: $\boldsymbol{R}^p \to \boldsymbol{R}^m$ – (вектор)-функция нескольких вещественных переменных, D – дифференциальный (неограниченный) оператор, линейный по производным функции - второго операнда, J – функционально-интегральный (непрерывный) оператор. Для этого уравнения ставятся также некоторые начальные и краевые условия.

А) Вводится дополнительная переменная $\tau\in\boldsymbol{R}^k$ $(k\leq p)$ и для функции двух переменных $v(\tau,z)$ строится ИУ вида (1.1.2), где F действует по первому аргументу и функция $F(u)$ удовлетворяет начальным и краевым условиям при любой функции u, а также при применении оператора D по соответствующим переменным дает $J(u)$ (см. ниже п. В).

Если уравнение вида (1.1.2) имеет решение, то к соответствующему тождеству применяется оператор D (действующий по второму операнду) в соответствии с доказательством Леммы 1.1.1.

Б) Доказывается квазикоммутируемость оператора D с оператором F, строится (интегральный) оператор F_2 и доказывается, что $F_2(0, v)\equiv 0$ (условие

2) Леммы 1.1.1) и что уравнение в условии 3) Леммы 1.1.1 имеет единственное решение.

Отсюда, в силу Леммы 1.1.1, следует, что $D\,v(\tau,z) = 0$.

В) Обозначается: P - каноническая проекция $\boldsymbol{R}^p$ на множество $\boldsymbol{R}^k$; D_τ - сужение оператора D на первые k переменных. Рассматривается функция $u(z) = v(P(z),z)$. Применяя к этой функции оператор D и учитывая линейность этого оператора по производным, а также тождества $D\,v = 0$ и $v = F(v)$, доказывается, что $D(u)= D_\tau\,(F(u)) = J(u)$.

Основным примером применения этой схемы является

ПРИМЕР 1.1.1. Рассматриваются билинейный оператор и уравнение

$$D(t,x;\omega(t,x),u(t,x)) \equiv u_t(t,x) + \omega(t,x)u_x(t,x),$$
$$D(t,x;u(t,x),u(t,x)) \equiv u_t(t,x) + u(t,x)u_x(t,x) = J(t,x),\ (t,x) \in G_1, \qquad (1.1.6)$$

где $J(t,x)$ – заданная непрерывная функция $(z= (t,x) \in \boldsymbol{R}^2,\ p=2,\ m=1)$, с начальным условием

$$u(0,x) = \varphi(x) \in \overline{C}^1(R), x \in R. \qquad (1.1.7)$$

Вводится функция $v(\tau,t,x)$, удовлетворяющая условию $v(t,t,x)=u(t,x)$, и оператор

$$P(s,t,x;v(q,t,x):q) = x - \int_s^t v(q,t,x)dq. \qquad (1.1.8)$$

Вычисляется

$$D(s,t,x;u(t,x),P(s,t,x;v(q,t,x):q)) = -\int_s^t v_t{}'(q,t,x)dq - v(t,t,x) +$$
$$+u(t,x)\left(1 - \int_s^t v(q,t,x)dq\right) = -\int_s^t D(s,t,x;u(t,x),v(q,t,x))dq =$$
$$= P_1(s,t,x;D(s,t,x;u(t,x),v(q,t,x):q)), \qquad (1.1.9)$$

где $P_1(s,t,x;w(q,t,x):q) = -\int_s^t w(q,t,x)dq.$

(квазикоммутативность).

Оператор F выбирается в виде

$$F(\tau,t,x;v(q,t,x):q) = \varphi(x - \int_0^t v(s,t,x)ds) +$$
$$+\int_0^\tau J(s,x - \int_s^t v(q,t,x)dq)ds = \qquad (1.1.10)$$

$$= \varphi(P(0,t,x;v(q,t,x):q)) + \int_0^\tau J(s,P(s,t,x;v(q,t,x):q))ds, (\tau,t,x) \in Q_2(T).$$

(здесь $k=1$).

Имеем: $F(0,0,x;\ v(q,t,x):q)= \varphi(x)\ (x \in R)$.

Учитывая, что оператор D линеен по второму операнду, получено

$$D(\tau,t,x;u(F(\tau,t,x;v(q,t,x):q)) =$$
$$= \varphi'(P(0,t,x;v(q,t,x):q))(-\int_0^t D(t,x;u(t,x),v(q,t,x))dq) +$$
$$+ \int_0^\tau J_s'(s,P(s,t,x;v(q,t,x):q))(-\int_s^t D(t,x;u(t,x),v(q,t,x))dq)ds.$$

Отсюда видно, что можно положить в (1.1.3) $a=0$ (нулевая функция);

$$F_2(\tau,t,x;w(s,t,x)s;v(q,t,x):q)) =$$
$$= \varphi'(x - \int_0^t v(s,t,x)ds))(-\int_0^t w(q,t,x))dq) +$$
$$+ \int_0^\tau J_s'(s, x - \int_0^t v(q,t,x)dq))(-\int_s^t w(q,t,x))dq)ds. \qquad (1.1.11)$$

При этом $F_2(0,v)=0$.

Уравнение $w = F_2(w,\ v)$ является ИУ второго рода типа Вольтерра и имеет единственное непрерывное (нулевое) решение в области $\{0 \le s \le t \le T, -X \le x \le X\}$ при любом $X \in R_{++}$ и достаточно малом $T \in R_{++}$.

Следовательно, в силу Леммы 1.1.1, для решения $v_0(\tau,t,x)$ (интегрального) уравнения $v = F(v)$ вида (1.1.2)-(1.1.10) имеет место тождество

$D(t,x{:}v_0(t,t,x),v_0(\tau,t,x)) = 0$ вида (1.1.3)-(1.1.6).

Отсюда следует:

$$D(t,x;v_0(t,t,x),v_0(t,t,x)) = \frac{\partial}{\partial\tau} v_0(\tau,t,x)|_{\tau=t} +$$
$$+ D(t,x;v_0(t,t,x),v_0(\tau,t,x))|_{\tau=t} =$$
$$+ \frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^\tau J(s,x-\int_s^t v(q,t,x)dq)ds\,|_{\tau=t} + 0 =$$
$$= J(\tau, x - \int_\tau^t v(q,t,x)dq)\,|_{\tau=t} = J(t,x).$$

Следовательно, решение задачи (1.1.6)-(1.1.7) получается из решения задачи $v=F(v)$ с (1.1.10) по формуле $u(t,x) = v(t,t,x)$.

Также рассматриваются векторно-матричные уравнения вида (1.1.5) от одной скалярной пространственной переменной, с начальными условиями, которые записываются в двух видах

$$u_i(0,x)=\varphi_i(x), \quad x\in R, \quad \varphi_i(x)\in \overline{C}^1(R), i=1,...,n, \tag{1.1.12}$$

$$u(0,x)=\varphi(x), \quad x\in R, \quad \varphi(x)\in \overline{C}^1(R\to R^n),$$

$$u(t,x)=colon(u_1(t,x),...,u_n(t,x)); \varphi(x)=colon(\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)),$$

и векторно-матричные уравнения от векторной (нескольких скалярных) пространственных переменных, с начальными условиями, которые записываются в различных видах

$$u_i(0,x)=\varphi_i(x), \quad x\in R^n, \quad \varphi_i(x)\in \overline{C}^1(R^n), i=1,...,n, \tag{1.1.13}$$

$$u(0,x)=\varphi(x), \quad x\in R^n, \quad \varphi(x)\in \overline{C}^1(R^n\to R^n),$$

$$u(0,x_1,...,x_n)=\varphi(x_1,...,x_n), \quad (x_1,...,x_n)\in R^n, \quad \varphi(x_1,...,x_n)\in \overline{C}^1(R^n\to R^n).$$

Для удобства ссылок приведем известные результаты. Мы сформулируем их применительно к множествам банаховых пространств, как они будут использоваться в настоящей работе.

ЛЕММА 1.1.2 (следствие принципа сжимающих отображений Банаха). Если оператор A в шаре $S=\{x:||x||\le 2r\}$ банахова пространства удовлетворяет условию $||Ax-Ay||\le ½||x-y||$, и $||A(0)||\le r$, то он имеет в этом множестве точно одну неподвижную точку.

ЛЕММА 1.1.3. Если для банахова пространства B оператор $J:C([0,T]\to B)\to C([0,T]\to B)$ в любом шаре $S=\{u:||u||_{C([0,T]\to B)}\le r_0 =\text{const}\}$ удовлетворяет условию Липшица типа запаздывания:

$$(\forall t\in[0,T])(||\, Ju_1(t) - Ju_2(t)||_B \le L_S\, t||\, u_1-u_2||_{C([0.t]\to B)}),$$

L_S=const и зависит только от выбора шара S, то операторное уравнение $u = Ju$ при достаточно малом T^* имеет решение в $C([0,T^*]\to B)$.

Доказательство. Положим $r_0 = 2||J(0)||_B$ и $T^* = min\ \{T,1/(2L_S)\}$.

Тогда в силу Леммы 4.1.1 решение в шаре существует.

1.2. Компьютерная реализация метода дополнительного аргумента

Впервые такая реализация была осуществлена в [71].

Были проведены модельные расчеты для уравнения (1.1.1) с начальным условием (1.1.2). Как отмечено в предыдущем разделе, решение этой задачи можно получить из решения ИУ

$$v(\tau,t,x) = \varphi(x - \int_0^t v(q,t,x)dq) + \int_0^\tau J(s, x - \int_s^t v(q,t,x)dq)ds$$

по формуле *u(t,x) = v(t,t,x).*

В [72] отмечено, что переменная x в этих уравнениях выступает только как параметр, поэтому она не включается в расчетные формулы для соответствующих сеточных функций *P(j,i) = p(jh,ih,x), V(j,i) = v(jh,ih,x),* где h - шаг по t; интегралы аппроксимировались по формуле трапеций. Расчеты для полученной системы разностных уравнений показали степенную сходимость последовательных приближений для не очень больших значений t.

В дальнейшем по этой методике в [7] для уравнения

$$\begin{aligned} &u_{tt}(t,x) = t^2u^2(t,x)u_{xx}(t,x) - u(t,x)u_x(t,x) - \\ &= tu_x(t,x)(u_t(t,x) - tu(t,x)u_x(t,x)) + f(t), \quad (t,x)\in G_2(T) \end{aligned}$$

с начальными условиями

$u(0,x)=x,\ u_t(0,x)=0,$

для которой МДА дает эквивалентное ИУ

$$v(s,t,x) = x - \int_s^t \tau\cdot v(\tau,t,x)d\tau + \int_0^s (s-\nu)f(\nu)d\nu,$$

была написана программа и проведены соответствующие расчеты, подтвердившие эффективность метода.

В [73] на основе МДА реализованы численные решения задачи о движении волн Римана.

В [56] на основе МДА реализовано численное решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = u(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\left[u(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right] - \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \int_0^x K(t)u(t,\xi)d\xi.$$

Из этого обзора следует, что ранее не применялся МДА для приближенного решения систем уравнений.

1.3. Обзор известных результатов по уравнениям первого порядка и их системам

В [14] МДА применен для решения задачи Коши для линейных систем вида

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t} + a_i(t,x)\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(t,x)u_k(t,x) + f_i(t,x), \quad i = 1,...,n, \tag{1.3.1}$$

с начальным условием (1.1.12), где

$$a_i(t,x) \in C^{(0,1)}(Q_1), \quad b_{ik}(t,x) \in C^{(0,1)}(Q_1), \quad f_i(t,x) \in C^{(0,1)}(Q_1). \tag{1.3.2}$$

Согласно МДА задача (1.3.1)-(1.1.12) сводится к системе нелинейных ИУ вида

$$u_i(t,x) = \varphi_i(p_i(0,t,x)) + \int_0^t \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(s,p_k(s,t,x))\nu_k(s,t,x)ds + \int_0^t f_i(s,p_k(s,t,x))ds, \tag{1.3.3}$$

где $p_i(\tau,t,x)$, $\nu_k(\tau,t,x)$ – дополнительные (вспомогательные) неизвестные функции, $0 \le \tau \le t$, которые определяются из систем однородных дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial p_i(\tau,t,x)}{\partial t} + a_i(t,x)\frac{\partial p_i(\tau,t,x)}{\partial x} = 0 \tag{1.3.4}$$

$$\frac{\partial \nu_i(\tau,t,x)}{\partial t} + a_i(t,x)\frac{\partial \nu_i(\tau,t,x)}{\partial x} = 0 \tag{1.3.5}$$

с начальными условиями соответственно

$$p_i(t,t,x) = x, \quad \nu_k(t,t,x) = u(t,x). \tag{1.3.6}$$

Получены условия, при которых решение $u(t,x)$ системы нелинейных ИУ (1.3.5) удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (1.1.1).

В работе [36] рассматриваются системы квазилинейных дифференциальных уравнений вида:

$$u_t(t,x) + g(t,x,u(t,x))u_x(t,x) = f(t,x,u(t,x)), \quad (t,x) \in Q_1. \tag{1.3.7}$$

с начальным условием (1.1.12). С помощью МДА задача сводится к системе ИУ, в которой вспомогательные функции определяются из системы уравнений с нулевыми правыми частями с согласованными начальными условиями.

Доказана следующая:

ТЕОРЕМА 1.3.1. Пусть вектор-функции $\varphi(x) \in \overline{C}(R) \cap Lip(L_1)$,

$f(t,x,u) \in C^{(0,1,1)}(R_+ \times R \times R) \cap Lip(L(t)|_x, L(t)|_u)$,

$g(t,x,u) \in C^{(0,1,1)}(R_+ \times R \times R) \cap Lip(L(t)|_x, L(t)|_u)$,

причем $\int\limits_0^\infty L(s)ds(2+L_1) \le \alpha < 1$.

Тогда уравнение (1.3.7) с начальным условием (1.1.12) имеет единственное непрерывное и ограниченное, вместе со своими производными первого порядка по x и по t решение, которое получается по формуле

$$u(t,x) = \varphi(x - \int\limits_0^t g(s, p(s,t,x)\nu(s,t,x))ds) + \int\limits_0^t f(s, p(s,t,x), \nu(s,t,x))ds, \quad (1.3.8)$$

где функции $\nu(\tau,t,x)$ и $p(\tau,t,x)$ определяются из системы

$\nu_t(\tau,t,x) + g(t,x,\nu(t,t,x))\nu_x(t,t,x) = 0, \quad \nu(t,t,x) = u(t,x)$,

$p_t(\tau,t,x) + g(t,x,\nu(t,t,x))p_x(t,t,x) = 0, \quad p(t,t,x) = x$,

и является таким же решением задачи (1.3.7)-(1.1.12).

В [13] рассмотрена система нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$u_t(t,x) + \sum_{k=1}^n u_k(t,x)u_{x_k}(t,x) = f(t,x,u(t,x), \int\limits_{R^n} K(x,\xi)u(t,\xi)d\xi) \quad (1.3.9)$$

с начальным условием (1.1.13), где

$0 \le t \le T_* \le \infty; \quad x = colon(x_1,...,x_n) \in R^n; \quad \xi = colon(\xi_1,...,\xi_n)$, $u(t,x) = colon(u_1,...,u_n)$,

$f = colon(f_1,...,f_n), \quad \varphi = colon(\varphi_1,...,\varphi_n) - n$-мерные вектор-функции;

$K = \{K_{ij}\} - (m \times n)$-мерная матричная функция, $m = const$.

Показано, что задача (1.3.9), (1.1.13) сводится к системе ИУ от трех независимых переменных

$$w(s,t,x)=\varphi\left(x-\int_0^t w(\tau,t,x)d\tau\right)+\int_0^s f\left(\rho,x-\int_\rho^t w(\tau,t,x)d\tau,w(\rho,t,x),\right.$$
$$\left.\int_{R^n} K(x-\int_\rho^t w(\tau,t,z)d\tau,\xi)w(\rho,\rho,\xi)d\xi\right)d\rho, \tag{1.3.10}$$

где $w=colon(w_1,...,w_n)$ - новая неизвестная функция, которая при $s=t$ удовлетворяет задаче (1.3.9), (1.1.13),

$$x-\int_0^t w(\tau,t,x)d\tau=colon\left(x_1-\int_0^t w_1(\tau,t,x)d\tau,...,x_n-\int_0^t w_n(\tau,t,x)d\tau\right).$$

В работе [11] МДА был применен для доказательства существования решений некоторых типов дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Построено единственное решение некоторых нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с частными производными под знаком интеграла в правой полуплоскости при начальном условии на оси и доказаны существование и единственность решения нелинейного уравнения типа Уизема (Whitham). Исследованы нелинейные интегро-дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка с особенностями и со многими пространственными переменными.

1.4. Необходимые сведения из теории категорий

В настоящее время многие разделы математики успешно изучаются в рамках теории категорий, поскольку она рассматривает свойства отношений между математическими объектами, не зависящие от внутренней структуры объектов.

Основным в теории категорий является следующее. Совокупность всех множеств или всех «несамосодержащих» множеств не является множеством - это приводит к противоречиям. Условно говорится, что «она слишком велика». То же относится и к совокупности преобразований множеств и другим совокупностям в различных разделах математики. Поэтому такие совокупности рассматриваются в рамках новой теории.

В Кыргызстане первые результаты по категорной алгебре получил М.Я.Медведев [57], ряд результатов по категорной топологии был получен академиком А.А.Борубаевым, А.А.Чекеевым и их учениками, см. [17].

Новое понятие уравнения и элементы категории уравнений, включающих уравнения, изучаемые в настоящей работе, были введены в работе Л. Аскар кызы [14].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.1. Категория K задаётся

1) Совокупностью объектов *Ob(K)* (A, B, C,...);

2) Совокупностью морфизмов *Mor(K)* (f, g, h, ..), обобщающих понятия функций из одного объекта в другой, с такими же операциями: ассоциативной композицией, наличием тождественного морфизма.

Основными категориями, из которых строятся все остальные, являются следующие:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.2. Категория множеств *Set*. *Ob(Set)* - непустые множества, *Mor(Set)* – функции, отображающие одни множества в другие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.3. Категория *Func* функций (операторов, преобразований, отображений). *Ob(Func) = Mor(Set), Mor(Func)* – преобразования функций. В свою очередь, подкатегории этой категории неформально используются в различных разделах математики.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.4. Категория топологических пространств *Top*. *Ob(Top)* - топологические пространства, *Mor(Top)* - непрерывные отображения.

Понятия из этой категории неформально используются, в том числе, для определения корректности задач, в том числе в категории уравнений, и ее подкатегорий - интегральных уравнений.

Изучение топологических пространств с использованием методов теории категорий известно, как категорная топология.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.5. Категория уравнений *Equa*. *Ob(Equa)* - наборы {непустые множества X, Y, предикат $P(x)$ на X, преобразование $B:X\to Y$}.

Решение уравнения $\{X, Y, P, B\}$ - такое $y\in Y$, что $(\exists x\in X)(P(x)\wedge(y=B(x)))$.

В частности, если B - тождественное отображение, то получается только задача решения уравнения *“$P(x)$”*.

Mor(Equa) - это такие преобразования наборов $\{X, Y, P, B\}$, что решения (или их отсутствие) сохраняются.

Примеры морфизмов из *Mor(Equa)*:

- Преобразование исходного множества. Множество X заменяется на множество X_1 такое, что $\{x \in X: P(x)\} = \{x \in X_1: P(x)\}$.
- Преобразование решения. Вводится биективная функция $\varphi: X \to X$. Задача $\{X, Y, P, B\}$ преобразуется к решению уравнения “$P(\varphi(z)), z \in X$” и вычислению $y = B(\varphi(z))$.
- Преобразование уравнения. Вводится такой предикат P_1, что либо $\{x \in X: P(x)\} = \{x \in X: P_1(x)\}$, либо (более общий, но более сложный метод) $\{x \in X: P(x)\} \subset \{x \in X: P_1(x)\}$. В последнем случае должно быть изменено преобразование B так, чтобы отбрасывать решения из $\{x \in X: P_1(x)\} \setminus \{x \in X: P(x)\}$.

Подкатегории категории *Equa*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.6. Категория уравнений для функций *Equa-Func*. *Ob(Equa-Func)* - наборы $\{ X \in Ob(Func), Y \in Ob(Func)$, предикат $P(x)$ на X, преобразование $B: X \to Y\}$. *Mor(Equa-Func)* - преобразования, в том числе следующие: кроме общих примеров выше:

- Преобразование аргумента. Для функции $x(t)$ вводится биективная замена $t = \psi(s)$, обозначается $z(s) = x(\psi(s))$ из нового пространства функций Z и вводится предикат P_1, такие, что $\{x \in X: P(x)\} = \{z \in Z: P_1(z)\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.7. Категория уравнений с непрерывными обобщенными предикатами *Equa-Top*. *Ob(Equa-Top)* - наборы {топологические пространства X, Y, функция - обобщенный предикат $P(x)$ на X, принимающая конечный набор связанных между собой значений, из них одно выделенное «истина», преобразование $B: X \to Y\}$, при условии, что при непрерывном переходе в X функция $P(x)$ меняет значения только на соседние. *Mor(Equa-*

Top) - ретракты топологического пространства X так, что сохраняется область со значением «истина».

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.8. Категория уравнений с параметрами *Equa-Par*. *Ob(Equa-Par)* - наборы {непустые множества X, F, Y, предикат $P(x,f)$ на $X\times F$, преобразование $B:X\to Y$}.

Решением уравнения $\{X, F, Y, P, B\}$ для любого $f\in F$ называется такое $y(f)\in Y$, что $(\exists x\in X)(P(x,f)\wedge(y=B(x)))$.

В частности, если B - тождественное преобразование, то получается только задача решения уравнения *"P(x,y)"*.

Mor(Equa-Par) - это такие преобразования наборов $\{X, Y, P, B\}$ (кроме F), что решения (или их отсутствие) сохраняются.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.9. Категория корректных уравнений с параметрами *Equa-Par-Top*. *Ob(Equa-Par-Top)* - наборы {топологические пространства X, F, Y, предикат $P(x,f)$ на $X\times F$, непрерывное преобразование $B:X\to Y$}. При этом

1) $(\forall f\in F)(\exists! y\in Y)(\exists x\in X)\ (P(x,f)\wedge(y=B(x))$;

2) y непрерывно зависит от f.

Mor(Equa-Par-Top) - преобразования, сохраняющие свойства 1) и 2).

В частности, если предикат записывается в виде $P(x,f) =$ " $A(x)=f$", где A - некоторый оператор, то получается ранее известная «корректность по Адамару».

Обычно под словом «параметр» понимается «числовой параметр». В данном определении это понятие используется более широко - корректность по различным объектам, всходящим в условие задачи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.10. Подкатегорией всех упомянутых категорий является категория корректных уравнений для функций с параметрами *Equa-Func-Par-Top*.

Например, дано уравнение $\{P(x(t):t,f): x(t) \in X, f \in F; y(t) = B(t;x(s):s) \in Y\}$, X, Y - топологические функциональные пространства, F - топологическое пространство, $B: X \to Y$ - непрерывный оператор,

1) $(\forall f \in F)(\exists! y(t) \in Y)(\exists x(t) \in X)(P(x(t):t,f) \wedge (y(t)=B(t;x(s):s));$

2) $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно зависят от f.

К данной категории уравнений относятся нелинейные дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка, а также ИУ второго рода, рассматриваемые в настоящей работе.

В том числе, Пример 1.1.1 записывается в рамках Определения 1.4.10 следующим образом:

Уравнение состоит из предиката

$$P(w(t,x),J(t,x),\varphi(x):t,x) = \text{"}w_t(t,x) + w(t,x)w_x(t,x) = J(t,x),\ (t,x) \in G_1\text{"} \wedge$$
$$\wedge \text{"}w(0,x) = \varphi(x) \in \overline{C}^1(R), x \in R\text{"} \tag{1.4.1}$$

и (тождественного) преобразования

$$B(w(t,x))=w(t,x). \tag{1.4.2}$$

Оно эквивалентно уравнению, состоящего из предиката

$$P_1(v(q,t,x):q,t,x) = \text{"}v(q,t,x) = \varphi(x - \int_0^t v(s,t,x)ds) +$$
$$+ \int_0^\tau J(s, x - \int_s^t v(q,t,x)dq)ds, (\tau,t,x) \in Q_2(T)\text{"} \tag{1.4.3}$$

и преобразования

$$B_1(v(\tau,t,x))=v(t,t,x). \tag{1.4.4}$$

1.5. Обзор результатов диссертации

В данной работе рассмотрены системы нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. С помощью МДА начальные задачи рассмотренных систем уравнений сводятся к системам ИУ.

Доказательства существования решений таких систем с помощью принципа сжимающих отображений обеспечивают существование решений исходных задач.

В первой главе (раздел 1.1) изложены в усовершенствованном виде основы МДА - основное транзитивное тождество МДА, определения квазикоммутируемости, левого квазиподобного и обобщенно-левого квазиподобного для операторов, не имеющих обратных, основная лемма МДА, основная схема МДА и пример ее работы.

В разделе 1.2.проведен обзор компьютерных реализаций МДА, сделан вывод, что ранее такие реализации были только для скалярных уравнений, но не для систем уравнений.

Обзор известных результатов по уравнениям первого порядка и их систем рассмотрен в разделе 1.3.

В 1.4. изложены необходимые сведения из теории категорий. Впервые МДА представлен на языке теории категорий.

Раздел 1.5 содержит краткое изложение результатов диссертации.

Во второй главе произведено исследование решений систем квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

В 2.1 рассмотрена система дифференциальных уравнений в частных производных вида:

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t} + u_1(t,x)\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x} = f_i(t,x,u_1(t,x),u_2(t,x),...,u_n(t,x)),(t,x)\in Q_1(T) \qquad (2.1.1)$$

при начальном условии (1.1.12).

Доказана следующая

ТЕОРЕМА 2.1.1. Если

$$f_i(t,x,u_1,u_2,...,u_n)\in \overline{C}^{(1)}(Q_1(T)\times R^n), \quad i=1,2,..,n, \qquad (2.1.2)$$

то существует такое $0<T_*\le T$, что задача (2.1.1)-(1.1.12) имеет единственное решение $u(t,x)=(u_1(t,x),u_2(t,x),...,u_n(t,x))$ в пространстве $\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n$.

Рассмотрен конкретный пример.

ПРИМЕР 2.1.1. Рассмотрена следующая система дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} + u_1(t,x)\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial x} = u_2(t,x) - x + 1, \\ \dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} + u_1(t,x)\dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial x} = 1 + t, \end{cases} \qquad (2.1.12)$$

с начальными условиями

$$u_1(0,x) = 1, \quad u_2(0,x) = x, \ x \in R. \qquad (2.1.13)$$

Применен метод последовательных приближений.

Для приближенного решения этой системы была составлена программа с использованием формулы трапеций для вычисления интегралов. Она дала решение, близкое к точному $u_1(t,x) = 1 + t, \quad u_2(t,x) = x, \ x \in R.$

В разделе 2.2 рассматривается система дифференциальных уравнений в частных производных вида:

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t} + a(t,x,u_n(t,x))\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x} = f_i(t,x,u_1(t,x),u_2(t,x),...,u_n(t,x)), \qquad (2.2.1)$$

$(t,x) \in Q_1(T),$

при начальном условии (1.1.12).

Доказана следующая теорема:

ТЕОРЕМА 2.2.1. Пусть для *i=1,2,..,n* $\varphi_i(x) \in Lip(L_i),$ $L_i > 0 - const,$

$f_i(t,x,u_1,u_2,...,u_n) \in \overline{C}^{(1)}(Q_1(T) \times R^n) \cap Lip(M_0^i\big|_x, M_1^i\big|_{u_1},...,M_n^i\big|_{u_n}),\ M_j^i > 0 - const,$

$j = 0,1,2,...,n, \quad a(t,x,u_n) \in \overline{C}^{(1)}(Q_1(T) \times R) \cap Lip(N_0\big|_x, N_1\big|_{u_n}),\ N_0, N_1 > 0 - const.$

Тогда существует такое $0 < T_* \le T,$ что система (2.2.1) с начальными условиями (1.1.12) имеет решение в пространстве $\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n$.

В третьей главе найдены методом дополнительного аргумента в сочетании с методом введения дополнительных неизвестных функций достаточные условия существования решений начальной задачи для некоторых видов систем интегро-дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка со многими пространственными переменными.

В разделе 3.1 рассмотрена система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial u_j(t,x)}{\partial x_j}=f_i(t,x),\ i=1,...,n \tag{3.1.1}$$

с начальными условиями (1.1.13), где $a_{ij}(x), f_i(t,x)$, $i,j=1,...,n$ - заданные функции.

ТЕОРЕМА 3.1.1. Пусть $a_{ij}(x)\in\overline{C}^{(1)}(R^n),\quad i,j=1,...,n,a_{ij}(x)\neq 0$ и имеют место тождества

$$\frac{a_{1i+1}(x)}{a_{11}(x)}=\frac{a_{2i+1}(x)}{a_{21}(x)}=...=\frac{a_{ni+1}(x)}{a_{n1}(x)}=b_{i+1},\quad (i=1,\ldots,n-2), \tag{3.1.2}$$

$f(t,x)\in\overline{C}^{(1)}(Q_1^n(T))$.

Тогда система дифференциальных уравнений (3.1.1) с начальным условием (1.1.13) имеет единственное решение в пространстве $\overline{C}^{(1)}(Q_1^n(T))$.

Применение метода дополнительного аргумента для системы интегро-дифференциальных уравнений с диагональной матрицей производных осуществлено в разделе 3.2.

В разделе 3.3 рассматривается следующая система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}u_{n+1-k}(t,x_1,..,x_n)\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial x_k}=\\=f_i(t,x_1,..,x_n,u_1(t,x_1,..,x_n),u_2(t,x_1,..,x_n),...,u_n(t,x_1,..,x_n)),\end{gathered} \tag{3.3.1}$$

i=1,2,…,n, $(t,x_1,..,x_n)\in Q_1^n(T)$,

с начальными условиями (1.1.13).

Доказана следующая теорема:

ТЕОРЕМА 3.3.1. Пусть для i=1,2,…,n

$$f_i(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)\in\overline{C}^1(Q_1^n(T)\times R^n). \tag{3.3.2}$$

Тогда существует такое $0 \le T^* \le T$, явно определяемое на основе исходных данных, что задача (3.3.1), (1.1.13) имеет единственное решение в $\overline{C}^1(Q_1^n(T))$, которое совпадает при $s=t$ с решением системы ИУ

$$\omega_i(s,t,x_1,...,x_n) = \varphi_i(x_1 - \int_0^t \omega_{n+1}(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu,...,x_n - \int_0^t \omega_1(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu) +$$

$$+\int_0^s f_i(\rho,x_1 - \int_\rho^t \omega_{n+1}(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu,...,x_n - \int_\rho^t \omega_1(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu, \omega_1(\rho,t,x_1,...,x_n),....,\omega_n)d\rho, \tag{3.3.3}$$

Метод дополнительного аргумента для исследования общей системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с различными неизвестными функциями в нелинейной части применен в разделе 3.4.

Рассмотрена система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial t} + \sum_{k=1}^n a_k(t,x_1,...,x_n,u_{n+1-k}(t,x_1,..,x_n)) \frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial x_k} =$$

$$= f_i(t,x_1,..,x_n,u_1(t,x_1,..,x_n),u_2(t,x_1,..,x_n),...,u_n(t,x_1,..,x_n)), \tag{3.4.1}$$

$$i = 1,2,..,n, \quad (t,x_1,..,x_n) \in Q_1^n(T),$$

с начальным условием (1.1.13).

ТЕОРЕМА 3.4.1. Пусть для *i=1,2,..,n* функции

$$a_i(t,x_1,...,x_n,u) \in \overline{C}^1(Q_1^n(T) \times R), \ f_i(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n) \in \overline{C}^1(Q_1^n(T) \times R^n). \tag{3.4.2}$$

Тогда существует такое $0 < T^* \le T$, явно определяемое на основе исходных данных, что задача (3.4.1), (1.1.13) имеет единственное решение в пространстве $\overline{C}^1(Q_1^n(T^*))$.

В четвертой главе получены достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для различных видов систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

В разделе 4.1 рассмотрена система интегро-дифференциальных уравнений, более общая, чем (3.1.1),

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial u_j(t,x)}{\partial x_j}=f_i(t,x)+\int_0^t K(t,s)u_i(s,x)ds, i=1,...,n \qquad (4.1.1)$$

с начальными условиями (1.1.13).

Доказана следующая теорема:

ТЕОРЕМА 4.1.1. Пусть выполняются условия Теоремы 3.1.1 и $K(t,s)\in\overline{C}(G_2(T))$. Тогда система интегро-дифференциальных уравнений (4.1.1) с начальным условием (1.1.13) имеет единственное решение в пространстве $\overline{C}^{(1)}(Q_1^n(T))$.

Применение метода дополнительного аргумента для системы интегро-дифференциальных уравнений с диагональной матрицей производных имеется в разделе 4.2.

Рассмотрена система интегро-дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t}+a_i(x)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_j(t,x)}{\partial x_j}=f_i(t,x)+\int_0^t K(t,s)u_i(s,x)ds, i=1,...,n, \qquad (4.2.1)$$

$(t,x)\in Q_1^n(T)$,

с начальными условиями (1.1.13).

Построение решений системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с вырожденным ядром осуществлено в разделе 4.3.

В данном разделе рассматривается система интегро-дифференциальных уравнений в частных производных вида:

$$\frac{\partial u_j(t,x)}{\partial t}+u_1(t,x)\frac{\partial u_j(t,x)}{\partial x}=\int_0^1\int_0^1\sum_{p=1}^{n}H_{jp}(t)K_{jp}(\tau,\xi)u_p(\tau,\xi)d\tau d\xi, \qquad (4.3.1)$$

$j=1,...,n,(t,x)\in Q_1$.

с начальными условиями

$$u_i(0,x)=x, \quad i=1,2,..,n, \quad x\in R. \qquad (4.3.2)$$

1.6. Заключение по главе 1

В данной главе изложены в усовершенствованном виде основы МДА -

основное транзитивное тождество МДА, определения квазикоммутируемости, левого квазиподобного и обобщенно-левого квазиподобного для операторов, не имеющих обратных, основная лемма МДА, основная схема МДА и пример ее работы.

Проведен обзор компьютерных реализаций МДА, сделан вывод, что ранее такие реализации были только для скалярных уравнений, но не для систем уравнений.

Изложены необходимые сведения из теории категорий. Впервые МДА представлен на языке теории категорий.

Из обзора, произведенного в этой главе, следует, что ранее в работах других авторов рассматривались с помощью МДА некоторые системы дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. Более общие системы нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных не рассматривались. Другими методами такие более общие системы уравнений тоже не рассматривались.

ГЛАВА 2. ИССЛЕДОВАНИЯ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

2.1. Исследование системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с одинаковым нелинейным сомножителем методом дополнительного аргумента

В данном разделе рассматривается система дифференциальных уравнений в частных производных вида:

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t}+u_1(t,x)\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x}=f_i(t,x,u_1(t,x),u_2(t,x),...,u_n(t,x)),(t,x)\in Q_1(T) \qquad (2.1.1)$$

при начальном условии (1.1.12).

ТЕОРЕМА 2.1.1. Если

$$f_i(t,x,u_1,u_2,...,u_n)\in \overline{C}^{(1)}(Q_1(T)\times R^n),\quad i=1,2,..,n, \qquad (2.1.2)$$

то существует такое $0<T_*\le T$, что задача (2.1.1)-(1.1.12) имеет единственное решение в пространстве $\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия теоремы - ограниченности первых производных - следует, что функции φ и f удовлетворяют условию Липшица. Введем соответствующие обозначения: для $i=1,2,..,n$ функции $\varphi_i(x)\in Lip(L_i)$, и $f_i(t,x,u_1,u_2,...,u_n)\in Lip(M_0^i\big|_x, M_1^i\big|_{u_1},...,M_n^i\big|_{u_n})$.

Доказательство теоремы произведем с помощью следующих лемм.

ЛЕММА 2.1.1. В пространстве $\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n$ задача (2.1.1)-(1.1.12) эквивалентна системе ИУ

$$u_i(t,x)=\varphi_i(p(0,t,x))+$$

$$+\int_0^t f_i(\tau,p(\tau,t,x),u_1(\tau,p(\tau,t,x)),u_2(\tau,p(\tau,t,x)),...,u_n(\tau,p(\tau,t,x)))d\tau,$$

(2.1.3)

$$p(s,t,x)=x-\int_s^t u_1(\nu,p(\nu,t,x))d\nu, \qquad (2.1.4)$$

$(s,t,x)\in Q_2(T), \quad i=1,2,...,n.$

Доказательство леммы. Применяя МДА для задачи (2.1.1)-(1.1.12), сводим задачу к системе ИУ (2.1.3)-(2.1.4).

Пусть теперь $u_i(t,x), p(s,t,x), \quad i=1,2,..,n,$ - решение системы ИУ (2.1.3) -(2.1.4).

Тогда функции $u_i(t,x), \quad i=1,2,..,n$ удовлетворяют уравнению (2.1.1) и начальному условию (2.1.2).

В самом деле, из (2.1.3) имеем:

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t}+u_1(t,x)\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x}=\varphi_i'(p(0,t,x))\left[\frac{\partial p(0,t,x)}{\partial t}+u_1(t,x)\frac{\partial p(0,t,x)}{\partial x}\right]+$$
$$+\int_0^t\left[f_{i_x}+f_{i_{\vartheta_1}}u_{1x}+..+f_{i_{\vartheta_n}}u_{nx}\right]\left[\frac{\partial p(\tau,t,x)}{\partial t}+u_1(t,x)\frac{\partial p(\tau,t,x)}{\partial x}\right]d\tau+$$
$$+f_i(t,x,u_1(t,x),u_2(t,x),...,u_n(t,x)).$$

Отсюда в силу соотношения $\frac{\partial p(s,t,x)}{\partial t}+u_1(t,x)\frac{\partial p(s,t,x)}{\partial x}$=0, которое получается из (2.1.4), из последнего получается уравнение (2.1.1).

ЛЕММА 2.1.2. Система ИУ (2.1.3)-(2.1.4) имеет единственное решение.

Доказательство леммы. Преобразуем ИУ (2.1.3), заменяя в нем *t* через *s, x* на $p(s,t,x)$ и используя равенство, доказанное в работе Аширбаевой А.Ж., которое можно назвать «тождеством транзитивности МДА»:

$$p(s,t,p(t,\theta,x))=p(s,\theta,x), \quad (s,t,\theta,x)\in Q_3(T) \ . \qquad (2.1.5)$$

Тогда из (2.1.3), (2.1.4) имеем:

$$\omega_i(s,t,x)=\varphi_i(p(0,t,x))+\int_0^s f_i(\tau,p(\tau,t,x),\omega_1(\tau,t,x),\omega_2(\tau,t,x),...,\omega_n(\tau,t,x))d\tau,$$

(2.1.6)

$$p(s,t,x)=x-\int_s^t \omega_1(\nu,t,x)d\nu,\quad i=1,2,...,n, \qquad (2.1.7)$$

где обозначено

$$\omega_i(s,t,x)=u_i(s,p(s,t,x)),\qquad i=1,2,...,n. \qquad (2.1.8)$$

Подставляя (2.1.7) в (2.1.6), получаем

$$\omega_i(s,t,x)=\varphi_i(x-\int_0^t \omega_1(\nu,t,x)d\nu)+ \qquad (2.1.9)$$

$$+\int_0^s f_i(\tau,x-\int_\tau^t \omega_1(\nu,t,x)d\nu,\omega_1(\tau,t,x),\omega_2(\tau,t,x),...,\omega_n(\tau,t,x))d\tau,\quad i=1,2,...,n..$$

Система ИУ (2.1.9) при t=τ совпадает с системой ИУ (2.1.3). Согласно (2.1.8) имеем $\omega_i(t,t,x)=u_i(t,x),\quad i=1,2,...,n.$

Итак, достаточно доказать существование решение системы ИУ (2.1.9).

Запишем систему ИУ (2.1.9) в виде одного векторного уравнения

$$\theta(s,t,x)=A(s,t,x;\theta), \qquad (2.1.10)$$

в котором $\theta=(\theta_1,\theta_2,...,\theta_n)$ - вектор-функция переменных (s,t,x), компоненты которой есть искомые функции $\theta_1=\omega_1(s,t,x)$, $\theta_2=\omega_2(s,t,x)$, …, $\theta_n=\omega_n(s,t,x)$, а компоненты оператора $A=(A_1,A_2,...,A_n)$ определяются равенствами:

$$A_i(s,t,x;\theta)=\varphi_i(x-\int_0^t \theta_1(\nu,t,x)d\nu)+\int_0^s f_i(\tau,x-$$

$$-\int_\tau^t \theta_1(\nu,t,x)d\nu,\theta_1(\tau,t,x),\theta_2(\tau,t,x),...,\theta_n(\tau,t,x))d\tau,\quad i=1,...,n.$$

Введем в $\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n$ норму

$$\|\theta\|_n=\max\left\{\sup\left\{|\theta_i(t,x)|:(t,x)\in Q_1(T_*)\right\}:i=1,...,n\right\}. \qquad (2.1.11)$$

Обозначим $M = \|\varphi\|_n + T\|f\|_n$.

Покажем, что уравнение (2.1.10) имеет в пространстве $\overline{C}^{(1)}(Q_1(T^*))$ при некотором $T^* < T$ единственное решение, удовлетворяющее неравенству $\|\theta\|_n \leq M$.

Имеем:

$\|A(\theta)\|_n = \max\{\|A_i(\theta)\| : i = 1,...n\} \leq \max\{\|\varphi_i\| + T\|f_i\| : i = 1,...n\} = M$.

Оператор *A* отображает шар $S(0, M)$ в себя.

Теперь возьмем произвольные два элемента $\theta^1, \theta^2 \in S(0, M)$ и оценим норму разности между их образами $A(\theta^1), A(\theta^2)$. Обозначим компоненты элементов θ^1, θ^2 через $\theta_i^1, \theta_i^2, \quad i = 1,...,n.$

Справедливы следующие оценки

$\left|A_i\theta^1 - A_i\theta^2\right| \leq \Omega_i(T)\left\|\theta^1 - \theta^2\right\|,$

где $\Omega_i(T) = (L_i + M_1^i + ... + M_N^i)T + M_0^i \dfrac{T^2}{2}.$

Отсюда следует, что оператор A при $T^* = \min\{\Lambda(\mathrm{T}; \Omega_i(T) : i = 1,...,n\}$ осуществляет сжатое отображение шара $S(0, M)$ на себя. Следовательно, по принципу сжимающих отображений уравнение (2.1.10) имеет одно и только одно решение.

Рассмотрим конкретный пример.

ПРИМЕР 2.1.1. Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} + u_1(t,x)\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial x} = u_2(t,x) - x + 1, \\ \dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} + u_1(t,x)\dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial x} = 1 + t, \end{cases} \tag{2.1.12}$$

с начальными условиями

$$u_1(0,x) = 1, \quad u_2(0,x) = x, \; x \in R. \tag{2.1.13}$$

Система (2.1.9) принимает вид

$$\omega_1(s,t,x)=1+\int_0^s(1-x+\int_\tau^t\omega_1(\nu,t,x)d\nu+\omega_2(\tau,t,x))d\tau,$$

$$\omega_2(s,t,x)=x-\int_0^t\omega_1(\nu,t,x)d\nu+\int_0^s(1+\tau)d\tau=x-\int_0^t\omega_1(\nu,t,x)d\nu+s+s^2/2.$$

Поскольку она не решается в явном виде, применим метод последовательных приближений и приближенные вычисления на компьютере.

Обозначим

$$K(\tau,t,x;\omega(\nu,t,x):\nu)=\int_\tau^t\omega(\nu,t,x)d\nu. \tag{2.1.14}$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned}&\omega_1(s,t,x)=1+\int_0^s(1-x+K(\tau,t,x;\omega_1(\nu,t,x):\nu)+\omega_2(\tau,t,x))d\tau,\\&\omega_2(s,t,x)=x-K(0,t,x;\omega_1(\nu,t,x):\nu)+s+s^2/2.\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

Применен метод последовательных приближений.

Для приближенного решения этой системы была составлена программа с использованием формулы трапеций для вычисления интегралов. Она дала решение, близкое к точному (см. Приложение).

2.2. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с одинаковой нелинейной функцией методом дополнительного аргумента

В данном разделе рассматривается система дифференциальных уравнений в частных производных вида:

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t}+a(t,x,u_n(t,x))\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x}=f_i(t,x,u_1(t,x),u_2(t,x),...,u_n(t,x)), \tag{2.2.1}$$

$(t,x)\in Q_1(T)$,

при начальном условии (1.1.12).

ТЕОРЕМА 2.2.1. Пусть для *i=1,2,..,n,* $\varphi_i(x)\in Lip(L_i)$, $L_i>0-const$,

$f_i(t,x,u_1,u_2,...,u_n)\in \overline{C}^{(1)}(Q_1(T)\times R^n)\cap Lip(M_0^i\big|_x, M_1^i\big|_{u_1},...,M_n^i\big|_{u_n}),\ M_j^i>0-const,$

$j=0,1,2,...,n,\quad a(t,x,u_n)\in \overline{C}^{(1)}(Q_1(T)\times R)\cap Lip(N_0\big|_x, N_1\big|_{u_n}),\ N_0,N_1>0-const.$

Тогда существует такое $0<T_*\le T,$ что система (2.2.1) с начальными условиями (1.1.12) имеет решение в пространстве $\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\overline{C}_x^{(1)}(Q_2(T\ ))$ пространство таких функций $q(s,\tau,x),$из $C^{(1)}(Q_2(T\ ))$, что $q(s,\tau,x)-x\in \overline{C}^{(1)}(Q_2(T\ )).$

Представим основные этапы доказательства теоремы в виде лемм.

ЛЕММА 2.2.1. Задача (2.2.1), (2.1.2) в пространстве $\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))$ эквивалентна системе ИУ

$$u_i(t,x)=\varphi_i(q(0,t,x))+ \tag{2.2.2}$$

$$+\int_0^t f_i(\nu,q(\nu,t,x),u_1(\nu,q(\nu,t,x)),u_2(\nu,q(\nu,t,x)),...,u_n(\nu,q(\nu,t,x)))d\nu,$$

$$q(s,t,x)=x-\int_s^t a(\nu,q(\nu,t,x),u_n(\nu,q(\nu,t,x))d\nu, \tag{2.2.3}$$

$(s,t,x)\in Q_2(T),\quad i=1,2,...,n,$

в пространстве $\overline{C}_x^{(1)}(Q_2(T\ ))\times\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n$.

Доказательство леммы 2.2.1. Применяя МДА для задачи (2.2.1), (1.1.12), сводим задачу к системе ИУ (2.2.2), (2.2.3).

Пусть теперь $u_i(t,x),\ q(s,t,x),\quad i=1,2,..,n$ - решение системы ИУ (2.2.2), (2.2.3).

Тогда $u_i(t,x),\quad i=1,2,..,n,$ удовлетворяют уравнению (2.2.1) и начальному условию (1.1.12).

В самом деле, из (2.2.2), (2.2.3) имеем:

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t}+a(t,x,u_n(t,x))\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x}=\varphi_i'(q(0,t,x))\left[\frac{\partial q(0,t,x)}{\partial t}+a(t,x,u_n(t,x))\frac{\partial q(0,t,x)}{\partial x}\right]+$$
$$+\int_0^t\left[f_{i_x}+f_{i_{\vartheta_1}}u_{1x}+..+f_{i_{\vartheta_n}}u_{nx}\right]\left[\frac{\partial q(\nu,t,x)}{\partial t}+a(t,x,u_n(t,x))\frac{\partial q(\nu,t,x)}{\partial x}\right]d\nu+$$
$$+f_i(t,x,u_1(t,x),u_2(t,x),...,u_n(t,x)), \tag{2.2.4}$$

$$\frac{\partial q(s,t,x)}{\partial t}+a(t,x,u_n(t,x))\frac{\partial q(s,t,x)}{\partial x}=-\int_s^t\left[a_x'(t,x,u_n(t,x))+a_u'(t,x,u_n(t,x))u_{nx}'(t,x)\right]\times$$
$$\times\left[\frac{\partial q(\nu,t,x)}{\partial t}+a(t,x,u_n(t,x))\frac{\partial q(\nu,t,x)}{\partial x}\right]d\nu, \qquad (2.2.5)$$

Для всякой функции $a(t,x,u)\in\overline{C}^{(1)}(Q_1(T)\times R)$ из ИУ (2.2.5) имеем

$$\frac{\partial q(s,t,x)}{\partial t}+a(t,x,u_n(t,x))\frac{\partial q(s,t,x)}{\partial x}=0,\quad q(s,s,x)=x,\quad (s,t,x)\in Q_2(T).$$

Следовательно, из равенства (2.2.4) получается уравнение (2.2.1).

ЛЕММА 2.2.2. Система интегральных уравнений (2.2.2), (2.2.3) имеет единственное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 2.2.2. Преобразуем ИУ (2.2.2).

В системе ИУ (2.2.2), (2.2.3) по аналогии с работой [11] заменяем x на $q(t,\tau,x),\quad \tau\ge t,$ имеем:

$$\vartheta_j(t,q(t,\tau,x))=q(0,t,q(t,\tau,x))+$$
$$+\int_0^t f_i(\nu,q(\nu,t,q(t,\tau,x)),u_1(\nu,q(\nu,t,q(t,\tau,x)),u_2(\nu,q(\nu,t,q(t,\tau,x)),...,u_n(\nu,q(\nu,t,q(t,\tau,x)))d\nu,$$
$$(t,\tau,x)\in Q_2(T), \qquad (2.2.6)$$

$$q(s,t,q(t,\tau,x))=q(t,\tau,x)-\int_s^t a(\nu,q(\nu,t,q(t,\tau,x)),u_n(\nu,q(\nu,t,q(t,\tau,x)))d\nu,$$
$$(s,t,\tau,x)\in Q_3(T). \qquad (2.2.7)$$

Из (2.2.7), учитывая (2.2.6), получаем

$$q(s,t,p(t,\tau,x))-q(s,\tau,x)=-\int_s^t[a(\nu,q(\nu,t,q(t,\tau,x),u_n(\nu,q(\nu,t,q(t,\tau,x)))-$$
$$-a(\nu,q(\nu,\tau,x),u_n(\nu,q(\nu,\tau,x))\big]d\nu,$$
$$(s,t,\tau,x)\in Q_3(T).$$

Отсюда имеем:

$$|q(s,t,q(t,\tau,x))-q(s,\tau,x)|\le$$
$$\le\int_s^t\left(N_0+N_1|\alpha(\nu)|\right)|q(\nu,t,q(t,\tau,x))-q(\nu,\tau,x)|d\nu,\quad (s,t,\tau,x)\in Q_3(T), \qquad (2.2.8)$$

где $\alpha(t)\in\overline{C}(R_+)$ - известная функция, определяемая по исходным данным.

Из интегрального неравенства (2.2.8), в котором переменные t, τ, x играют роль параметров, вытекает «тождество транзитивности», см. (2.1.5):

$$q(s,t,q(t,\tau,x)) = q(s,\tau,x), \quad (s,t,\tau,x) \in Q_3(T). \tag{2.2.9}$$

Тогда из (2.2.2), (2.2.3) имеем:

$$\omega_i(t,\tau,x) = \varphi_i(q(0,\tau,x)) + \int_0^t f_i(\nu, q(\nu,\tau,x), \omega_1(\nu,\tau,x), \omega_2(\nu,\tau,x),\ldots,\omega_n(\nu,\tau,x))d\nu, \tag{2.2.10}$$

$$q(s,\tau,x) = x - \int_s^\tau a(\nu, q(\nu,\tau,x), \omega_n(\nu,\tau,x))d\nu, \quad i = 1,2,\ldots,n, \tag{2.2.11}$$

где обозначено

$$\omega_i(s,\tau,x) = u_i(s, q(s,\tau,x)), \qquad i = 1,2,\ldots,n. \tag{2.2.12}$$

Система ИУ (2.2.10), (2.2.11) при t=τ совпадает с системой ИУ (2.2.2), (2.2.3). Согласно (2.2.12) имеем $\omega_i(t,t,x) = u_i(t,x), \quad i = 1,2,\ldots,n.$

Итак достаточно доказать существование решение системы ИУ (2.2.10), (2.2.11).

Запишем эту систему (2.2.10), (2.2.11) в виде одного векторного уравнения, аналогично тому, как это делали в разделе 2.1.

$$\theta(s,\tau,x) = A(s,\tau,x;\theta), \tag{2.2.13}$$

в котором $\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$- вектор-функция переменных (s,τ,x), компоненты которой есть искомые функции $\theta_0 = q(s,\tau,x)$, $\theta_1 = \omega_1(s,\tau,x)$, $\theta_2 = \omega_2(s,\tau,x)$, …, $\theta_n = \omega_n(s,\tau,x)$, а компоненты оператора $A = (A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n)$ определяются равенствами:

$$A_0(s,t,x;\theta) = x - \int_s^\tau a(\nu, \theta_0(\nu,\tau,x), \theta_n(\nu,\tau,x))d\nu, \tag{2.2.14}$$

$$A_i(s,\tau,x;\theta) = \varphi_i(\theta_0(0,\tau,x)) +$$

$$\int_0^s f_i(\tau, \theta_0(\nu,\tau,x), \theta_1(\nu,\tau,x), \theta_2(\nu,\tau,x),\ldots,\theta_n(\nu,\tau,x))d\nu, \quad i = 1,\ldots,n. \tag{2.2.15}$$

Поскольку пространство $\overline{C}_x^{(1)}(Q_2(T_*)) \times \left(\overline{C}^{(1)}(Q_2(T_*))\right)^n$ не является линейным, введем в нем метрику

$$\rho(\theta^1,\theta^2) = \max\left\{\sup\left\{\left|\theta_i^1(s,\tau,x) - \theta_i^2(s,\tau,x)\right| : (t,x) \in Q_2(T_*)\right\} : i = 0,...,n\right\} \quad (2.2.16)$$

Обозначим $\theta_x = (x,0,...,0) \in \overline{C}_x^{(1)}(Q_2(T_*)) \times \left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n$.

Для заданных функций будем использовать норму (2.1.11).

Обозначим $M = \max\{\|a\|_n T, \max\{\|\varphi_i\|_n + \|f_i\|_n T : i = 1,..,n\}\}$. Имеем:

$$\rho(A(\theta),\theta_x) \le \max\{\|a\|_n T, \max\{\|\varphi_i\|_n + \|f_i\|_n T : i = 1,..,n\}\} = M.$$

Покажем, что система уравнений (2.2.13)-(2.2.14)-(2.2.15) имеет в шаре $S(\theta_x, M)$ пространства $\overline{C}_x^{(1)}(Q_2(T_*)) \times \left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n$ решение при некотором $T_* \le T$.

Справедливы следующие оценки

$$\left|A_0(\theta^1) - A_0(\theta^2)\right| \le (N_0 + N_1)T_* \left\|\theta^1 - \theta^2\right\|_n,$$

$$\left|A(\theta^1) - A_i(\theta^2)\right| \le \Omega_i(T_*)\left\|\theta^1 - \theta^2\right\|_n,$$

где

$$\Omega_i(T) = (L_i + \sum_{k=0}^{n} M_k^i)T.$$

Отсюда следует, что оператор *A* при

$$T_* = \min\{T, 1/(N_0 + N_1); 1/(L_i + \sum_{k=0}^{n} M_k^i) : i = 1,2,...,n\}$$, осуществляет сжатое отображение шара $S(\theta_x, M)$ на себя.

Следовательно, по принципу сжимающих отображений уравнение (2.2.13) имеет одно и только одно решение. Таким образом, задача (2.2.1)-(1.1.12) также имеет единственное решение. Теорема доказана.

2.3. Заключение по Главе 2

В данной главе найдены методом дополнительного аргумента достаточные условия существования решений некоторых типов систем квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка:

- с одинаковым нелинейным сомножителем;
- с одинаковой нелинейной функцией.

Тем самым показано, что метод дополнительного аргумента может применяться к более широким классам систем дифференциальных уравнений с частными производными.

ГЛАВА 3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ СО МНОГИМИ ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

3.1. Решение системы дифференциальных уравнений с пропорциональными коэффициентами методом дополнительного аргумента

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u_j(t,x)}{\partial x_j} = f_i(t,x), \ i = 1,...,n \qquad (3.1.1)$$

с начальными условиями (1.1.13), где $a_{ij}(x), f_i(t,x)$, $i, j = 1,...,n$ - заданные функции.

ТЕОРЕМА 3.1.1. Пусть $a_{ij}(x) \in \overline{C}^{(1)}(R^n), i, j = 1,...,n, a_{ij}(x) \neq 0$ и имеют место тождества

$$\frac{a_{1i+1}(x)}{a_{11}(x)} = \frac{a_{2i+1}(x)}{a_{21}(x)} = ... = \frac{a_{ni+1}(x)}{a_{n1}(x)} = b_{i+1}, \quad (i = 1, \ldots, n-2), \qquad (3.1.2)$$

$f(t,x) \in \overline{C}^{(1)}(Q_1^n(T))$.

Тогда система дифференциальных уравнений (3.1.1) с начальным условием (1.1.13) имеет единственное решение в пространстве $\overline{C}^{(1)}(Q_1^n(T))$.

Обозначим

$$N = \sup\{\left| \frac{\partial a_{11}(x)}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial a_{21}(x)}{\partial x_2} + ... + b_n \frac{\partial a_{n1}(x)}{\partial x_n} \right| : x \in R^n\}. \qquad (3.1.3)$$

Введем обозначения:

$$W(t,x;u) = \frac{\partial u_1(t,x)}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial u_2(t,x)}{\partial x_2} + ... + b_n \frac{\partial u_n(t,x)}{\partial x_n}. \qquad (3.1.4)$$

$$\psi(x) = \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_2} + ... + b_n \frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_n}.$$

Тогда из (3.1.1) имеем

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t} + a_{i1}(x)W(t,x;u) = f_i(t,x), \quad i = 1,...,n. \tag{3.1.5}$$

Дифференцируем первое уравнение (3.1.5) по x_1, второе по x_2,..., n-е по x_n, получаем

$$\frac{\partial^2 u_i(t,x)}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial a_{i1}}{\partial x_i} W(t,x;u) + a_{i1}\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(t,x)}{\partial x_i}, \quad i = 1,...,n. \tag{3.1.6}$$

Отсюда, умножая второе уравнение (3.1.6) на b_2,..., n-е - на b_n и суммируя правые и левые части, получаем

$$\frac{\partial^2 u_1(t,x)}{\partial t \partial x_1} + b_2\frac{\partial^2 u_2(t,x)}{\partial t \partial x_2} + ... + b_n\frac{\partial^2 u_n(t,x)}{\partial t \partial x_n} +$$

$$+\left(\frac{\partial a_{11}(x)}{\partial x_1} + b_2\frac{\partial a_{21}(x)}{\partial x_2} + ... + b_n\frac{\partial a_{n1}(x)}{\partial x_n}\right)W(t,x;u) +$$

$$+a_{11}(x)\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_1} + a_{22}(x)\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_2} + ... + a_{nn}(x)\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_n} =$$

$$= \frac{\partial f_1(t,x)}{\partial x_1} + b_2\frac{\partial f_2(t,x)}{\partial x_2} + ... + b_n\frac{\partial f_n(t,x)}{\partial x_n}. \tag{3.1.7}$$

Введем обозначения:

$$-A(x) = \frac{\partial a_{11}(x)}{\partial x_1} + b_2\frac{\partial a_{21}(x)}{\partial x_2} + ... + b_n\frac{\partial a_{n1}(x)}{\partial x_n},$$

$$G(t,x) = \frac{\partial f_1(t,x)}{\partial x_1} + b_2\frac{\partial f_2(t,x)}{\partial x_2} + ... + b_n\frac{\partial f_n(t,x)}{\partial x_n}.$$

Тогда получаем:

$$\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial t} + a_{11}\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_1} + a_{22}\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_2} + ... + a_{nn}\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_n} =$$
$$= A(x)\cdot W(t,x;u) + G(t,x). \tag{3.1.8}$$

Имеем:

$$W(0,x;u) = \psi(x). \tag{3.1.9}$$

Итак, мы привели систему дифференциальных уравнений (3.1.1) с начальным условием (1.1.13) к дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка (3.1.8) с начальным условием (3.1.9). Видно, что функция W полностью определяется исходными данными задачи и не зависит от функции u.

Применяя МДА для задачи (3.1.8)–(3.1.9), получаем:

$$W(t,x) = F(t,x;W) \equiv \psi(p(0,t,x)) + \int_0^t A(p(v,t,x))W(v,p(v,t,x))dv + \\ + \int_0^t G(v,p(v,t,x))dv, \tag{3.1.10}$$

где $p(s,t,x) = (p_1(s,t,x),...,p_n(s,t,x))$ - решение системы ИУ

$$p_i(s,t,x) = x_i - \int_0^t a_{ii}(p_i(\nu,t,x))d\nu, (s,t,x) \in Q_2{}^n(T), \quad i = 1..n. \tag{3.1.11}$$

Система ИУ (3.1.11) с $a_{ii}(x) \in \overline{C}^{(1)}(R), i = 1,\dots,n$, как система слабо нелинейных уравнений типа Вольтерра имеет единственное решение, и оно удовлетворяет соотношению $p_i(s,s,x) = x_i$.

Из (3.1.11) вытекает соотношение

$$\frac{\partial p_i(s,t,x)}{\partial x_1} + a_{11}(x)\frac{\partial p_i(s,t,x)}{\partial x_2} + ... + a_{nn}(x)\frac{\partial p_i(s,t,x)}{\partial x_n} = 0, (s,t,x) \in Q_2{}^n(T) \tag{3.1.12}$$

Введем в $\overline{C}(Q_1{}^n(T))$ норму

$$\|W(t,x)\|_\lambda = \sup\{|W(t,x)|e^{-\lambda t} : (t,x) \in Q_1{}^n(T)\}, \lambda > 0. \tag{3.1.13}$$

Тогда $|W(t,x)| \le \|W(t,x)\|e^{\lambda t}$.

Имеем:

$$\| F(t,x;W_1) - F(t,x;W_1) \|_\lambda = \| \int_0^t A(p(v,t,x))(W_1(v,p(v,t,x)) - W_2(v,p(v,t,x)))dv \| \le$$

$$\le \left\| \int_0^t N\|W_1 - W_2\|e^{\lambda\nu}dv \right\|_\lambda \le \left\| \frac{1}{\lambda} Ne^{\lambda t} \right\|_\lambda = \frac{1}{\lambda}N.$$

Отсюда следует, что при λ*=2N+1* оператор F является сжимающим.

Таким образом, ИУ (3.1.10) имеет единственное решение $W(t,x)$.

Подставляя его в уравнение (3.1.4) и интегрируя обе части уравнения по t, получаем равенство для определения искомой вектор-функции $u(t,x)=(u_1(t,x),...u_n(t,x))$.

$$u_i(t,x)=\varphi_i(x)-\int\limits_0^t a_{i1}(s)W(s,x)ds+\int\limits_0^t f_i(s,x)ds, \quad i=1,...,n. \qquad (3.1.14)$$

Отсюда следует существование и единственность решения задачи (3.1.1)-(1.1.13). Теорема доказана.

3.2. Применение метода дополнительного аргумента для системы интегро-дифференциальных уравнений с диагональной матрицей производных

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t}+a_i(x)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_j(t,x)}{\partial x_j}=f_i(t,x),\ i=1,...,n, \qquad (3.2.1)$$

$$(t,x)\in Q_1^n(T),$$

с начальными условиями (1.1.13), где $a_i(x), f_i(t,x),\ i=1,...,n,$- заданные функции.

ТЕОРЕМА 3.2.1. Пусть $a_i(x)\in \overline{C}^{(1)}(R^n), \quad i=1,...,n,$

$$f_i(t,x)\in \overline{C}^{(1)}(Q_1^n(T)).$$

Тогда система дифференциальных уравнений (3.2.1)-(1.1.13) имеет единственное решение в пространстве $\overline{C}^{(1)}(Q_1^n(T))$.

Обозначим

$$N=\sup\{\left|\ \frac{\partial a_1(x)}{\partial x_1}+\frac{\partial a_2(x)}{\partial x_2}+...+\frac{\partial a_{n1}(x)}{\partial x_n}\ \right|: x\in R^n\}. \qquad (3.2.2)$$

Введем обозначения:

$$W(t,x;u)=\frac{\partial u_1(t,x)}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2(t,x)}{\partial x_2}+...+\frac{\partial u_n(t,x)}{\partial x_n}, \qquad (3.2.3)$$

$$\psi(x)=\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x_2}+...+\frac{\partial\varphi_n(x)}{\partial x_n}.$$

Тогда из (3.2.1) имеем

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t}+a_i(x)W(t,x;u)=f_i(t,x),\quad i=1,...,n. \qquad (3.2.4)$$

Дифференцируем первое уравнение (3.2.4) по x_1, второе - по $x_2,...,n$-е по x_n, получаем

$$\frac{\partial^2 u_i(t,x)}{\partial t\partial x_i}+\frac{\partial a_i(x)}{\partial x_i}W(t,x;u)+a_i(x)\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_i}=\frac{\partial f_i(t,x)}{\partial x_i},\quad i=1,...,n \qquad (3.2.5)$$

Отсюда, суммируя правые и левые части, получаем

$$\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial t}+a_1(x)\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_1}+a_2(x)\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_2}+...+a_n(x)\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_n}=$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i(x)}{\partial x_i}W(t,x;u)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i(t,x)}{\partial x_i}.$$

Введем обозначения:

$$-A(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i(x)}{\partial x_i},G(t,x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i(t,x)}{\partial x_i}. \qquad (3.2.6)$$

Тогда получаем:

$$\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial t}+a_1(x)\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_1}+a_2(x)\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_2}+...+a_n(x)\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_n}=$$

$$=A(x)\cdot W(t,x;u)+G(t,x). \qquad (3.2.7)$$

Имеем:

$$W(0,x;u)=\psi(x). \qquad (3.2.8)$$

Итак, мы привели систему дифференциальных уравнений (3.2.1) с начальным условием (1.1.13) к дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка (3.2.7) с начальным условием (3.2.8). Видно, что функция W полностью определяется исходными данными задачи и не зависит от функции u.

Применяя МДА для задачи (3.2.7)–(3.2.8), получаем:

$$W(t,x;u) = \psi(p(0,t,x)) + \int_0^t A(\nu, p(\nu,t,x))W(\nu, p(\nu,t,x)))d\nu +$$
$$+\int_o^t G(\nu, p(\nu,t,x))d\nu, \tag{3.2.9}$$

где $p(s,t,x) = (p_1(s,t,x),..., p_n(s,t,x))$ - решение системы ИУ

$$p_i(s,t,x) = x_i - \int_0^t a_i(p_i(\nu,t,x))d\nu, (s,t,x) \in Q_2{}^n(T), \quad i = 1..n. \tag{3.2.10}$$

Система ИУ (3.2.10) с $a_i(x) \in \overline{C}^{(1)}(R), i = 1..n$ как система слабо нелинейных уравнений типа Вольтерра имеет единственное решение, и оно удовлетворяет соотношению $p_i(s,s,x) = x_i$.

Из (3.2.10) вытекает соотношение

$$\frac{\partial p_i(s,t,x)}{\partial x_1} + a_1(x)\frac{\partial p_i(s,t,x)}{\partial x_2} + ... + a_n(x)\frac{\partial p_i(s,t,x)}{\partial x_n} = 0, \ (s,t,x) \in Q_2{}^n(T). \tag{3.2.11}$$

ИУ (3.2.9) совпадает по записи с ИУ (3.1.10) и так же имеет единственное решение $W(t,x)$.

Подставляя $W(t,x)$ в уравнение (3.2.3) и интегрируя обе части уравнения по *t*, получаем равенства для определения искомой вектор-функции $u(t,x) = (u_1(t,x),...,u_n(t,x))$.

$$u_i(t,x) = \varphi_i(x) - \int_0^t a_i(x)W(s,x)ds + \int_0^t f_i(s,x)ds, \quad i = 1,...,n. \tag{3.2.12}$$

Отсюда следует существование и единственность решения задачи (3.2.1)-(1.1.13). Теорема доказана.

3.3. Исследование системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с различными неизвестными функциями в нелинейной части

В данном разделе рассматривается следующая система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}u_{n+1-k}(t,x_1,..,x_n)\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial x_k}= \tag{3.3.1}$$
$$=f_i(t,x_1,..,x_n,u_1(t,x_1,..,x_n),u_2(t,x_1,..,x_n),...,u_n(t,x_1,..,x_n)),$$

i=1,2,…,n, $(t,x_1,..,x_n)\in Q_1^{\,n}(T)$,

с начальными условиями (1.1.13).

ТЕОРЕМА 3.3.1. Пусть для i=1,2,…,n

$$f_i(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)\in \overline{C}^1(Q_1^{\,n}(T)). \tag{3.3.2}$$

Тогда существует такое $0\le T^*\le T$, явно определяемое на основе исходных данных, что задача (3.3.1), (1.1.13) имеет единственное решение в $\overline{C}^1(Q_1^{\,n}(T))$, которое совпадает при s=t с решением системы ИУ

$$\omega_i(s,t,x_1,...,x_n)=\varphi_i(x_1-\int_0^t\omega_{n+1}(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu,...,x_n-\int_0^t\omega_1(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu)+$$
$$+\int_0^s f_i(\rho,x_1-\int_\rho^t\omega_{n+1}(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu,...,x_n-\int_\rho^t\omega_1(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu,\omega_1(\rho,t,x_1,...,x_n),....,\omega_n)d\rho,$$
(3.3.3)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим основные этапы доказательства теоремы в виде лемм. Из условия теоремы следует, что существуют константы $\varphi_i(x_1,...,x_n)\in Lip(L_{ij}\big|_{x_j}),\ L_{ij}>0-const,\ i,j=1,2,...,n.$

$$f_i(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)\in Lip(M_{ij}\big|_{x_j},N_{ij}\big|_{u_j}),\ M_{ij}>0-const,\ N_{ij}>0-const,$$

i,j=1,2,…,n.

ЛЕММА 3.3.1. В пространстве $\overline{C}^1(Q_1^{\,n}(T))$ задача (3.3.1), (1.1.13) с функциями $p_i(s,t,x_1,...,x_n)$ - определяемыми из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial p_i(s,t,x_1,...,x_n)}{\partial s}=u_{n+1-i}(s,p_1(s,t,x_1,...,x_n),...,p_n(s,t,x_1,...,x_n)),$$
$$p_i(t,t,x_1,...,x_n)=x_i,\quad 0\le s\le t,\quad i=1,2,...,n, \tag{3.3.4}$$

эквивалентна системе ИУ

$$u_i(t,x_1,...,x_n)=\varphi_i(p_1(0,t,x_1,...,x_n),...,p_n(0,t,x_1,...,x_n))+$$
$$+\int_0^t f_i(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),...,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n),u_1(\nu,p_1,...,p_n),....,u_n(\nu,p_1,...,p_n))d\nu, \tag{3.3.5}$$

$$p_i(s,t,x_1,...,x_n)=x_i-\int_s^t u_{n+1-i}(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),...,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n))d\nu. \qquad (3.3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 3.3.1. Из (3.3.4) следует (3.3.6) и следующие равенства

$$\frac{\partial u_i(s,p_1(s,t,x_1,...,x_n),...,p_n(s,t,x_1,...,x_n))}{\partial s}=\frac{\partial u_i(s,p_1(s,t,x_1,...,x_n),...,p_n(s,t,x_1,...,x_n))}{\partial t}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}u_{n+1-k}(s,p_1(s,t,x_1,...,x_n),...,p_n(s,t,x_1,...,x_n))\frac{\partial u_i(s,p_1(s,t,x_1,...,x_n),...,p_n(s,t,x_1,...,x_n))}{\partial x_k},$$

i=1,2,…,n.

На основании последнего соотношения из (3.3.1) имеем

$$u_i(s,p_1(s,t,x_1,...,x_n),...,p_n)=\varphi_i(x_1-\int_0^t u_{n+1}(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),..,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n))d\nu,...,x_n-$$

$$-\int_0^t u_1(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),..,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu)+$$

$$+\int_0^s f_i(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),...,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n),u_1(\nu,p_1,..,p_n),...,u_n(\nu,p_1,..,p_n)d\nu, \quad (3.3.7)$$

которое при s=t совпадает с (3.3.5).

С другой стороны, из (3.3.5) для $p_i(s,t,x_1,…,x_n)$ следует

$$\frac{\partial p_i(s,t,x_1,...,x_n))}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}u_{n+1-k}(t,x_1,...,x_n)\frac{\partial p_i(s,t,x_1,...,x_n)}{\partial x_k}=0, \qquad (3.3.8)$$

$$p_i(t,t,x_1,...,x_n)=x_i,\ i=1,2,..,n.$$

Определяя из (3.3.5) частные производные по t и x_k, k=1,…,n с учетом (3.3.8), получаем (3.3.1).

ЛЕММА 3.3.2. Пусть для $i=1,...,n,$ функции $\omega_i(s,t,x_1,...,x_n)=$ $=u_i(s,p_1(s,t,x_1,...,x_n),...,p_n(s,t,x_1,...,x_n))$, где $u_i(t,x_1,...,x_n)$ являются решениями задачи (3.3.1), (1.1.13), а $p_i(s,t,x_1,...,x_n)$- решениями задачи (3.3.4) и они удовлетворяют системе ИУ (3.3.3), и наоборот, если функции $\omega_i(s,t,x_1,...,x_n)$, являющиеся решениями системы ИУ (3.3.3), непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам, то в пределах некоторого интервала изменения переменной t, определяемого на основе исходных данных, $\omega_i(s,t,x_1,...,x_n)$

при $s=t$, будет удовлетворять системе дифференциальных уравнений в частных производных (3.3.1) и начальному условию (1.1.13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 3.3.2. Пусть функции $u_i(t,x_1,...,x_n)$, $p_i(s,t,x_1,...,x_n), \quad i=1,2,...,n$ являются решениями задач (3.3.1), (1.1.13) и (3.3.4). В силу Леммы 3.3.1 они удовлетворяют равенствам (3.3.7) и (3.3.6). Подставив $p_i(s,t,x_1,...,x_n), \quad i=1,2,...,n$ из (3.3.6) в (3.3.7), получим систему интегральных уравнений

$$u_i(s,p_1(s,t,x_1,...,x_n),...,p_n)=\varphi_i(x_1-\int_0^t u_{n+1}(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),..,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n))d\nu,...,x_n-$$

$$+\int_0^s f_i(\rho,x_1-\int_\rho^t u_{n+1}(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),..,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n))d\nu,...,x_n-$$

$$-\int_\rho^t u_1(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),..,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu,u_1(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),..,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n),...u_n)d\nu \quad (3.3.9)$$

Обозначив $\omega_i(s,t,x_1,...,x_n)=u_i(s,p_1(s,t,x_1,...,x_n),...,p_n(s,t,x_1,...,x_n))$, приходим к (3.3.3).

Напротив, пусть непрерывно дифференцируемые функции $\omega_i(s,t,x_1,...,x_n), \quad i=1,2,...,n$ обращают систему ИУ (3.3.3) в тождество.

Обозначим

$$W_i(s,t,x_1,...,x_n)=\frac{\partial\omega_i(s,t,x_1,...,x_n))}{\partial t}+\sum_{k=1}^n\omega_{n+1-k}(t,x_1,...,x_n)\frac{\partial\omega_i(s,t,x_1,...,x_n)}{\partial x_k}, \quad i=1,2,...,n.$$

Непосредственным дифференцированием из (3.3.3) выводится тождество

$$W_i(s,t,x_1,...,x_n)=-\sum_{r=1}^n\varphi_{x_r}(x)\int_0^t W_r(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu-$$

$$-\int_0^s\sum_{r=1}^n f_{x_r}(t,x)\int_\rho^t W_r(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu d\rho+\int_0^s\sum_{r=1}^n f_{x_r}(t,x)W_r(\rho,t,x_1,...,x_n)d\rho.$$

На основании этого тождества определяется интервал изменения аргумента t, в котором $W=0$. Кроме этого, из (3.3.3) вытекает, что $\frac{\partial\omega_i}{\partial s}=f_i$. С учетом отмеченных фактов, подставляя $\omega_i(t,t,x_1,...,x_n)=u_i(t,x_1,...,x_n), \quad i=1,2,..,n$ в (3.3.1) и (3.3.2), убеждаемся, что на всем интервале изменения t, на котором

$W=0$, $\omega_i(t,t,x_1,...,x_n)$, $i=1,2,..,n$ удовлетворяют начальной задаче (3.3.1), (1.1.13).

ЛЕММА 3.3.3. Существует такое $T^*>0$, что система ИУ (3.3.3) имеет единственное решение в $\overline{C}^1([0,T]\times[0,T]\times R^{2n})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 3.3.3. Записываем систему ИУ (3.3.3) в виде одного (векторного) уравнения

$$\theta(s,t,x_1,x_2,...,x_n)=A(s,t,x_1,x_2,...,x_n;\theta), \qquad (3.3.10)$$

где $\theta=(\theta_1,\theta_2,...,\theta_n)$ - вектор-функция от переменных $(s,t,x_1,x_2,...,x_n)$, с компонентами - искомыми функциями $\theta_1=\omega_1(s,t,x_1,x_2,...,x_n)$, $\theta_2=\omega_2(s,t,x_1,x_2,...,x_n)$, …, $\theta_n=\omega_n(s,t,x_1,x_2,...,x_n)$, а компоненты оператора $A=(A_1,A_2,...,A_n)$ определены равенствами:

$$A_i\theta=\varphi_i(x_1-\int_0^t\theta_{n+1}(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu,...,x_n-\int_0^t\theta_1(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu)+$$

$$+\int_0^s f_i(\rho,x_1-\int_\rho^t\theta_{n+1}(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu,...,x_n-\int_\rho^t\theta_1(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu,\theta_1(\rho,t,x_1,...,x_n),\theta_2,...,\theta_n)d\rho,$$

$i=1,2,\ldots,n$.

Имеем при $t\le T^*\le T$

$$\left|A_i\theta\right|\le\left\|\varphi_i\right\|_{R^n}+\left\|f_i\right\|_{\Omega_{n1}{}^n(T)}t\le\Omega_0(T^*),$$

где $\Omega_0(S)\equiv\left\|\varphi_i\right\|_{R^n}+\left\|f_i\right\|_{G_{n+1}(T)}S$.

Далее, при $s\le t\le T^*\le T$:

$$\left|A_i\theta^1-A_i\theta^2\right|\le\Omega_i(T^*)\left\|\theta^1-\theta^2\right\|,$$

где $\Omega_i(S)=S\sum_{j=1}^n(L_{ij}+M_{ij}S+N_{ij}S^2)$.

Следовательно, при $T^*=min\{\Lambda(T,\ \Omega_i(S):S)\}:i=1,...,n\}$ оператор A будет сжимающим и уравнение (3.3.10), а, следовательно и уравнение (3.3.3), имеет решение. Лемма доказана.

Доказательство теоремы проведено.

3.4. Метод дополнительного аргумента для исследования общей системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с различными неизвестными функциями в нелинейной части

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}a_k(t,x_1,...,x_n,u_{n+1-k}(t,x_1,..,x_n))\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial x_k}=$$
$$=f_i(t,x_1,..,x_n,u_1(t,x_1,..,x_n),u_2(t,x_1,..,x_n),...,u_n(t,x_1,..,x_n)), \qquad (3.4.1)$$

$i=1,2,..,n, \quad (t,x_1,..,x_n)\in Q_1^{\,n}(T),$

с начальным условием (1.1.13).

ТЕОРЕМА 3.4.1. Пусть для *i=1,2,..,n* функции

$$a_i(t,x_1,...,x_n,u)\in \overline{C}^1(Q_1^{\,n}(T)\times R),\ f_i(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)\in \overline{C}^1(Q_1^{\,n}(T)\times R^n). \qquad (3.4.2)$$

Тогда существует такое $0<T^*\le T$, явно определяемое на основе исходных данных, что задача (3.4.1), (1.1.13) имеет единственное решение в пространстве $\overline{C}^1(Q_1^{\,n}(T^*))$.

Доказательство теоремы представим в виде серии лемм.

Дополнительно к обозначениям предыдущего раздела, из условия теоремы следует, что существуют константы

$$a_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u_1)\in Lip(L_1^i\big|_{x_1},L_2^i\big|_{x_2},...,L_n^i\big|_{x_n},K^i\big|_{u_{n+1-i}})$$

ЛЕММА 3.4.1. В классе $\overline{C}^1(Q_1^{\,n}(T^*))$ задача (3.4.1), (3.4.2)-(1.1.13) с функциями $p_i(s,t,x_1,...,x_n)$ - определяемыми из системы уравнений с условиями

$$\frac{\partial p_i(s,t,x_1,...,x_n)}{\partial s}=a_i(s,p_1(s,t,x_1,...,x_n),...,p_n(s,t,x_1,...,x_n),u_{n+1-i}(s,p_1,..,p_n)),$$
$$p_i(t,t,x_1,...,x_n)=x_i, \qquad i=1,2,...,n,$$

(3.4.3)

$(s,t,x_1,...,x_n)\in Q_2^{\,n}(T);$

эквивалентна системе ИУ

$$p_i(s,t,x_1,...,x_n) = x_i - \int\limits_s^t a_i(\nu, p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),..., p_n(\nu,t,x_1,...,x_n), u_{n+1-i}(\nu, p_1,..., p_n))d\nu,$$
$$i = 1,2,...,n. \qquad (3.4.4)$$

$$u_i(t,x_1,...,x_n) = \varphi_i(p_1(0,t,x_1,...,x_n),..., p_n(0,t,x_1,...,x_n)) +$$
$$+\int\limits_0^t f_i(\nu, p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),..., p_n(\nu,t,x_1,...,x_n), u_1(\nu, p_1,..., p_n),...., u_n(\nu, p_1,..., p_n))d\nu, \qquad (3.4.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 3.4.1. Из (3.4.3) следует (3.4.4) и следующие равенства

$$\frac{\partial u_i(s, p_1(s,t,x_1,...,x_n),..., p_n(s,t,x_1,...,x_n))}{\partial s} = \frac{\partial u_i(s, p_1(s,t,x_1,...,x_n),..., p_n(s,t,x_1,...,x_n))}{\partial t} +$$
$$+\sum_{k=1}^n a_i(s, p_1(s,t,x_1,...,x_n),..., p_n(s,t,x_1,...,x_n), u_{n+1-k}(s, p_1(s,t,x_1,...,x_n),..., p_n(s,t,x_1,...,x_n))\times$$
$$\times\frac{\partial u_i(s, p_1(s,t,x_1,...,x_n),..., p_n(s,t,x_1,...,x_n))}{\partial x_k}, \quad i = 1,2,..,n.$$

На основании последнего соотношения из (3.4.1) имеем

$$u_i(s, p_1(s,t,x_1,...,x_n),..., p_n) = \varphi_i(x_1 - \int\limits_0^t a_1(\nu, p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),.., p_n, u_{n+1}(\nu, p_1,.., p_n))d\nu,..., x_n -$$
$$-\int\limits_0^t a_n(\nu, p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),.., p_n(\nu,t,x_1,...,x_n), u_1(\nu, p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),.., p_n(\nu,t,x_1,...,x_n))d\nu + \qquad (3.4.6)$$
$$+\int\limits_0^s f_i(\nu, p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),..., p_n(\nu,t,x_1,...,x_n), u_1(\nu, p_1,.., p_n),..., u_n(\nu, p_1,.., p_n)d\nu, i = 1,...,n,$$

которое при $s = t$ совпадает с (3.4.5).

С другой стороны, из (3.4.5) для $p_i(s,t,x_1,...,x_n), \quad i = 1,2,..,n$ следует

$$\frac{\partial p_i(s,t,x_1,...,x_n))}{\partial t} + \sum_{k=1}^n a_i(t,x_1,...,x_n, u_{n+1-k}(t,x_1,...,x_n))\frac{\partial p_i(s,t,x_1,...,x_n)}{\partial x_k} = 0, \qquad (3.4.7)$$
$$p_i(t,t,x_1,...,x_n) = x_i, \qquad i = 1,2,..,n.$$

Определяя из (3.4.5) частные производные по t и по x_k, $k=1,...,n$, с учетом (3.4.7) получаем (3.4.1).

Введя обозначения

$$\omega_i(s,t,x_1,...,x_n) = u_i(s, p_1(s,t,x_1,...,x_n),..., p_n(s,t,x_1,...,x_n)), i = 1,2,..,n. \qquad (3.4.8)$$

из (3.4.5) и (3.4.6) получаем следующую систему ИУ:

$$p_i(s,t,x_1,...,x_n) = x_i - \int_s^t a_i(\nu, p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),..., p_n, \omega_{n+1-i}(\nu, p_1,..., p_n))d\nu,$$

$$i = 1,2,..,\tag{3.4.9}$$

$$\omega_i(s,t,x_1,...,x_n) = \varphi_i(p_1(0,t,x_1,...,x_n),..., p_n(0,t,x_1,...,x_n)) +$$

$$+\int_0^s f_i(\rho, p_1(\rho,t,x_1,...,x_n),..., p_n(\rho,t,x_1,...,x_n), \omega_1(\rho,t,x_1,...,x_n),....,\omega_n(\rho,t,x_1,...,x_n)d\rho,\tag{3.4.10}$$

ЛЕММА 3.4.2. Пусть для *i=1,…,n* функции $\omega_i(s,t,x_1,...,x_n) = = u_i(s, p_1(s,t,x_1,...,x_n),..., p_n(s,t,x_1,...,x_n))$, где $u_i(t,x_1,...,x_n)$ являются решениями задачи (3.4.1), (1.1.13), а $p_i(s,t,x_1,...,x_n)$ - решениями задачи (3.4.3), удовлетворяют системе ИУ (3.4.9), (3.4.10) и наоборот, если функции $\omega_i(s,t,x_1,...,x_n))$, $p_i(s,t,x_1,...,x_n)$ являющиеся решениями системы ИУ (3.4.9), (3.4.10) непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам, то в пределах некоторого интервала изменения переменной *t*, определяемого на основе исходных данных, $\omega_i(s,t,x_1,...,x_n)$ при *s=t* , будет удовлетворять системе уравнений (3.4.1) и начальному условию (1.1.13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 3.4.2. Пусть функции $u_i(t,x_1,...,x_n)$, $p_i(s,t,x_1,...,x_n)$, $i = 1,2,...,n$ являются решениями задач (3.4.1), (1.1.13) и (3.4.3). В силу Леммы 3.4.1 они удовлетворяют равенствам (3.4.5) и (3.4.6). Используя обозначения (3.4.7), приходим к системе ИУ (3.4.9), (3.4.10).

Напротив, пусть непрерывно дифференцируемые функции $\omega_i(s,t,x_1,...,x_n))$, $p_i(s,t,x_1,...,x_n)$, $i = 1,2,...,n$ обращают систему ИУ (3.4.9), (3.4.10) в тождество.

Обозначим

$$W_i(s,t,x_1,...,x_n) = \frac{\partial\omega_i(s,t,x_1,...,x_n))}{\partial t} + \sum_{k=1}^n a_i(t,x_1,...,x_n\omega_{n+1-k}(t,x_1,...,x_n))\frac{\partial\omega_i(s,t,x_1,...,x_n)}{\partial x_k},$$

$i = 1,2,..,n.$

Непосредственным дифференцированием из (3.4.9), имеем $W_i=0$.

Кроме этого, из (3.4.10) вытекает, что $\frac{\partial \omega_i}{\partial s} = f_i$. С учетом отмеченных фактов, подставляя $\omega_i(t,t,x_1,...,x_n) = u_i(t,x_1,...,x_n), \quad i = 1,2,..,n$ в (3.4.1) и (1.1.13), убеждаемся, что на всем интервале изменения t, на котором *W=0,* $\omega_i(t,t,x_1,...,x_n), \quad i = 1,2,..,n$ удовлетворяют начальной задаче (3.4.1), (1.1.13).

Обозначим через $\overline{C}_x^{(1)}(Q_2{}^n(T))$ пространство таких вектор-функций $q(s,\tau,x),$ из $C^{(1)}(Q_2{}^n(T) \to R^n)$, что $q(s,t,x) - x \in \overline{C}^{(1)}(Q_2{}^n(T) \to R^n).$

Поскольку пространство $\overline{C}_x^{(1)}(Q_2{}^n(T_*)) \times \left(\overline{C}^{(1)}(Q_2(T_*))\right)^n$ не является линейным, введем в нем метрику

$$\rho(\theta^1,\theta^2) = \max\left\{\sup\left\{\left|\theta_k{}^{i1}(s,\tau,x) - \theta_k{}^{i2}(s,\tau,x)\right| : (t,x) \in Q_2{}^n(T_*))\right\} : i = 0,...,n, k = 0,1\right\}. \quad (3.4.11)$$

Обозначим

$$\theta_x = (x,0,...,0) \in \overline{C}_x^{(1)}(Q_2{}^n(T_*)) \times \left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n. \quad (3.4.12)$$

ЛЕММА 3.4.3. Существует такое $T_* > 0$, что система ИУ (3.4.9), (3.4.10) имеет единственное решение, принадлежащее $\overline{C}_x^{(1)}(Q_2{}^n(T_*)) \times \left(\overline{C}^{(1)}(Q_2(T_*))\right)^n.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 3.4.3. Запишем систему ИУ (3.4.9), (3.4.10) в виде одного векторного уравнения

$$\theta(s,t,x_1,x_2,...,x_n) = A(s,t,x_1,x_2,...,x_n;\theta), \quad (3.4.13)$$

в котором $\theta = (\theta_0^1,\theta_0^2,...,\theta_0^n,\theta_1^1,\theta_1^2,...,\theta_1^n)$ - вектор-функция переменных $(s,t,x_1,x_2,...,x_n)$, компоненты которой есть искомые функции $\theta_0^i = p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n)$, $\theta_1^i = \omega_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n), \quad i = 1,2,...,n,$ а компоненты оператора $A = (A_0^1, A_0^2,...,A_0^n, A_1^1, A_1^2,...,A_1^n)$ определяются равенствами:

$$A_0^i\theta = x_i - \int_s^t a_i(\nu,\theta_0^1(\nu,t,x_1,...,x_n),...,\theta_0^n(\nu,t,x_1,...,x_n),\theta_1^{n+1-i}(\nu,t,x_1,...,x_n))d\nu,$$

$i = 1,2,...,n.$

$$A_1^i\theta = \varphi_i(\theta_0^1(0,t,x_1,...,x_n),...,\theta_0^n(0,t,x_1,...,x_n)) +$$
$$+\int_0^s f_i(\rho,\theta_0^1(\rho,t,x_1,...,x_n),...,\theta_0^n(\rho,t,x_1,...,x_n),\theta_1^1(\rho,t,x_1,...,x_n),....,\theta_1^n(\rho,t,x_1,...,x_n)d\rho,$$

Обозначим $M = \max\{\max\{\|a_i\|_{Q_{n+2}(T)}T, \|\varphi_i\|_{R^n} + \|f_i\|_{Q_{n+2}(T)}T\} : i = 1,...n\}$.

Покажем, что уравнение (3.4.13) при достаточно малом $T^* < T$ имеет в шаре $S : \rho(\theta_x,\theta) \le M$ области (3.4.11) единственное решение.

Имеем при $t \le T^* \le T$:

$$\|A_0^i\theta - x_i\| \le \|a_i\|_{Q_{n+2}(T)}T; \|A_1^i\theta\| \le \|\varphi_i\| + \|f_i\|_{Q_{n+2}(T)}T, i = 1,...,n,$$

то есть оператор A отображает шар S в себя.

Далее,

$$\left|A_0^i\theta^1 - A_0^i\theta^2\right| \le \Omega_{0i}(T)\rho(\theta^1,\theta^2), \qquad \left|A_1^{\,i}\theta^1 - A_1^{\,i}\theta^2\right| \le \Omega_{i1}(T)\rho(\theta^1,\theta^2),$$

где $\Omega_{0i}(S) = (\sum_{k=1}^{n} L_k^i)S;\quad \Omega_{1i}(S) = \sum_{k=1}^{n} L_k S + \sum_{k=1}^{n}(M_k^i + N_k^i)S, i = 1,...,n.$

Отсюда следует, что оператор A при

$$T^* = \min\{\Lambda(T;\Omega_{1i}(S):S) : j = 0,1; i = 1,...,n\}$$

осуществляет сжатое отображение шара S на себя.

Следовательно, по принципу сжимающих отображений уравнение (3.4.13) имеет одно и только одно решение. Лемма 3.4.1 доказана.

Доказанные леммы составляют доказательство теоремы.

3.5. Заключение по Главе 3

В данной главе найдены методом дополнительного аргумента в сочетании с методом введения дополнительных неизвестных функций достаточные условия существования решений начальной задачи для некоторых видов систем интегро-дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка со многими пространственными переменными.

ГЛАВА 4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

4.1. Решение системы интегро-дифференциальных уравнений с пропорциональными коэффициентами методом дополнительного аргумента

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений, более общую, чем (3.1.1),

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u_j(t,x)}{\partial x_j} = f_i(t,x) + \int_0^t K(t,s)u_i(s,x)ds, i = 1,...,n \tag{4.1.1}$$

с начальными условиями (1.1.13).

Будем использовать обозначения раздела 3.1.

ТЕОРЕМА 4.1.1. Пусть выполняются условия Теоремы 3.1.1 и $K(t,s) \in \overline{C}(G_2(T))$. Тогда система интегро-дифференциальных уравнений (4.1.1) с начальным условием (1.1.13) имеет единственное решение в пространстве $\overline{C}^{(1)}(Q_1{}^n(T))$.

Обозначим также $M = \sup\{|K(t,s)| : (t,s) \in G_2(T)\}$.

Используя обозначения (3.1.4), получим из (4.1.1):

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t} + a_{i1}(x)W(t,x;u) = f_i(t,x) + \int_0^t K(t,s)u_i(s,x)ds, \quad i = 1,...,n. \tag{4.1.2}$$

Дифференцируем первое уравнение (4.1.2) по x_1, второе по x_2,..., n-е по x_n, получаем

$$\frac{\partial^2 u_i(t,x)}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial a_{i1}}{\partial x_i}W(t,x;u) + a_{i1}\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_i} =$$

$$= \frac{\partial f(t,x)}{\partial x_i} + \int_0^t K(t,s)\frac{\partial u_i(s,x)}{\partial x_i}ds, \quad i = 1,...,n. \tag{4.1.3}$$

Отсюда, умножая второе уравнение (4.1.3) на b_2,..., n-е - на b_n и суммируя правые и левые части, получаем

$$\frac{\partial^2 u_1(t,x)}{\partial t\partial x_1}+b_2\frac{\partial^2 u_2(t,x)}{\partial t\partial x_2}+...+b_n\frac{\partial^2 u_n(t,x)}{\partial t\partial x_n}+\left(\frac{\partial a_{11}(x)}{\partial x_1}+b_2\frac{\partial a_{21}(x)}{\partial x_2}+...+b_n\frac{\partial a_{n1}(x)}{\partial x_n}\right)W(t,x;u)+$$

$$+a_{11}(x)\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_1}+a_{22}(x)\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_2}+...+a_{nn}(x)\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_n}=$$

$$=\frac{\partial f_1(t,x)}{\partial x_1}+b_2\frac{\partial f_2(t,x)}{\partial x_2}+...+b_n\frac{\partial f_n(t,x)}{\partial x_n}+\int_0^t K(t,s)W(s,x;u)ds. \tag{4.1.4}$$

Тогда получаем:

$$\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial t}+a_{11}\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_1}+a_{22}\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_2}+...+a_{nn}\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_n}=$$

$$=A(x)\cdot W(t,x;u)+\int_0^t K(t,s)W(s,x;u)ds+G(t,x). \tag{4.1.5}$$

Итак, мы привели систему интегро-дифференциальных уравнений (4.1.1) с начальным условием (1.1.13) к дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка (4.1.5) с начальным условием (3.1.9). Видно, что функция W полностью определяется исходными данными задачи и не зависит от функции u.

Применяя МДА для задачи (4.1.5)–(3.1.9), получаем:

$$W(t,x)=F_1(t,x;W)\equiv\psi(p(0,t,x))+\int_0^t A(p(v,t,x))W(v,p(v,t,x))dv+$$

$$+\int_o^t G(v,p(v,t,x))dv+\int_0^t\int_0^v K(v,s)W(s,p(v,t,x))\,dsdv, \tag{4.1.6}$$

где $p(s,t,x)=(p_1(s,t,x),...,p_n(s,t,x))$ - решение системы ИУ (3.1.11).

Введем в $\overline{C}(Q_1^n(T))$ норму (3.1.13).

Имеем:

$$\|F_1(t,x;W_1)-F_1(t,x;W_1)\|_\lambda=\|\int_0^t A(p(v,t,x))(W_1(v,p(v,t,x))-W_2(v,p(v,t,x)))dv+$$

$$+\int_0^t\int_0^v K(v,s)(W_1(s,p(v,t,x))-W_2(s,p(v,t,x)))dsdv\,\|_\lambda\le$$

$$\le\left\|\int_0^t N\|W_1-W_2\|e^{\lambda v}dv+\int_0^t\int_0^v M\|W_1-W_2\|e^{\lambda s}dsdv\right\|_\lambda\le$$

$$\le \left\| \frac{1}{\lambda} Ne^{\lambda t} + \frac{1}{\lambda^2} Me^{\lambda t} \right\|_{\lambda} = \frac{1}{\lambda} N + \frac{1}{\lambda^2} M.$$

Отсюда следует, что при $\lambda=2N+2M+1$ оператор F_1 является сжимающим.

Таким образом, ИУ (4.1.6) имеет единственное решение $W(t,x)$.

Подставляя его в уравнение (4.1.2) и интегрируя обе части уравнения по t, получаем систему ИУ относительно неизвестной вектор-функции $u(t,x) = (u_1(t,x),...u_n(t,x))$.

$$u_i(t,x) = \varphi_i(x) - \int_0^t a_{i1}(s) W(s,x) ds + \tag{4.1.7}$$

$$+ \int_0^t f_i(s,x) ds + \int_0^t \int_0^\nu K(\nu,s) u_i(\nu,x) ds d\nu, \quad i = 1,...,n.$$

Поскольку эти уравнения являются линейными уравнениями типа Вольтерра, они имеют единственное решение.

Отсюда следует существование и единственность решения задачи (4.1.1)-(1.1.13). Теорема доказана.

4.2. Применение метода дополнительного аргумента для системы интегро-дифференциальных уравнений с диагональной матрицей производных

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений, более общую, чем (3.2.1):

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t} + a_i(x) \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j(t,x)}{\partial x_j} = f_i(t,x) + \int_0^t K(t,s) u_i(s,x) ds, i = 1,...,n, \tag{4.2.1}$$

$(t,x) \in Q_1^n(T)$,

с начальными условиями (1.1.13).

Будем использовать обозначения раздела 3.1.

ТЕОРЕМА 4.2.1. Пусть выполняются условия Теоремы 3.2.1 и $K(t,s) \in \overline{C}(G_2(T))$.

Тогда система интегро-дифференциальных уравнений (4.2.1)-(1.1.13) имеет единственное решение в пространстве $\overline{C}^{(1)}(Q_1^n(T))$.

Обозначим еще $M = \sup\{|K(t,s)| : (t,s) \in G_2(T)\}$.

Введем обозначения:

$$W(t,x;u) = \frac{\partial u_1(t,x)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2(t,x)}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial u_n(t,x)}{\partial x_n}, \qquad (4.2.3)$$

$$\psi(x) = \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_n}.$$

Тогда из (4.2.1) имеем

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t} + a_i(x) W(t,x;u) = f_i(t,x) + \int_0^t K(t,s) u_i(s,x) ds, \quad i = 1,\ldots,n. \quad (4.2.4)$$

Дифференцируем первое уравнение (4.2.4) по x_1, второе - по $x_2,\ldots,n$-е по x_n, получаем

$$\frac{\partial^2 u_i(t,x)}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_i} W(t,x;u) + a_i(x) \frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i(t,x)}{\partial x_i} + \int_0^t K(t,s) \frac{\partial u_i(s,x)}{\partial x_i} ds, \qquad (4.2.5)$$

$i = 1,\ldots,n$

Отсюда, суммируя правые и левые части, получаем

$$\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial t} + a_1(x) \frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_1} + a_2(x) \frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_2} + \ldots + a_n(x) \frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_n} =$$

$$= -\sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_i} W(t,x;u) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(t,x)}{\partial x_i} + \int_0^t K(t,s) W(s,x;u) ds.$$

Введем обозначения:

$$-A(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_i}, G(t,x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(t,x)}{\partial x_i}. \qquad (4.2.6)$$

Тогда получаем:

$$\frac{\partial W(t,x;u)}{\partial t} + a_1 \frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_2} + \ldots + a_n \frac{\partial W(t,x;u)}{\partial x_n} =$$

$$= A(x) \cdot W(t,x;u) + \int_0^t K(t,s) W(s,x;u) ds + G(t,x). \qquad (4.2.7)$$

Имеем:

$$W(0,x;u)=\psi(x). \tag{4.2.8}$$

Итак, мы привели систему интегро-дифференциальных уравнений (4.2.1) с начальным условием (1.1.13) к дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка (4.2.7) с начальным условием (4.2.8). Видно, что функция W полностью определяется исходными данными задачи и не зависит от функции u.

Применяя МДА для задачи (4.2.7)–(4.2.8), получаем:

$$\begin{gathered} W(t,x;u)=\psi(p(0,t,x))+\int_0^t A(\nu,p(\nu,t,x))W(\nu,p(\nu,t,x))d\nu+ \\ +\int_o^t G(\nu,p(\nu,t,x))d\nu+\int_0^t\int_0^\nu K(\nu,s)W(s,p(\nu,t,x))dsd\nu, \end{gathered} \tag{4.2.9}$$

где $p(s,t,x)=(p_1(s,t,x),...,p_n(s,t,x))$ - решение системы ИУ

$$p_i(s,t,x)=x_i-\int_0^t a_i(p_i(\nu,t,x))d\nu,(s,t,x)\in Q_2{}^n(T), \quad i=1..n. \tag{4.2.10}$$

Система ИУ (4.2.10) с $a_i(x)\in\overline{C}^{(1)}(R), i=1..n$ как система слабо нелинейных уравнений типа Вольтерра имеет единственное решение, и оно удовлетворяет соотношению $p_i(s,s,x)=x_i$.

Из (4.2.10) вытекает соотношение

$$\frac{\partial p_i(s,t,x)}{\partial x_1}+a_1(x)\frac{\partial p_i(s,t,x)}{\partial x_2}+...+a_n(x)\frac{\partial p_i(s,t,x)}{\partial x_n}=0,(s,t,x)\in Q_2{}^n(T). \tag{4.2.11}$$

ИУ (4.2.9) совпадает по записи с ИУ (4.1.10) и так же имеет единственное решение $W(t,x)$.

Подставляя $W(t,x,u)$ в уравнение (4.2.3) и интегрируя обе части уравнения по t, получаем систему ИУ относительно неизвестной $u(t,x)=(u_1(t,x),...,u_n(t,x))$.

$$\begin{gathered} u_i(t,x)=\varphi_i(x)-\int_0^t a_i(x)W(s,x)ds+ \\ +\int_0^t f_i(s,x)ds+\int_0^t\int_0^\nu K(\nu,s)u_i(\nu,x)dsd\nu, \quad i=1,...,n \end{gathered} \tag{4.2.12}$$

Поскольку эти уравнения являются линейными уравнениями типа Вольтерра, они имеют единственное решение.

Отсюда следует существование и единственность решения задачи (4.2.1)-(1.1.13). Теорема доказана.

4.3. Построение решений системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с вырожденным ядром

В данном разделе рассматривается система интегро-дифференциальных уравнений в частных производных вида:

$$\frac{\partial u_j(t,x)}{\partial t}+u_1(t,x)\frac{\partial u_j(t,x)}{\partial x}=\int_0^1\int_0^1\sum_{p=1}^{n}H_{jp}(t)K_{jp}(\tau,\xi)u_p(\tau,\xi)d\tau d\xi, \tag{4.3.1}$$

$j=1,...,n,(t,x)\in Q_1$.

с начальными условиями

$$u_i(0,x)=x,\quad i=1,2,..,n,\quad x\in R. \tag{4.3.2}$$

Пусть $H_{jp}(t)\in C(R_+),\quad K_{jp}(t,x)\in C(Q_1),\quad j,p=1,2,...,n.$

Обозначим функционал

$$C_{jp}(u)=\int_0^1\int_0^1\sum_{p=1}^{n}K_{jp}(\tau,\xi)u_p(\tau,\xi)d\tau d\xi. \tag{4.3.3}$$

Задача (4.3.1), (4.3.2) в пространстве $S^{(1,1)}(Q_1)$ с помощью МДА сводится к системе ИУ:

$$u_j(t,x)=p(0,t,x)+\sum_{p=1}^{n}C_{jp}(u)\int_0^t H_{jp}(\nu)d\nu,\quad j=1,2,..,n, \tag{4.3.4}$$

$$p(s,t,x)=x-\int_s^t u_1(\nu,p(\nu,t,x))d\nu, \tag{4.3.5}$$

$(s,t,x)\in Q_2$ в пространстве $S^{(1,1)}(Q_1)\times C^1(Q_2)$.

Заметим, что для всякой функции $u_n(t,x)\in S^{(1,1)}(Q_1)$ ИУ (4.3.5) имеет единственное решение $p(s,t,x)$ в пространстве $C^1(Q_2)$, причем

$$\frac{\partial p(s,t,x)}{\partial t}+u_1(t,x)\frac{\partial p(s,t,x)}{\partial x}\equiv 0,\quad p(s,s,x)=x,\quad (s,t,x)\in Q_2.$$

Следовательно, ИУ (4.3.4) удовлетворяет уравнению (4.3.1).

В системе ИУ (4.3.4), (4.3.5) заменяем x на $p(t,\theta,x), \quad \theta \geq t,$ имеем:

$$u_j(t,p(t,\theta,x)) = p(0,t,p(t,\theta,x)) + \sum_{p=1}^{n} C_{jp}(u)\int_0^t H_{jp}(\nu)d\nu, \quad j=1,2,..,n, \ (t,\theta,x)\in Q_3, \tag{4.3.6}$$

$$p(s,t,p(t,\theta,x)) = p(t,\theta,x) - \int_s^t u_1(\nu, p(\nu,t,p(t,\theta,x)))d\nu, \quad (s,t,\theta,x)\in Q_4, \tag{4.3.7}$$

. В силу свойства (2.1.5) и с обозначением (2.1.8) система ИУ (4.3.6), (4.3.7) принимает вид:

$$\omega_j(t,\theta,x) = p(0,\theta,x) + \sum_{p=1}^{n} C_{jp}(u)\int_0^t H_{jp}(\nu)d\nu, \quad j=1,2,..,n, \ (t,\theta,x)\in Q_3, \tag{4.3.8}$$

$$p(s,\theta,x) = x - \int_s^\theta \omega_n(\nu,\theta,x)d\nu, \ \ (s,\theta,x)\in Q_3, \tag{4.3.9}$$

где $\omega_j(t,\theta,x) = u_j(t,p(t,\theta,x)), \quad j=1,2,..,n.$

Система ИУ (4.3.8), (4.3.9) при $\theta = t$ совпадает с системой ИУ (4.3.6), (4.3.7), причем $\omega_j(t,t,x) = u_j(t,x), \quad j=1,2,...,n.$

Подставляя (4.3.9) в (4.3.8), имеем

$$\omega_j(t,\theta,x) = x - \int_0^\theta \omega_1(\nu,\theta,x)d\nu + \sum_{p=1}^{n} C_{jp}(u)\int_0^t H_{jp}(\nu)d\nu, \quad j=1,2,..,n, (t,\theta,x)\in Q_3, \tag{4.3.10}$$

Рассмотрим следующее ИУ, полученное из (4.3.10) при $j=1$.

$$\omega_1(t,\theta,x) = x - \int_0^\theta \omega_1(\nu,\theta,x)d\nu + \sum_{p=1}^{n} C_{jp}(u)\int_0^t H_{jp}(\nu)d\nu, \tag{4.3.11}$$

Интегрируя ИУ (4.3.11) по t от 0 до θ и изменяя порядок интегрирования, находим

$$\int_0^\theta \omega_1(\nu,\theta,x)d\nu = \frac{1}{1+\theta}\left[\theta x + \sum_{p=1}^{n} C_{jp}(u)\int_0^\theta (\theta-\nu)H_{jp}(\nu)d\nu\right]. \tag{4.3.12}$$

Подставляя (4.3.12) в (4.3.10) и полагая $\theta = t$, получаем:

$$u_j(t,x) = \frac{1}{1+t}\left[x + \sum_{p=1}^{n} C_{jp}(u)\int_0^t (\nu+1)H_{jp}(\nu)d\nu \right], \quad j=1,2,..,n, \tag{4.3.13}$$

Умножая обе части (4.3.13) на $K_{ij}(t,x)$ $(i,j=1,...,n)$, интегрируем по области Q_1 и при этом учитываем (4.3.3). В результате для определения C_{ij}, $i,j=1,2,...,n$ получаем систему алгебраических уравнений:

$$C_{ij} = a_{ij} + \sum_{p=1}^{n} C_{jp} b_{ijp}, \quad i,j=1,2,...,n, \tag{4.3.14}$$

где

$$a_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 K_{ij}(\tau,\xi) \frac{\xi}{1+\tau} d\xi d\tau, \quad (i,j=1,...,n),$$

$$b_{ijp} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1+\tau} K_{ij}(\tau,\xi) \int_0^{\tau} (\nu+1) H_{jp}(\nu) d\nu \, d\tau \, d\xi.$$

Итак, доказана следующая

ТЕОРЕМА 4.3.1. Пусть

$$H_{jp}(t) \in C(R_+), \quad K_{jp}(t,x) \in C(R_+, R), \quad j,p=1,2,...,n$$

Тогда задача (4.3.1), (4.3.2) в пространстве $S^{(1,1)}(Q_1)$ имеет столько же решений, сколько их имеет алгебраическая система (4.3.14). В частности, если определитель основной матрицы системы (4.3.14) отличен от нуля*,* то задача (4.3.1), (4.3.2) имеет единственное решение, представимое в виде (4.3.13).

ПРИМЕР 4.3.1. Полагаем *n=1, H=1, K=1.* Получаем уравнение

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + u(t,x) \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = \int_0^1 \int_0^1 u(\tau,\xi) d\tau d\xi, \tag{4.3.15}$$

с начальным условием

$$u(0,x) = x, \quad x \in R. \tag{4.3.16}$$

Формула (4.3.13) принимает вид

$$u(t,x) = \frac{1}{1+t} \left[x + C \int_0^t (\nu+1) d\nu \right]. \tag{4.3.17}$$

Уравнение (4.3.14) для определения *C: C=a+bC,* где

$$a=\int_0^1\int_0^1\frac{\xi}{1+\tau}d\xi d\tau=\frac{1}{2}\ln(1+\tau)\,|_{\tau=0}^1=\frac{1}{2}\ln 2,$$

$$b=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1+t}\left(\frac{t^2}{2}+t\right)dtdx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{t^2+2t+1-1}{1+t}dt=\frac{1}{2}\int_0^1\left(1+t-\frac{1}{1+t}\right)dt=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\ln 2\right). \qquad (4.3.18)$$

$$C=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}C\left(\frac{3}{2}-\ln 2\right); C=\frac{2\ln 2}{1+2\ln 2}\approx 0.581.$$

$$u(t,x)=\frac{1}{1+t}\left(x+\frac{2\ln 2}{1+2\ln 2}\left(\frac{t^2}{2}+t\right)\right).$$

Проверка: правая часть (4.3.15) равна

$$u_t'(t,x)+u(t,x)u_x'(t,x)=$$

$$=-\frac{1}{(1+t)^2}\left(x+C\left(\frac{t^2}{2}+t\right)\right)+\frac{1}{1+t}C(t+1)+\frac{1}{1+t}\left(x+C\left(\frac{t^2}{2}+t\right)\right)\frac{1}{1+t}=C.$$

Левая часть (4.3.15) равна

$$\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1+t}\left(x+C\left(\frac{t^2}{2}+t\right)\right)dtdx=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}C\int_0^1\frac{1}{1+t}\left(\frac{t^2}{2}+t\right)dt,$$

что совпадает с (4.3.18).

При нелинейном интегральном члене возможна бифуркация. Приведем пример:

ПРИМЕР 4.3.2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+u(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}=\int_0^1\int_0^1 u^2(\tau,\xi)d\tau d\xi, \qquad (4.3.19)$$

с начальным условием (4.3.16). Обозначим

$$C=\int_0^1\int_0^1 u^2(\tau,\xi)d\tau d\xi. \qquad (4.3.20)$$

Подставляя (4.3.16) в (4.3.20), получаем

$$C=\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1}{1+t}\left(x+C(t^2/2+t)\right)\right)^2 dtdx,$$

$$C=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{(1+t)^2}\left(x^2+2Cx(t^2/2+t)+C^2(t^2/2+t)^2\right)dtdx,$$

$$C=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+2C\cdot\frac{1}{2}\int_0^1\frac{t^2/2+t}{(1+t)^2}dt+C^2\int_0^1\frac{(t^2/2+t)^2}{(1+t)^2}dt,$$

$$C=\frac{1}{12}+C\cdot\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1+t)^2-1}{(1+t)^2}dt+C^2\frac{1}{4}\int_0^1\left((1+t)^2-2+\frac{1}{(1+t)^2}\right)dt,$$

$$C=\frac{1}{12}+C\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)+C^2\frac{1}{4}\left(\frac{8}{3}-2+\frac{1}{2}\right), C=\frac{1}{12}+C\cdot\frac{1}{4}+C^2\frac{7}{24}; 7C^2-18C+2=0.$$

Данное уравнение имеет два решения, каждое из которых дает решение задачи (4.3.20)-(4.3.16).

4.4. Заключение по Главе 4

Получены достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для различных видов систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Первые два результата обобщают соответствующие результаты для систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими пространственными переменными, установленные выше. Третий результат получен с помощью приведения задачи к системе алгебраических уравнений и является специфическим для уравнений с интегральными членами. Построен пример уравнения с нелинейным интегральным членам, с бифуркацией решений.

ВЫВОДЫ

В диссертации методом дополнительного аргумента получены достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для различным видов систем нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, при этом построено решение системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с вырожденным ядром.

Полученные результаты обобщены для многомерного случая.

Результаты диссертации подтверждены строгими доказательствами.

Построена компьютерная программа.

В диссертации получены новые результаты, которые вносят определенный вклад в теорию нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

Построенные схемы применения МДА для решения систем нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных можно использовать при решении системы нелинейных уравнений других классов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Аширбаева А.Ж. Развитие метода дополнительного аргумента для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных: Автореф. дисс. канд. физ.–матем. наук. 01.01.02. [Текст] / А.Ж. Аширбаева. – Бишкек, 1995. – 15 с.
2. Аширбаева А.Ж. Метод дополнительного аргумента в теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных высшего порядка [Текст] / А.Ж. Аширбаева, М.И. Иманалиев, Т.М. Иманалиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 1997. – Вып. 26. – С. 3–8.
3. Аширбаева А.Ж. Исследование решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений высшего порядка типа Уизема [Текст] / А.Ж. Аширбаева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 1999. –Вып.28. – С.159–165.
4. Аширбаева А.Ж. О существовании и единственности решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с (n+1) независимыми переменными [Текст] / А.Ж. Аширбаева // Вестник ОшГУ. Серия физико-математических наук. - 2001. - № 3. - С. 59-63.
5. Аширбаева А.Ж. Построение решений одного класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высшего порядка с невырожденным ядром [Текст] / А.Ж. Аширбаева // Вестник ОшГУ. Серия физико-математических наук. – 2001. – № 4. – С.68–72.
6. Аширбаева А.Ж. Исследование решений дифференциальных уравнений в частных производных высшего порядка с n+1 независимыми переменными [Текст] / А.Ж. Аширбаева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2003. – Вып. 32. – С. 85–89.
7. Аширбаева А.Ж. Решение нелинейных дифференциальных и интегро–

дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом дополнительного аргумента: Автореф. дисс. … докт. физ.–матем. наук, 01.01.02 [Текст] / А.Ж. Аширбаева. - Бищкек, 2012. - - 34 с.

8. Аширбаева А.Ж. Исследование решений интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ч.Б. Жолдошева // Вестник ОшГУ, Серия естественных и медицинских наук. – 2012. – № 2. – Вып. 1. – С. 150–153.
9. Аширбаева А.Ж. Исследование решений нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка гиперболического типа [Текст] / А.Ж. Аширбаева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2012. – Вып. 44. – С. 37–43.
10. Аширбаева А.Ж. Приведение дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа к интегральному уравнению [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Материаловедение. – Бишкек. - 2013. - № 2. – С. 258-261.
11. Аширбаева А.Ж. Решение нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева. – Бишкек: Илим, 2013. – 134 с.
12. Аширбаева А.Ж. Новый способ приведения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа к интегральному уравнению [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Вестник ОшГУ. – 2013. – № 1. – Спец. выпуск. – С. 87–90.
13. Аширбаева А.Ж. Приближенное решение начальной задачи для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2014. – Вып. 46. – С. 37–40.

14. Аскар кызы Л. Корректные задачи для интегральных уравнений первого рода [Текст] / Аскар кызы: Автореферат дисс. … к. ф.-м.н. (01.01.02). - Бишкек, 2018. - 14 с.
15. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных [Текст] / А.В. – Москва: Наука, 1981. – 448 с.
16. Быков Я.В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / Я.В. Быков. – Фрунзе: КГУ, 1957. – 327 с.
17. Борубаев А.А. О категорных характеристиках компактных, полных равномерных пространств и полных по Райкову топологических групп [Текст] / А.А. Борубаев // Известия Академии наук, вып. 4, 2007. - С. 1-6.
18. Владимиров В.С. Уравнения математической физики [Текст] / В.С. Владимиров. – Москва: Наука, 1988. – 512 с.
19. Габов С.А. О свойстве разрушения уединенных волн, описываемых уравнениями Уизема [Текст] / С.А. Габов // Докл. АН СССР. - 1979. – Т. 246, № 6. – С. 1292-1295.
20. Габов С.А. Об уравнении Уизема [Текст] / С.А. Габов //Доклады АН СССР. – 1978. – Т. 242. – № 5. – С.993–996.
21. Джураев Т.Д. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка [Текст] / Т.Д. Джураев, А.С. Сопуев. – Ташкент: ФАН, 2000. –144 с.
22. Иманалиев М.И. Интегральные возмущения в теории устойчивости систем дифференциальных уравнений [Текст] / М.И. Иманалиев, Ю.А. Ведь // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии, вып. 9. – Фрунзе: Илим, 1973. – С. 65–77.
23. Иманалиев М.И. Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными [Текст] / М.И. Иманалиев. – Бишкек: Илим, 1992. – 112 с.
24. Иманалиев М.И. К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема [Текст] / М.И. Имана-

лиев, С.Н. Алексеенко // Доклады Российской АН. – 1992. –Т. 323. – № 3. – С. 410–414.

25. Иманалиев М.И. К теории систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема [Текст] / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Доклады АН. – 1992. – Т. 325. – № 6. – С.1111–1115.
26. Иманалиев М.И. К теории нелинейных уравнений с дифференциальным оператором типа полной производной по времени [Текст] / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Доклады Российской АН. – 1993. –Т. 329. – № 5. – С. 543–546.
27. Иманалиев М.И. К теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных типа Кортевега - де Фриза [Текст] / М.И. Иманалиев, П.С. Панков, Т.М. Иманалиев // Доклады Российской АН. – 1995. – Т. 342. – № 1. – С.17–19.
28. Иманалиев М.И. Метод дополнительного аргумента в теории нелинейных волновых уравнений в частных производных [Текст] / М.И. Иманалиев, П.С. Панков, Т.М. Иманалиев // Доклады Российской АН. – 1995. – Т. 343. – № 5. – С. 596–598.
29. Иманалиев М.И. К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [Текст] / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Доклады Российской АН. – 2001. –Т. 379. – № 1. – С.16–21.
30. Иманалиев М.И. К теории почти солитонных решений нелинейного дифференциального уравнения в частных производных типа Кортевега-де Фриза четвертого порядка [Текст] / М.И. Иманалиев, Т.М. Иманалиев, У.М. Иманалиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2003. – Вып. 32. – С.17–23.
31. Иманалиев М.И. К теории почти солитонных решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего

порядка [Текст] / М.И. Иманалиев, Т.М. Иманалиев, У.М. Иманалиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2004. – Вып. 33. – С.17-23.

32. Иманалиев М.И. О дифференциальном уравнении в частных прозводных первого порядка с интегральным коэффициентом [Текст] / М.И.Иманалиев, Ю.А. Ведь // Дифференциальные уравнения, 1989, том 25, № 3. - С. 465-477.
33. Иманалиев Т.М. Интегро-дифференциальные уравнения с частными производными типа Вольтера первого порядка [Текст] / Т.М. Иманалиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 1991. – Вып. 23. – С.34–38.
34. Иманалиев Т.М. Об одном эффекте в теории интегро-дифференциальных уравнений в частных производных [Текст] / Т.М. Иманалиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 1991. – Вып. 23. – С. 38–41.
35. Иманалиев Т.М. Нарушение единственности решений задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных [Текст] / Т.М. Иманалиев // Асимптотические методы теории сингулярно возмущенных уравнений и некорректно поставленных задач: тез. докл. всесоюз. конф. - Бишкек: Илим, 1991. – С. 51.
36. Иманалиев Т.М. Обоснование и развитие метода дополнительного аргумента для решения дифференциальных уравнений в частных производных: Автореф. дисс. … докт. физ.–матем. наук. 01.01.02. [Текст] / Т.М. Иманалиев – Бишкек, 2000 – 25 с.
37. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка [Текст] / Э. Камке. – Москва: Наука, 1966. – 28 с.
38. Колоджеро Ф. Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений [Текст] / Ф. Колоджеро, А. Дегаперис. – Москва: Мир, 1985. – 469 с.

39. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] /А.Н. Колмогоров, С.И. Фомин. – Москва: Наука, 1968. – 496 с.
40. Кошляков Н.С. Уравнения в частных производных математической физики [Текст] / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. – Москва: Высшая школа, 1970. – 712 с.
41. Краснов М.Л. Интегральные уравнения [Текст] / М.Л. Краснов. – Москва: Наука, 1975. – 303 с.
42. Курант Р. Уравнения с частными производными [Текст] / Р. Курант. – Москва: Мир, 1964. - 830 с.
43. Курант Р. Методы математической физики [Текст] / Р. Курант, Д. Гильберт. – Ленинград: ГИТТЛ, 1951. – Т. 2. – 544 с.
44. Ладыженская О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. [Текст] /. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева М.: Наука, 1973 (2-е изд.)..
45. Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения [Текст] / О.А. Ладыженская. – Москва: Гостехиздат, 1953. – 280 с.
46. Мамазиаева Э.А. Построение решений нелинейных интегро–дифференциальных уравнений второго порядка с частной производной под знаком интеграла [Текст] / Э.А. Мамазиаева// Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2014. -Вып.47. - С.44-48.
47. Мамазиаева Э.А. Исследование решений нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными [Текст] / Э.А. Мамазияева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2014. - Вып. 47. - С. 137-141.
48. Мамазиаева Э.А. Сведение нелинейной задачи электрических колебаний в проводах к системам интегральных уравнений методом дополни-

тельного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Известия ОшТУ. – Ош, 2015. – № 1. -С. 87–90.

49. Мамазиаева Э.А. Исследование решений операторно-дифференциального уравнения гиперболического типа [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Вестник ОшГУ. – Ош, 2014. – № 3. -С. 27–32.
50. Мамазиаева Э.А. Решение нелинейного операторно-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Вестник КРСУ. 2015. – Т. 15 – № 5. – С. 61–64.
51. Мамазиаева Э.А. Решение нелинейного операторно-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Наука и новые технологии. 2015. –№2. – С. 8–11.
52. Мамазиаева Э.А. Решение нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Естественные и математические науки в современном мире. 2016. - № 42. - С.111-124.
53. Мамазиаева Э.А. Применение метода дополнительного аргумента для нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными [Текст] / Э.А. Мамазияева // Проблемы современной науки и образования. 2016. – № 8(50). - С.10-15.
54. Мамазиаева Э.А. Решение нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Проблемы современной науки и образования. 2016. -№14 (56). - С.10-16.
55. Mamaziaeva E. Investigation of solutions of partial operator-differential equations of second order by the method of additional argument [Текст]/

Ashirbaeva A., Mamaziaeva E. // Abstracts of the V Congress of Turkic world mathematicians, Bulan-Sogottu, Kyrgyzstan. 2014 / Ed. by Academician A. Borubaev. – P. 166.

56. Mamaziaeva E. Solving of non-linear partial differential equations of second order with many variables by means of the method of additional argument [Текст]/ Mamaziaeva E., Ashirbaeva A. // Abstracts of the Issyk-Kul International Mathematical Forum, Bosteri, Kyrgyzstan. 2015 / Ed. by Academician A.Borubaev. – P. 50.

57. Медведев М.Я. Полусопряженные функторы и категории алгебр над n-тройками [Текст] / М.Я. Медведев: Автореферат дисс. … к. ф.-м.н. (01.01.04). - Новосибирск, 1973. - 17 с.

58. Мамбетов Ж.И. Решение системы интегро-дифференциальных уравнений методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж. И. Мамбетов // Вестник ОшГУ. Специальный выпуск – Ош, 2013. – № 1. -С. 91–94.

59. Мамбетов Ж.И. Исследование системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Вестник ЖАГУ. – Жалал-Абад, 2016. – № 1(32). - С. 34–37.

60. Мамбетов Ж.И. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Естественные и математические науки в современном мире. Новосибирск, 2017. - № 1(48). - С.111-124.

61. Мамбетов Ж.И. Метод дополнительного аргумента для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими переменными [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. Бишкек, 2017. – № 5. – С. 87–90.

62. Мамбетов Ж.И. Решение нелинейного операторно-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазиаева, Ж.И. Мамбетов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. Бишкек, 2017. – № 5. – С. 81–86.
63. Мамбетов Ж.И. Построение решений системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с вырожденным ядром [Текст] / Ж.И. Мамбетов // Вестник ОшГУ. – Ош, 2017. – № 4. - С. 113–116.
64. Мамбетов Ж.И. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими переменными [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Международный научно-исследовательский журнал, 2018. – № 3(69). – С. 6-10.
65. Мамбетов Ж.И. Применение метода дополнительного аргумента для системы интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Известия ОшТУ. – Ош, 2015. – № 1. - С. 103–105.
66. Мамбетов Ж.И. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с тремя переменными [Текст] / Ж.И. Мамбетов // Вестник ОшГУ. – Ош, 2018. – № 2. - С. 135-140.
67. Mambetov Zh. Using the method of additional argument for system of integro-differential equations [Текст]/ Ashirbaeva A., Mambetov J. // Abstracts of the V Congress of Turkic world mathematicians, Bulan-Sogottu, Kyrgyzstan. 2014 / Ed. by Academician A. Borubaev. – P. 167.
68. Mambetov Zh. Using the method of additional argument for non-linear partial differential equations [Текст]/ Mambetov Zh. // Abstracts of the V International Scientific Conference «Asymptotical, Topological and Computer Methods in Mathematics», Bishkek, 2016 / Ed. by Academician A. Borubaev. – P. 43.

69. Мамбетов Ж.И. Метод дополнительного аргумента для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими переменными [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Abstracts of Third International Scientific Conference «Actual problems of the theory of control, topology and operator equations» Bishkek, Cholpon-Ata, 19-22 June, 2017 / Ed. by Academician A. Borubaev. – P. 61.
70. Mambetov Zh. Method of additional argument for system of non-linear partial differential equations of the first order [Текст]/ Ashirbaeva A., Mambetov Zh. // Abstracts of VI Congress of the Turkic World Mathematical Society, October 2-5, 2017 Astana, Kazakhstan / Ed. by Acad. B.T. Zhumagulov. – P. 37.
71. Мамбетов Ж.И. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими переменными [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // II Борубаевские чтения, г. Бишкек, 1 марта 2018 года. Тезисы докладов. – С. 18.
72. Панков П.С. Приближенное решение начальной задачи для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных методом дополнительного аргумента [Текст] / П.С. Панков, Т.М. Иманалиев, Г.М. Кененбаева // Юбилейная науч. конф., посвященная 50-летию развития математики в Академии наук Казахстана: Тез. докл. – Алматы, 1995. – С. 164.
73. Панков П.С. Численное решение задачи о движении волн Римана на основе метода дополнительного аргумента [Текст] / П.С. Панков, О.Д. Будникова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2003. – Вып. 32. – С.35–38.
74. Панков П.С. Квазикоммутативность дифференциальных операторов и ее приложение к обоснованию метода дополнительного аргумента [Текст] / П.С. Панков, Т.М. Иманалиев // Исследования по интегро-

дифференциальным уравнениям, вып. 28. – Бишкек: Илим, 1999. – С. 30-34.

75. Соболев С.Л. Уравнения математической физики [Текст] / С.Л. Соболев. – Москва: Наука, 1966. – 443 с.
76. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – Москва: Наука, 1977. – 736 с.
77. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных [Текст] / Ф. Трикоми. – Москва: ИЛ, 1957. – 444 с.
78. Уизем Дж.Б. Линейные и нелинейные волны [Текст] / Дж.Б. Уизем. – Москва: Мир, 1977. – 622 с.
79. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров [Текст] / С. Фарлоу. – Москва: Мир, 1985. – 384 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Контрольный пример (точное решение $u_1(t,x)=1+t$, $u_2(t,x)=x$)

Решается система (2.1.14)-(2.1.15) по формулам:

$$\omega_{10}(s,t,x)=1,$$
$$\omega_{20}(s,t,x)=x,$$

$$\omega_{2k+1}(s,t,x)=x-K(0,t,x;\omega_{1k}(\nu,t,x):\nu)+s+s^2/2.$$
$$\omega_{1k+1}(s,t,x)=1+\int_0^s(1-x+K(\tau,t,x;\omega_{1k}(\nu,t,x):\nu)+\omega_{2k+1}(\tau,t,x))d\tau,$$
$$u_{1k+1}(t,x)=\omega_{1k+1}(t,t,x),u_{2k+1}(t,x)=\omega_{2k+1}(t,t,x),k=0,1,2,..$$

где

$$K(\tau,t,x;\omega(\nu,t,x):\nu)=\int_\tau^t\omega(\nu,t,x)d\nu.$$

Оказалось достаточно меньше восьми итераций.

Программа на языке pascal и результаты расчетов:

```
PROGRAM mamb;
USES CRT, Dos;
var ht,ht2,hx,hx2,xx,tt,t2,int_1: real;
iterat,inu,nt,il,it,iss,nx,ix,n1t,n1x,it1,ix1,itau:byte
;
mg1,mg2,int_1old: array[0..256,0..256] of real;
t: array[0..256] of real;
     {t1, t2, ...}
procedure it_ini;
begin
for it:=0 to nt do begin t[it]:=it*ht end; end;
procedure mg_ini;
begin
```

```
for it:=0 to nt do
for itau:=0 to it do
begin mg1[itau,it]:=1.; mg2[itau,it]:=xx end;
end;
    { integral_tau^t mg1 }
procedure int1{il,it};
var dm: real;
begin
int_1:=0.;
for inu:=il to it do
begin dm:=mg1[inu,it]*ht;
if (inu=il) or (inu=it) then dm:=dm/2.;
int_1:=int_1+dm end;
if il=it then int_1:=0.;
end;
begin {main}
clrscr;
writeln('  J. Mambetov. Method of additional
argument');
writeln('  for systems of equations of first order');
writeln('  Osh Technological University, 2018');
writeln;
writeln('   mg_1 = 1+ integr (integr); mg_2 = x -
integr');
writeln;
write('   Input t, x: '); readln(tt,xx);
nt:=128; ht:=tt/nt; ht2:=ht/2.;
it_ini; mg_ini;
for iterat:=1 to 8 do
begin
```

```
for it:=0 to nt do
for iss:=0 to it do
begin il:=iss; int1; int_1old[iss,it]:=int_1 end;
for it:=0 to nt do
 begin
for iss:=0 to it do
     begin
mg1[iss,it]:=1.; mg2[iss,it]:=xx-
int_1old[0,it]+t[iss]+sqr(t[iss])/2.;
for itau:=0 to iss do
         begin
mg1[iss,it]:=mg1[iss,it]+(1.-
xx+int_1old[itau,it]+mg2[itau,it])*ht;
         end;
     end;
 end;
writeln(' iterat=',iterat:3,':  u_1(t,x), u_2(t,x)
~',mg1[nt,nt]:7:3,mg2[nt,nt]:7:3);
end;
readln;
end.
```

```
J. Mambetov. Method of additional argument
  for systems of equations of first order
  Osh Technological University, 2018
   mg_1 = 1+ integr (integr); mg_2 = x - integr
   Input t, x: 0.8 0.9
 iterat=  1:  u_1(t,x), u_2(t,x) ~  1.893  1.220
 iterat=  2:  u_1(t,x), u_2(t,x) ~  1.801  0.878
 iterat=  3:  u_1(t,x), u_2(t,x) ~  1.804  0.896
 iterat=  4:  u_1(t,x), u_2(t,x) ~  1.804  0.896
 iterat=  5:  u_1(t,x), u_2(t,x) ~  1.804  0.896
 iterat=  6:  u_1(t,x), u_2(t,x) ~  1.804  0.896
 iterat=  7:  u_1(t,x), u_2(t,x) ~  1.804  0.896
 iterat=  8:  u_1(t,x), u_2(t,x) ~  1.804  0.896
```