НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Ж.БАЛАСАГЫНА

Диссертационный совет Д 01.17.560

На правах рукописи
УДК 517.968

МАМБЕТОВ ЖООМАРТ ИМАНАЛИЕВИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА

Специальность 01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Бишкек – 2018

Работа выполнена на кафедре прикладной математики Ошского технологического университета им. академика М. М. Адышева

Научный консультант: доктор физико-математических наук,
доцент **Аширбаева А.Ж.**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор **Асанов А.**
доктор физико-математических наук,
профессор **Сопуев А.С.**

Ведущая организация: Казахский национальный педагогический университет имени Абая.
Адрес: г. Алматы, ул. Дружбы 13.

Защита диссертации состоится 1 ноября 2018 года в 14^{00} часов на заседании Диссертационного совета Д 01. 17. 560 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук при Институте математики НАН Кыргызской Республики и Кыргызском национальном университете им. Ж. Баласагына по адресу:
Кыргызстан 720054, г. Бишкек, ул. Абдымомунова 328, лабораторный корпус № 6 КНУ, аудитория 211.

С диссертацией можно ознакомится в Центральной научной библиотеке НАН КР и на сайте ИМ НАН КР www.math.aknet.kg, Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а.

Автореферат опубликован «28» сентября 2018 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета
д.ф.-м.н., профессор Байзаков А. Б.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

В настояще время развивается метод дополнительного аргумента, который дает принципиальные возможности приводить различные виды нелинейных уравнений в частных производных к интегральным уравнениям и тем самым доказывать существование решений широких классов задач теории динамических систем, что не удается сделать другими методами.

М.И. Иманалиев и Ю.А. Ведь разработали метод дополнительного аргумента, как развитие метода характеристик, свели различные нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных с начальными условиями на оси к интегральным уравнениям и нашли с помощью принципа сжимающих отображений достаточные условия локального существования и единственности решений.

Аксиоматические основы этого метода были выявлены П.С. Панковым и Т.М. Иманалиевым, они ввели соответствующие новые понятия и определения и показали, что в методе дополнительного аргумента основным является то, что дифференциальные операторы с частными производными являются в некотором смысле перестановочными с интегральными операторами, что было названо кратко «квазикоммутативностью».

Совместно с Г.М. Кененбаевой они показали, что метод дополнительного аргумента можно применять и для численного решения начальных задач для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, при этом он имеет преимущества перед методами, использующими фиксированные сетки (не производится численное дифференцирование) и перед методами типа метода характеристик (расчет ведется не вдоль ломаных, а вдоль прямых). Кроме того, этот метод, как использующий результаты для интегральных уравнений, более удобе дл получени гарантированных результатов.

В работах А.Ж. Аширбаевой построена общая схема метода дополнительного аргумента при исследовании широкого класса начальных задач для нелинейных операторно-дифференциальных уравнений с композицией дифференциальных операторов любого порядка. Показана применимость этой схемы для различных конкретных типов уравнений, второго, третьего, четвертого, а также произвольного порядка. Для отдельных примеров получены решения в виде сходящихся рядов, также в случае, когда метод характеристик, как показано, применить невозможно. Предложенная схема реализована в виде компьютерной программы, произведены расчеты, показывающие возможности превосходства метода дополнительного аргумента.

Используя метод дополнительного аргумента, исследованы дифференциальные уравнения в частных производных и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных типа Кортевега-де Фриза, а также нелинейные волновые дифференциальные уравнения в частных производных.

В последнее время метод дополнительного аргумента применяется при исследовании разрешимости систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с разными характеристическими направлениями.

Имеются классы систем дифференциальных уравнений и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, представляющие теоретический интерес, которые не исследовались ни с помощью метода дополнительного аргумента, ни другими методами. Необходимость развития метода дополнительного аргумента для систем дифференциальных уравнений в частных производных определяет актуальность работы.

Цель исследования.

Целью данной работы является распространение и развитие метода дополнительного аргумента на новые классы систем нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных.

Методика исследования.

С помощью метода дополнительного аргумента начальные задачи для рассмотренных систем уравнений сводятся к системам интегральных уравнений. Доказательство существования решений таких систем с помощью принципа сжимающих отображений обеспечивает существование решений исходных задач. Также используются приближенные вычисления.

Научная новизна работы.

Получены следующие результаты:

- найдены достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, более общих, чем изученные ранее;
- найдены достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для общих систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими пространственными переменными;
- построено решение системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с вырожденным ядром;

- полученные результаты для дифференциальных уравнений обобщены на широкие классы систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных;

- впервые реализована компьютерная программа для решения систем уравнений по методу дополнительного аргумента.

Теоретическая и практическая ценность.

Результаты диссертации подтверждены строгими доказательствами. По полученным результатам работы построены решения конкретных задач. Разработанную схему применения метода дополнительного аргумента для решения систем нелинейных уравнений в частных производных можно использовать при решении систем нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений других классов.

В диссертации получены новые результаты, которые вносят определенный вклад в теорию нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Доказательство теорем существования и единственности решения начальных задач для более широких, чем известные ранее, классов систем квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка;
2. Построение решений системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с вырожденным ядром;
3. Установление условий существования решений систем квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими пространственными переменными;
4. Доказательство теорем существования и единственности решения начальных задач для широких классов нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных;
5. Методика компьютерного программирования для решения систем уравнений по методу дополнительного аргумента.

Апробация работы.

Результаты исследований докладывались:

- на V конгрессе математиков Тюркского мира (с. Булан-Соготту, июнь 2014, опубликованы тезисы [10]);
- на научной конференции, посвященной 75-летию ОшГУ (Ош, октябрь 2015);
- на международной научной конференции «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», посвященной 85-летию

академика М.И. Иманалиева (г. Бишкек – г. Чолпон-Ата, сентябрь 2016, опубликованы тезисы [11]);
- на международной научной конференции «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», приуроченной к 70-летию профессора А. Керимбекова (г. Бишкек – г. Чолпон-Ата, июнь 2017, опубликованы тезисы [12]);
- на VI конгрессе математиков Тюркского мира (Республика Казахстан, г. Астана, октябрь 2017, опубликованы тезисы [13]);
- на международной научной конференции «II Борубаевские чтения» (Бишкек, март 2018, опубликованы тезисы [14]);
- на семинарах кафедры «Прикладная математика» Ошского технологического университета им. академика М.М. Адышева (2014-2018).

Публикации.

Основные результаты работы опубликованы в статьях [1-9], а также опубликованы тезисы докладов [10-14]. В совместных работах постановка задач принадлежит научному руководителю, полученные основные результаты и оценки - соискателю.

Связь темы диссертации с основными научно-исследовательскими работами, проводимыми научными учреждениями.

Исследование по теме диссертации проводилось в рамках утвержденной тематики «Исследование решений систем нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка методом дополнительного аргумента» кафедры прикладной математики Ошского технологического университета им. академика М. М. Адышева.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, выводов, списка использованных источников, приложения – всего 82 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Перечень условных обозначений и сокращений:

N – множество натуральных чисел;

R – множество вещественных чисел;

$R_+=[0,\infty)$, $R_{++}=(0,\infty)$;

R^n $(n\in N)$ – n-мерное вещественное евклидово пространство и его точки $x=(x_1, x_2, \ldots,x_n)$;

$||\cdot||$ - норма; для непрерывных (и ограниченных, если область определения не ограничена) функций будем подразумевать максимум модуля функции;

$\equiv$ – знак тождества;

$T \in R_{++}$, $m, n \in N$ - некоторые фиксированные числа;

$G_2(T)=\{(s,t)|0\le s \le t \le T\}$;

$Q_1(T)=[0,T]\times R$;

$Q_1=R_+\times R$;

$Q_1^n(T)=[0,T]\times R^n$;

Ω - подмножества евклидова пространства R^n;

$C(\Omega\to B)$ и $C^{(..)}(\Omega\to B)$ - пространства функций $\Omega\to B$, определенных и непрерывных (соответственно с дополнительными условиями); при $B=R$ обозначение «$\to R$» будем опускать;

$C(\Omega), C^{(k)}(\Omega), C^{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_\delta)}(\Omega)$ – пространства функций, определенных и непрерывных (соответственно вместе со всеми своими производными до порядка k; соответственно вместе со своими производными до порядка α_i по i-му аргументу $(i=1,\ldots,n)$) на Ω;

$\overline{C}, \overline{C}^{(\ldots)}$ - пространства функций с дополнительным условием ограниченности (соответственно и для указанных производных);

$Lip(N|_u, M|_v, \ldots)$ – класс функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменной u с коэффициентом N, по переменной v с коэффициентом $M,\ldots$; для функции одной переменной индекс будем опускать;

$S^{(\alpha_1,\alpha_2)}(Q_1)$ – пространства тех функций $u(t,x)\in C^{(\alpha_1,\alpha_2)}(Q_1)$, для которых соответствующие производные ограничены относительно x в полуплоскости Q_1.

Будем использовать различные способы записи производных:

$$D_x u(t,x) = u_x{}'(t,x) = \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}; \quad D_x^2 u(t,x) = u_{xx}{}''(t,x) = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}.$$

По предложению А.Ж. Аширбаевой операторы от функций будем записывать в следующем виде:

- имя оператора, далее в скобках

- переменные результирующей функции (если таких переменных нет, то по традиции оператор называется функционалом);

- после знака (;) имя и (в скобках) переменные функции-аргумента;

- после знака (:) связанные переменные функции-аргумента (если все переменные связаны, то их перечислять не обязательно).

О связанных переменных будем говорить, что «оператор действует по (первому, второму, …) аргументу».

В соответствии со свойствами связанных переменных, их имена не имеют значения, в отличие от свободных переменных.

Например:
$H(t,x,z;\ u(x,s,z):s,z;\ w(t,s):t,s)= H(t,x,z;\ u(x,\xi,z):\ \xi,\ z;\ w(p,q):p,q)\ =$

$$= t + \int_0^1 u(x,s,z)ds + u(x,\frac{1}{2},\frac{1}{4}) + w(0,0) = t + \int_0^1 u(x,\xi,z)d\xi + u(x,\frac{1}{2},\frac{1}{4}) + w(0,0).$$

«Оператор действует по второму и третьему аргументам функции u и по обеим аргументам функции w».

Оператор, определенный для функций, можно расширить для функций от большего количества переменных. Это будем называть «каноническим расширением оператора» и обозначать соответственно.

Например: функционал и его каноническое расширение

$$G(u(s):s) = \int_0^1 u^3(s)ds; G(x;u(x,s):s) = \int_0^1 u^3(x,s)ds.$$

$\Omega(t)\in C(R_+)$ (также с индексами) - строго возрастающие функции, удовлетворяющие условию $\Omega(0)=0;\ \Lambda(T;\ \Omega(t):t)$ - любое такое число T^* из $(0,T]$, что $\Omega(T^*)<1$.

Неизвестные функции будем обозначать через u, вспомогательные неизвестные функции - через v, p, ω (возможно, с индексами).

Краткое изложение содержания диссертации.

В первой главе рассмотрен обзор литературы и результатов.

В разделе 1.1 изложены в усовершенствованном виде основы метода дополнительного аргумента.

В разделе 1.2 проведен обзор компьютерных реализаций метода дополнительного аргумента, сделан вывод, что ранее такие реализации были только для скалярных уравнений, но не для систем уравнений.

Обзор известных результатов по уравнениям первого порядка и их систем произведен в разделе 1.3.

В разделе 1.4 изложены необходимые сведения из теории категорий. Впервые метод дополнительного аргумента представлен на языке теории категорий.

Раздел 1.5 содержит краткое изложение результатов диссертации.

1.6. Заключение по главе 1. В данной главе изложены в усовершенствованном виде основы метода дополнительного аргумента - основное транзитивное тождество метода дополнительного аргумента, определения квазикоммутируемости, левого квазиподобного и обобщенноолевого квазиподобного для операторов, не имеющих обратных, основная лемма метода дополнительного аргумента, основная схема метода дополнительного аргумента и пример ее работы.

Проведен обзор компьютерных реализаций метода дополнительного аргумента, сделан вывод, что ранее такие реализации были только для скалярных уравнений, но не для систем уравнений.

Из обзора, произведенного в этой главе, следует, что ранее в работах других авторов рассматривались с помощью метода дополнительного аргумента некоторые системы дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. Более общие системы нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных не рассматривались. Другими методами такие более общие системы уравнений тоже не рассматривались.

Во второй главе осуществлено исследование решений систем квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

В 2.1 рассмотрена система дифференциальных уравнений в частных производных вида:

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t}+u_1(t,x)\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x}= f_i(t,x,u_1(t,x),u_2(t,x),...,u_n(t,x)),(t,x)\in Q_1(T) \quad (1)$$

при начальном условии

$$u_i(0,x)=\varphi_i(x), \quad x\in R, \quad \varphi_i(x)\in \overline{C}^1(R), \quad i=1,...,n. \quad (2)$$

Доказана следующая

ТЕОРЕМА 2.1.1. Если

$$f_i(t,x,u_1,u_2,...,u_n)\in \overline{C}^{(1)}(Q_1(T)\times R^n), \quad i=1,2,..,n, \quad (3)$$

то существует такое $0<T_*\leq T$, что задача (1)-(2) имеет единственное решение в пространстве $\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n$.

Рассмотрен конкретный пример.

ПРИМЕР 2.1.1. Рассмотрена следующая система дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t}+u_1(t,x)\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial x}=u_2(t,x)-x+1,\\ \dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial t}+u_1(t,x)\dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial x}=1+t,\end{cases} \quad (4)$$

с начальными условиями

$$u_1(0,x)=1, \quad u_2(0,x)=x, \ x\in R. \quad (5)$$

Применен метод последовательных приближений.

Для приближенного решения задачи (4), (5) была составлена программа на языке pascal с использованием формулы трапеций для вычисления интегралов. Она дала решение, близкое к точному

$$u_1(t,x)=1+t, \quad u_2(t,x)=x, \; x\in R.$$

В разделе 2.2 рассматривается система дифференциальных уравнений в частных производных вида:

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t}+a(t,x,u_n(t,x))\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x}= f_i(t,x,u_1(t,x),u_2(t,x),\ldots,u_n(t,x)), \tag{6}$$

$(t,x)\in Q_1(T),$

при начальном условии (2).

Доказана следующая теорема:

ТЕОРЕМА 2.2.1. Пусть для *i=1,2,..,n* $\varphi_i(x)\in Lip(L_i),\; L_i>0-const,$ $f_i(t,x,u_1,u_2,\ldots,u_n)\in \overline{C}^{(1)}(Q_1(T)\times R^n)\cap Lip(M_0^i\big|_x, M_1^i\big|_{u_1},\ldots,M_n^i\big|_{u_n}),\; M_j^i>0-const,$ $j=0,1,2,\ldots,n, \quad a(t,x,u_n)\in \overline{C}^{(1)}(Q_1(T)\times R)\cap Lip(N_0\big|_x, N_1\big|_{u_n}),\; N_0,N_1>0-const.$

Тогда существует такое $0<T_*\leq T,$ что система (6) с начальными условиями (2) имеет решение в пространстве $\left(\overline{C}^{(1)}(Q_1(T_*))\right)^n$.

2.3. Заключение по главе 2. В данной главе найдены методом дополнительного аргумента достаточные условия существования решений некоторых типов систем квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка:

- с одинаковым нелинейным сомножителем;
- с одинаковой нелинейной функцией.

Тем самым показано, что метод дополнительного аргумента может применяться к более широким классам систем дифференциальных уравнений с частными производными.

Применение метода дополнительного аргумента для систем дифференциальных уравнений в частных производных со многими пространственными переменными осуществлено в третьей главе диссертационной работы.

В разделе 3.1 рассмотрена система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial u_j(t,x)}{\partial x_j}= f_i(t,x),\; i=1,\ldots,n \tag{7}$$

с начальными условиями

$$u_i(0,x)=\varphi_i(x), \quad x\in R^n, \quad \varphi_i(x)\in \overline{C}^1(R^n),\; i=1,\ldots,n, \tag{8}$$

где $a_{ij}(x), f_i(t,x),\; i,j=1,\ldots,n$ - заданные функции.

ТЕОРЕМА 3.1.1. Пусть $a_{ij}(x)\in \overline{C}^{(1)}(R^n), \quad i,j=1,\ldots,n, a_{ij}(x)\neq 0$

и имеют место тождества

$$\frac{a_{1i+1}(x)}{a_{11}(x)} = \frac{a_{2i+1}(x)}{a_{21}(x)} = \ldots = \frac{a_{ni+1}(x)}{a_{n1}(x)} = b_{i+1}, \quad (i = 1, \ldots, n-2),$$

$f(t,x) \in \overline{C}^{(1)}(Q_1^{\,n}(T))$.

Тогда система дифференциальных уравнений (7) с начальным условием (8) имеет единственное решение в пространстве $\overline{C}^{(1)}(Q_1^{\,n}(T))$.

Применение метода дополнительного аргумента для системы интегро-дифференциальных уравнений с диагональной матрицей производных имеется в разделе 3.2.

В разделе 3.3 рассматривается следующая система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} u_{n+1-k}(t,x_1,..,x_n)\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial x_k} = \\ = f_i(t,x_1,..,x_n,u_1(t,x_1,..,x_n),u_2(t,x_1,..,x_n),...,u_n(t,x_1,..,x_n)),\end{gathered} \tag{9}$$

$i=1,2,\ldots,n$, $(t,x_1,..,x_n) \in Q_1^{\,n}(T)$,

с начальными условиями (8).

Доказана следующая теорема:

ТЕОРЕМА 3.3.1. Пусть для $i=1,2,\ldots,n$

$$f_i(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n) \in \overline{C}^1(Q_1^{\,n}(T) \times R^n).$$

Тогда существует такое $0 \le T^* \le T$, явно определяемое на основе исходных данных, что задача (9), (8) имеет единственное решение в $\overline{C}^1(Q_1^{\,n}(T^*))$, которое совпадает при $s=t$ с решением системы интегральных уравнений

$$\omega_i(s,t,x_1,...,x_n) = \varphi_i(x_1 - \int_0^t \omega_{n+1}(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu,...,x_n - \int_0^t \omega_1(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu) +$$

$$+\int_0^s f_i(\rho,x_1 - \int_\rho^t \omega_{n+1}(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu,...,x_n - \int_\rho^t \omega_1(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu,\omega_1(\rho,t,x_1,...,x_n),....,\omega_n)d\rho.$$

Метод дополнительного аргумента для исследования общей системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с различными неизвестными функциями в нелинейной части применен в разделе 3.4.

Рассмотрена система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} a_k(t,x_1,...,x_n,u_{n+1-k}(t,x_1,..,x_n))\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial x_k} =$$

$$= f_i(t,x_1,..,x_n,u_1(t,x_1,..,x_n),u_2(t,x_1,..,x_n),...,u_n(t,x_1,..,x_n)), \qquad (10)$$

$i=1,2,..,n, \quad (t,x_1,..,x_n)\in Q_1^{\,n}(T),$

с начальным условием (8).

ТЕОРЕМА 3.4.1. Пусть для *i=1,2,..,n* функции

$a_i(t,x_1,...,x_n,u)\in \overline{C}^{\,1}(Q_1^{\,n}(T)\times R), \quad f_i(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)\in \overline{C}^{\,1}(Q_1^{\,n}(T)\times R^n).$

Тогда существует такое $0<T^*\le T$, явно определяемое на основе исходных данных, что задача (10), (8) имеет единственное решение в пространстве $\overline{C}^{\,1}(Q_1^{\,n}(T^*))$.

3.5. Заключение по главе 3. В данной главе найдены методом дополнительного аргумента в сочетании с методом введения дополнительных неизвестных функций достаточные условия существования решений начальной задачи для некоторых видов систем дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка со многими пространственными переменными.

В четвертой главе метод дополнительного аргумента применен к решению систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

В разделе 4.1 рассмотрена система интегро-дифференциальных уравнений, более общая, чем (7):

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial u_j(t,x)}{\partial x_j}= f_i(t,x)+\int_0^t K(t,s)u_i(s,x)ds, i=1,\dots,n \qquad (11)$$

с начальными условиями (8).

Доказана следующая теорема:

ТЕОРЕМА 4.1.1. Пусть выполняются условия Теоремы 3.1.1 и $K(t,s)\in \overline{C}(G_2(T))$. Тогда система интегро-дифференциальных уравнений (11) с начальным условием (8) имеет единственное решение в пространстве $\overline{C}^{(1)}(Q_1^{\,n}(T))$.

Применение метода дополнительного аргумента для системы интегро-дифференциальных уравнений с диагональной матрицей производных выполнено в разделе 4.2.

Рассмотрена система интегро-дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t}+a_i(x)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_j(t,x)}{\partial x_j}= f_i(t,x)+\int_0^t K(t,s)u_i(s,x)ds, i=1,\dots,n, \qquad (12)$$

$(t,x)\in Q_1^{\,n}(T),$

с начальными условиями (8).

Построение решений системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с вырожденным ядром осуществлено в разделе 4.3.

В данном разделе рассматривается система интегро-дифференциальных уравнений в частных производных вида:

$$\frac{\partial u_j(t,x)}{\partial t} + u_1(t,x)\frac{\partial u_j(t,x)}{\partial x} = \int_0^1\int_0^1 \sum_{p=1}^{n} H_{jp}(t)K_{jp}(\tau,\xi)u_p(\tau,\xi)d\tau d\xi,$$

$$j = 1,\dots,n,\quad (t,x) \in Q_1$$

с начальными условиями

$$u_i(0,x) = x,\quad i = 1,2,..,n,\quad x \in R.$$

Построен и решен пример такой системы. Построен также пример с бифуркацией решений, с теми же начальными условиями уравнения

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + u(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = \int_0^1\int_0^1 u^2(\tau,\xi)d\tau d\xi.$$

4.4. Заключение по главе 4. Получены достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для различных видов систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Первые два результата обобщают соответствующие результаты для систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими пространственными переменными, установленные выше. Третий результат получен с помощью приведения задачи к системе алгебраических уравнений и является специфическим для уравнений с интегральными членами. Построен пример уравнения с нелинейным интегральным членом, с бифуркацией решений.

В приложениях приведена программа и результаты расчетов.

ВЫВОДЫ

В диссертации методом дополнительного аргумента получены достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для различных видов систем нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, при этом построено решение системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с вырожденным ядром.

Полученные результаты обобщены для многомерного случая.

Результаты диссертации подтверждены строгими доказательствами.

Построена компьютерная программа.

В диссертации получены новые результаты, которые вносят определенный вклад в теорию нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

Построенные схемы применения метода дополнительного аргумента для решения систем нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных можно использовать при решении систем нелинейных уравнений других классов.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н., доценту Аширбаевой Айжаркын Жоробековне за постановку проблемы исследования и постоянное внимание к работе.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1. Мамбетов Ж.И. Решение системы интегро-дифференциальных уравнений методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж. И. Мамбетов // Вестник ОшГУ. Специальный выпуск – Ош, 2013. – № 1. – С. 91-94.
2. Мамбетов Ж.И. Исследование системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Вестник ЖАГУ. – Жалал-Абад, 2016. – № 1(32). – С. 34-37.
3. Мамбетов Ж.И. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Естественные и математические науки в современном мире. Новосибирск, 2017. – № 1(48). – С.111-124.
4. Мамбетов Ж.И. Метод дополнительного аргумента для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими переменными [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. Бишкек, 2017. – № 5. – С. 87-90.
5. Мамбетов Ж.И. Решение нелинейного операторно-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазиаева, Ж.И. Мамбетов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. Бишкек, 2017. – № 5. – С. 81-86.
6. Мамбетов Ж.И. Построение решений системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с вырожденным ядром [Текст] / Ж.И. Мамбетов // Вестник ОшГУ. – Ош, 2017. – № 4. – С. 113-116.

7. Мамбетов Ж.И. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими переменными [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Международный научно-исследовательский журнал. 2018. – № 3(69). – С. 6-10.
8. Мамбетов Ж.И. Применение метода дополнительного аргумента для системы интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Известия ОшТУ. – Ош, 2015. – № 1. – С. 103-105.
9. Мамбетов Ж.И. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с тремя переменными [Текст] / Ж.И. Мамбетов // Вестник ОшГУ. – Ош, 2018. – № 2. – С. 135-140
10. Mambetov Zh. Using the method of additional argument for system of integro-differential equations [Текст]/ Ashirbaeva A., Mambetov J. // Abstracts of the V Congress of Turkic world mathematicians, Bulan-Sogottu, Kyrgyzstan. 2014 / Ed. by Academician A. Borubaev. – P. 167.
11. Mambetov Zh. Using the method of additional argument for non-linear partial differential equations [Текст]/ Mambetov Zh. // Abstracts of the V International Scientific Conference «Asymptotical, Topological and Computer Methods in Mathematics», Bishkek, 2016 / Ed. by Academician A. Borubaev. – P. 43.
12. Мамбетов Ж.И. Метод дополнительного аргумента для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими переменными [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Abstracts of Third International Scientific Conference «Actual problems of the theory of control, topology and operator equations» Bishkek, Cholpon-Ata, 19-22 June, 2017 / Ed. by Academician A. Borubaev. – P. 61.
13. Mambetov Zh. Method of additional argument for system of non-linear partial differential equations of the first order [Текст]/ Ashirbaeva A., Mambetov Zh. // Abstracts of VI Congress of the Turkic World Mathematical Society, October 2-5, 2017 Astana, Kazakhstan / Ed. by Acad. B.T. Zhumagulov. – P. 37.
14. Мамбетов Ж.И. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими переменными [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // II Борубаевские чтения, г. Бишкек, 1 марта 2018 года. Тезисы докладов. – С. 18.

Мамбетов Жоомарт Иманалиевичтин 01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган «Сызыктуу эмес, жекече туундулуу биринчи тартиптеги дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелер системасынын чыгарылыштарын кошумча аргумент кийирүү усулу менен изилдөө» аттуу диссертациялык ишинин

РЕЗЮМЕСИ

Урунттуу сөздөр: жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер системасы, сызыктуу эмес теңдеме, интегро-дифференциалдык теңдеме, кошумча аргумент кийирүү усулу, Коши маселеси, кысуучу чагылтуулардын принциби.

Кошумча аргумент кийирүү усулунун негизинде, сызыктуу эмес, жекече туундулуу биринчи тартиптеги дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелер системасынын чыгарылыштарын изилдөөнүн жалпы схемасы сунуш кылынган. Каралган теңдемелер системасы үчүн баштапкы маселелер интегралдык теңдемелер системаларына келтирилген. Чыгарылыштардын жашоосун далилдөө кысуучу чагылтуулардын принцибин колдонуу менен жүргүзүлөт.

Сызыктуу эмес, жекече туундулуу биринчи тартиптеги дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелердин системасы үчүн, көп өзгөрмөлүү, сызыктуу эмес, жекече туундулуу биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдемелер жалпы системасы үчүн жана сызыктуу эмес, жекече туундулуу биринчи тартиптеги интегро-дифференциалдык теңдемелер системаларынын кеңири классы үчүн каралган баштапкы маселенин чыгарылыштарынын жашашынын жана жалгыздыгынын жетиштүү шарттары алынган.

Кошумча аргумент кийирүү усулу боюнча теңдемелер системасын чыгаруу үчүн компьютердик программа түзүлгөн.

РЕЗЮМЕ

Мамбетов Жоомарт Иманалиевич

Диссертация «Исследование решений систем нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка методом дополнительного аргумента» представлена на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Ключевые слова: Система дифференциальных уравнений в частных производных, нелинейное уравнение, интегро-дифференциальное уравнение, метод дополнительного аргумента, задача Коши, принцип сжимающих отображений.

Предложена общая схема исследования систем нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка на основе метода дополнительного аргумента. Начальные задачи для таких систем уравнений сведены к системам интегральных уравнений. Доказательства существования решений проводятся с использованием принципа сжимающих отображений.

Получены достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, для общих систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими пространственными переменными и для широких классов нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных.

Реализована компьютерная программа для решения систем уравнений по методу дополнительного аргумента.

SUMMARY

Mambetov Zhoomart Imanalievich

Dissertation "Investigation of solutions of systems of non-linear partial differential and integro-differential equations of first order by means of the method of additional argument" submitted for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences on specialty 01.01.02 - differential equations, dynamical systems and optimal control

Key words: system of partial differential equations, non-linear equation, integro-differential equation, method of additional argument, Cauchy problem, contracting mappings principle.

A scheme to investigate systems of nonlinear partial differential and integro-differential equations on the base of the method of additional argument is proposed. Initial value problems for considered systems of equations are reduced to systems of integral equations. Proving of existence of solutions is performed by means of applying the contracting mappings principle to operators of delay type.

Sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of the initial value problem for systems of nonlinear partial differential equations of the first order, for general systems of nonlinear partial differential equations of the first order with many spatial variables and for wide classes of nonlinear integro-differential partial differential equations are obtained.

A computer program for solving systems of equations by the method of an additional argument is implemented.

Подписано в печать ---.2018.
Формат $60^{*}86_{1/16}$. Объем 2 п.л. Тираж 100 экз. Заказ № 05166

Редакционно-издательский отдел ОшТУ им. академика М.М. Адышева
723503 г. Ош, ул. Исанова 81а