Международный научно-исследовательский журнал. 2018. – № 3(69). – С. 6-10.

Аширбаева А.Ж.[1], Мамбетов Ж.И.[2]

[1]ORCID: 0000-0001-7706-0608, Доктор физико-математических наук,

Ошский технологический университет имени академика М.М. Адышева,

г. Ош, Кыргызская Республика

[2]ORCID: 0000-0003-4455-5887, – старший преподаватель,

Ошский технологический университет имени академика М.М. Адышева,

г. Ош, Кыргызская Республика

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА СО МНОГИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Аннотация

Исследование системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, методом характеристик, сводится к исследованию нелинейной системы интегральных уравнений, где всегда присутствует суперпозиция неизвестных функций. И найдя решение в характеристических переменных, для получения решения исходной задачи требуется перейти от характеристических переменных к исходным переменным. Последняя задача во многих случаях бывает настолько сложной, что её не решают, а принимают допустимость обратного преобразования переменных в качестве условия.

Целью данной работы является исследование решений системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими переменными методом дополнительного аргумента, при помощи которого рассмотренная система уравнений приводится к системам интегральных уравнений. При этом в системе интегральных уравнений не присутствует суперпозиция неизвестных функций. Доказательство существования решения системы интегральных уравнений проводится с более строгим способом записи операторов в функциональных пространствах с использованием принципа «сжимающих отображений» для операторов запаздывающего типа.

Ключевые слова: уравнение в частных производных, система уравнений, начальные условия, дополнительный аргумент, оператор запаздывающего типа, принцип «сжимающих отображений».

Введение

В настоящее время метод дополнительного аргумента (м.д.а.) развивается для систем нелинейных уравнений в частных производных (в.ч.п.) [4, ст. 410-414], [5, ст. 17-23] [10, с. 111-115].

М.И. Иманалиев в своей работе «Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными» [1, с. 55-100] с использованием разработанного м.д.а., на основе принципа «сжимающих отображений» различные нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных (д.у. в ч.п.) с начальными условиями на оси были сведены к интегральным уравнениям (и.у.), и найдены достаточные условия существования и единственности в некоторых областях.

Аксиоматические основы этого метода были выявлены в работе П.С. Панкова, Т.М. Иманалиева [2, ст. 30-34], где также введены соответствующие новые понятия и определения. Показано, что в м.д.а. основным является то, что дифференциальные операторы с частными производными являются в некотором смысле перестановочными с интегральными операторами, что было названо кратко «квазикоммутативностью».

М.д. а. применяется и для численного решения начальных задач для нелинейных д.у. в ч.п., при этом он имеет преимущества перед методами, использующими фиксированные сетки (не производится численное дифференцирование) и перед методами типа метода характеристик (расчет ведется не вдоль ломаных, а вдоль прямых). Кроме того, этот метод, как использующий результаты для и.у., более удобен для получения гарантированных результатов [8, ст. 164].

Построена общая схема м.д.а. при исследовании широкого класса начальных задач для нелинейных операторно-дифференциальных уравнений (о.-д.у.) с композицией дифференциальных операторов любого порядка [9, ст. 12-24]. Показана применимость этой схемы для различных конкретных типов уравнений, второго, третьего, четвертого, а также произвольного порядка [9, ст. 52-76], в конце обобщается для уравнений со многими пространственными переменными [9, ст. 91-123]. Для отдельных примеров получены решения в виде сходящихся рядов, также в случае, когда метод характеристик, как показано, применить невозможно [9, ст. 59-61]. Предложенная схема реализована в виде компьютерной программы, произведены расчеты, показывающие возможности превосходства м.д.а. [3, ст. 37-40].

Используя м.д.а. исследованы д.у. в ч.п. и и.-д.у. в ч.п. типа Кортевега-де Фриза, а также нелинейные волновые д.у. в ч.п. [6, ст. 543-546], [7, ст. 17-19].

Постановка задачи

В данной работе рассматривается следующая система нелинейных д.у. в ч.п.:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\vartheta_k(t,x_1,..,x_n)\frac{\partial u_i(t,x_1,..,x_n)}{\partial x_k}= \\ =f_i(t,x_1,..,x_n,u_1(t,x_1,..,x_n),u_2(t,x_1,..,x_n),...,u_n(t,x_1,..,x_n)),\end{gathered} \tag{1}$$

$i=1,2,\dots,n,$ $(t,x_1,..,x_n)\in G_{n+1}(T)=[0,T]\times R^n$,

с начальными условиями

$$u_i(0,x_1,..,x_n)=\varphi_i(x_1,..,x_n),\ i=1,2,\ldots,n,\ (x_1,..,x_n)\in R^n, \quad (2)$$

где через $\vartheta_i(t,x_1,..,x_n)$, $i=1,2,\ldots,n$ обозначены любые неизвестные функции: $u_1(t,x_1,..,x_n), u_2(t,x_1,..,x_n),\ldots,u_n(t,x_1,..,x_n)$.

Для определенности возьмем $\vartheta_i(t,x_1,..,x_n)=u_{n+1-i}(t,x_1,..,x_n),\quad i=1,2,\ldots,n$

М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко в работе [10, с. 111-115] рассматривали случай $\vartheta_i(t,x_1,..,x_n)=u_i(t,x_1,..,x_n),\quad i=1,2,\ldots,n.$

Используем следующие обозначения:

$\overline{C}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_l}$ – класс функций, определенных, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными до порядка α по j-му аргументу, $j=1,\ldots,l,$ на некотором подмножестве Ω евклидова пространства R^l, где мульти индекс $(0,\ldots,0)$ будем опускать [4, ст. 410].

$Lip(N|_u, M|_v,\ldots)$ – класс функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменной u с коэффициентом N, по переменной v с коэффициентом M, в случае функции одной переменной индекс будем опускать [9, ст. 11].

Для удобства ссылок приведем известные результаты. Мы сформулируем их применительно к множествам банаховых пространств, как они будут использоваться в настоящей работе.

Лемма 1. (следствие принципа сжимающих отображений Банаха). Если оператор A в шаре $S=\{x: ||x||\le 2r\}$ банахова пространства удовлетворяет условию $||Ax-Ay||\le ½||x-y||$, и $||A(0)||\le r$, то он имеет в этом множестве точно одну неподвижную точку.

Лемма 2. Если для банахова пространства B оператор

$J: C([0,T]\to B)\to C([0,T]\to B)$

в любом шаре $S=\{u: ||u||_{C([0,T]\to B)}\le r_0=\text{const}\}$ удовлетворяет условию Липшица типа запаздывания:

$$(\forall t\in[0,T])(||\,Ju_1(t)-Ju_2(t)||_B\le L_S\, t||\,u_1-u_2||_{C([0.t]\to B)}),$$

$L_S=\text{const}$ и зависит только от выбора шара S, то операторное уравнение $u=Ju$

при достаточно малом T^* имеет решение в $C([0,T^*]\to B)$.

Доказательство. Положим $r_0 = 2||J(0)||_B$ и $T^* = \min\{T, 1/(2L_S)\}$.

Тогда в силу Леммы 1 решение в шаре существует.

ТЕОРЕМА. Пусть для i=1,2,…,n функции $\varphi_i(x_1,...,x_n)\in\overline{C}^1(R^n)$,

$f_i(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)\in\overline{C}^{0,\underbrace{1,...,1}_{n\,раз},\underbrace{1,...,1}_{n\,раз}}(G_{n+1}(T)\times R^n)$.

Тогда существует такое $0\le T^*\le T$, явно определяемое на основе исходных данных, что задача (1), (2) имеет единственное ограниченное во всей области $G_{n+1}(T)=[0,T]\times R^n$ решение, которое совпадает при $s=t$ с решением системы и.у.

$$\omega_i(s,t,x_1,...,x_n)=\varphi_i(x_1-\int_0^t\omega_{n+1}(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu,...,x_n-\int_0^t\omega_1(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu)+$$
$$+\int_0^s f_i(\rho,x_1-\int_\rho^t\omega_{n+1}(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu,...,x_n-\int_\rho^t\omega_1(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu,\omega_1(\rho,t,x_1,...,x_n),....,\omega_n)d\rho,$$
(3)

Доказательство. Представим основные этапы доказательства теоремы в виде лемм.

Лемма 3. В классе $\overline{C}^{\underbrace{11,...,1}_{n\,раз}}(G_{n+1}(T^*))$ задача (1), (2) с $p_i(s,t,x_1,...,x_n)$- определяемых из

$$\begin{aligned}&\frac{\partial p_i(s,t,x_1,...,x_n)}{\partial s}=u_{n+1-i}(s,p_1(s,t,x_1,...,x_n),...,p_n(s,t,x_1,...,x_n)),\\&p_i(t,t,x_1,...,x_n)=x_i,\quad 0\le s\le t,\quad i=1,2,...,n,\end{aligned}\tag{4}$$

эквивалентна системе и.у.

$$u_i(t,x_1,...,x_n)=\varphi_i(p_1(0,t,x_1,...,x_n),...,p_n(0,t,x_1,...,x_n))+$$
$$+\int_0^t f_i(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),...,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n),u_1(\nu,p_1,...,p_n),....,u_n(\nu,p_1,...,p_n))d\nu\tag{5}$$

$$p_i(s,t,x_1,...,x_n)=x_i-\int_s^t u_{n+1-i}(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),...,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n))d\nu\tag{6}$$

Доказательство леммы 3. Из (4) следует (6) и следующие равенства

$$\frac{\partial u_i(s,p_1(s,t,x_1,...,x_n),...,p_n(s,t,x_1,...,x_n))}{\partial s}=\frac{\partial u_i(s,p_1(s,t,x_1,...,x_n),...,p_n(s,t,x_1,...,x_n))}{\partial t}+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}u_{n+1-k}(s,p_1(s,t,x_1,...,x_n),...,p_n(s,t,x_1,...,x_n))\frac{\partial u_i(s,p_1(s,t,x_1,...,x_n),...,p_n(s,t,x_1,...,x_n))}{\partial x_k},$$

i=1,2,…,n. На основании последнего соотношения из (1) имеем

$$u_i(s,p_1(s,t,x_1,...,x_n),...,p_n)=\varphi_i(x_1-\int_0^t u_{n+1}(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),..,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n))d\nu,...,x_n-$$
$$-\int_0^t u_1(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),..,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu)+$$
$$+\int_0^s f_i(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),...,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n),u_1(\nu,p_1,..,p_n),...,u_n(\nu,p_1,..,p_n)d\nu \quad (7)$$

которое при $s=t$ совпадает с (5).

С другой стороны, из (5) для $p_i(s,t,x_1,\ldots,x_n)$ следует

$$\frac{\partial p_i(s,t,x_1,...,x_n))}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}u_{n+1-k}(t,x_1,...,x_n)\frac{\partial p_i(s,t,x_1,...,x_n)}{\partial x_k}=0,\ p_i(t,t,x_1,...,x_n)=x_i, i=1,2,..,n. \quad (8)$$

Определяя из (5) частные производные по t и x_k, k=1,…n с учетом (8) получаем (1).

Лемма 4. Пусть для $i=1,...,n,$ функции $\omega_i(s,t,x_1,...,x_n)=u_i(s,p_1(s,t,x_1,...,x_n),...,p_n(s,t,x_1,...,x_n))$, где $u_i(t,x_1,...,x_n)$ являются решениями задачи (1), (2), а $p_i(s,t,x_1,...,x_n)$ - решениями задачи (4) и они удовлетворяют системе и.у. (3), и наоборот, если функции $\omega_i(s,t,x_1,...,x_n)$ являющиеся решениями системы и.у. (3), непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам, то в пределах некоторого интервала изменения переменной t, определяемого на основе исходных данных, $\omega_i(s,t,x_1,...,x_n)$ при $s=t$,будет удовлетворять системе д.у. в ч.п. (1) и начальному условию (2).

Доказательство леммы 4. Пусть функции $u_i(t,x_1,...,x_n)$, $p_i(s,t,x_1,...,x_n)$, $i=1,2,...,n$ являются решениями задач (1), (2) и (4). В силу леммы 3 они удовлетворяют равенствам (7) и (6). Подставив $p_i(s,t,x_1,...,x_n),\quad i=1,2,...,n$ из (6) в (7), получим систему и.у.

$$u_i(s,p_1(s,t,x_1,...,x_n),...,p_n)=\varphi_i(x_1-\int_0^t u_{n+1}(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),..,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n))d\nu,...,x_n-$$

$$-\int_0^t u_1(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),..,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu)+$$

$$+\int_0^s f_i(\rho,x_1-\int_\rho^t u_{n+1}(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),..,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n))d\nu,...,x_n-$$

$$-\int_\rho^t u_1(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),..,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu,u_1(\nu,p_1(\nu,t,x_1,...,x_n),..,p_n(\nu,t,x_1,...,x_n),..u_n)d\nu \quad (9)$$

Обозначив $\omega_i(s,t,x_1,...,x_n)=u_i(s,p_1(s,t,x_1,...,x_n),...,p_n(s,t,x_1,...,x_n))$ приходим к (3).

Напротив, пусть непрерывно дифференцируемые функции $\omega_i(s,t,x_1,...,x_n),\quad i=1,2,...,n$ обращают систему и.у. (3) в тождество.

Обозначим

$$W_i(s,t,x_1,...,x_n)=\frac{\partial\omega_i(s,t,x_1,...,x_n))}{\partial t}+\sum_{k=1}^n\omega_{n+1-k}(t,x_1,...,x_n)\frac{\partial\omega_i(s,t,x_1,...,x_n)}{\partial x_k},\ i=1,2,\dots,n.$$

Непосредственным дифференцированием из (3) выводится тождество

$$W_i(s,t,x_1,...,x_n)=-\sum_{r=1}^n\varphi_{x_r}\int_0^t W_r(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu-$$

$$-\int_0^s\sum_{r=1}^n f_{x_r}\int_\rho^t W_r(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu d\rho+\int_0^s\sum_{r=1}^n f_{x_r}W_r(\rho,t,x_1,...,x_n)d\rho$$

На основании этого тождества определяется интервал изменения аргумента *t*, в котором *W*=0. Кроме этого, из (3) вытекает, что $\frac{\partial\omega_i}{\partial s}=f_i$. С учетом отмеченных фактов, подставляя $\omega_i(t,t,x_1,...,x_n)=u_i(t,x_1,...,x_n),\quad i=1,2,..,n$ в (1) и (2), убеждаемся, что на всем интервале изменения *t*, на котором *W*=0, $\omega_i(t,t,x_1,...,x_n),\quad i=1,2,..,n$ удовлетворяют начальной задаче (1), (2).

Лемма 5. Существует такое $T^*>0$, что система и.у. (3) имеет единственное решение, принадлежащее $\overline{C}^{\underbrace{1,1,...,1}_{n\, раз},\underbrace{1,...,1}_{n\, раз}}([0,T]\times[0,T]\times R^{2n})$.

Доказательство леммы 5. Записываем систему и.у. (3) в виде одного (векторного) равенства $\theta = A\theta$, где $\theta=(\theta_1,\theta_2,...,\theta_n)$ - вектор-функция от переменных $(s,t,x_1,x_2,...,x_n)$, с компонентами-искомыми функциями $\theta_1=\omega_1(s,t,x_1,x_2,...,x_n)$, $\theta_2=\omega_2(s,t,x_1,x_2,...,x_n)$, …, $\theta_n=\omega_n(s,t,x_1,x_2,...,x_n)$, а компоненты оператора $A=(A_1,A_2,...,A_n)$ определены равенствами:

$$A_i\theta=\varphi_i(x_1-\int_0^t\theta_{n+1}(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu,...,x_n-\int_0^t\theta_1(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu)+$$

$$+\int_0^s f_i(\rho,x_1-\int_\rho^t\theta_{n+1}(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu,...,x_n-\int_\rho^t\theta_1(\nu,t,x_1,...,x_n)d\nu,\theta_1(\rho,t,x_1,...,x_n),\theta_2,...,\theta_n)d\rho,$$

i=1,2,…,n.

Имеем при $t\le T^*\le T$

$$\left|A_i\theta\right|\le\left\|\varphi_i\right\|_{R^n}+\left\|f_i\right\|_{G_{n+1}(T)}t\le\Omega_0(T^*)$$

где $\Omega_0(S)\equiv\left\|\varphi_i\right\|_{R^n}+\left\|f_i\right\|_{G_{n+1}(T)}S.$

Далее, при $s\le t\le T^*\le T$:

$$\left|A_i\theta^1-A_i\theta^2\right|\le T^*\Omega_i\left\|\theta^1-\theta^2\right\|,$$

где $\Omega_i=(\sum_{j=1}^n(L_{ij}+M_{ij}T+N_{ij}T^2)$, $\varphi_i(x_1,...,x_n)\in Lip(L_{ij}\big|_{x_j})$,

$L_{ij}>0-const,\ i,j=1,2,...,n.$

$f_i(t,x_1,...,x_n,u_1,u_2,...,u_n)\in Lip(M_{ij}\big|_{x_j},N_{ij}\big|_{u_j}),\ M_{ij}>0-const,\ N_{ij}>0-const,$

i,j=1,2,…,n.

Таким образом, условия Леммы 2 выполнены и мы заключаем, что уравнение (3) имеет решение в пространстве функций с нормой, не превышающей $2\Omega_0(T^*)$. Доказательство теоремы проведено.

Заключение

Получены достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для системы нелинейных д.у. в ч.п. первого порядка со многими переменными. Полученные результаты свидетельствуют о том, что м.д. а. применяется и для решения системы нелинейных д.у. в ч.п. Приведенную схему применения м.д.а. для решения системы нелинейных д.у. в ч.п. можно использовать при решении системы нелинейных уравнений других классов.

Список литературы / References

1. Иманалиев М.И. Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными / М.И. Иманалиев. – Бишкек: Илим, 1992. – 112 с.
2. Панков П.С. Квазикоммутативность дифференциальных операторов и ее приложение к обоснованию метода дополнительного аргумента / П.С. Панков, Т.М. Иманалиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, Выпуск. 28. – Бишкек: Илим, 1999. – С. 30 – 34.
3. Аширбаева А.Ж. Приближенное решение начальной задачи для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка методом дополнительного аргумента / А.Ж. Аширбаева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2014. – Выпуск. 46. – С. 37 – 40.
4. Иманалиев М.И. К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема/ М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Доклады Российской АН. – 1992. – Т. 323. – № 3. – С. 410 – 414.
5. Иманалиев М.И. К теории почти солитонных решений нелинейного дифференциального уравнения в частных производных типа Кортевега-де Фриза четвертого порядка / М.И. Иманалиев, Т.М. Иманалиев, У.М.

Иманалиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2003. – Выпуск 32. – С.17 – 23.

6. Иманалиев М.И. К теории нелинейных уравнений с дифференциальным оператором типа полной производной по времени / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Доклады Российской АН. – 1993. – Т. 329. – № 5. – С. 543 – 546.
7. Иманалиев М.И. К теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных типа Кортевега - де Фриза / М.И. Иманалиев, П.С. Панков, Т.М. Иманалиев // Доклады Российской АН. – 1995. – Т. 342. – № 1. – С.17 – 19.
8. Панков П.С. Приближенное решение начальной задачи для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных методом дополнительного аргумента / П.С.Панков, Т.М. Иманалиев, Г.М. Кененбаева // Юбилейная научная конференция, посвященная 50-летию развития математики в Академии наук Казахстана: Тезис, доклады – Алматы, 1995. – С. 164.
9. Аширбаева А.Ж. Решение нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом дополнительного аргумента. – Бишкек: Илим, 2013. – 134 с.
10. Иманалиев М.И. К теории систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Доклады АН. – 1992. – Т. 325. – № 6. – С.1111 – 1115.