МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ОШСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. академика М.М.Адышева

На правах рукописи
УДК 517. 928

МАМАЗИАЕВА ЭЛЬМИРА АМАНОВНА

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА

Специальность 01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель,
д.ф.-м.н., доцент
А.Ж. Ашрбаева

Ош - 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

Перечень условных обозначений……………….……………………..
Введение………………………………………………………………
Глава 1. Обзор литературы и результатов………………..……………

1.1. Обзор литературы……………………………………..…………..

1.2. Обзор результатов диссертации……………………………………….

1.3. Заключение по главе 1 ………………………………………………

Глава 2. Исследование решений квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

2.1. Исследование решений нелинейного операторно-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка

2.2. Построение решений нелинейных интегро - дифференциальных уравнений второго порядка с частной производной под знаком интеграла

2.3. Заключение по главе 2

Глава 3. Исследование решений интегро- дифференциальных уравнений гиперболического типа, нелинейных относительно неизвестной функции

3.1 Решение нелинейного операторно-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа

3.2 Сведение нелинейной задачи электрических колебаний в проводах к системам интегральных уравнений методом дополнительного аргумента

3.3 Исследование решений более общего вида операторно-дифференциального уравнения гиперболического типа

3.4. Заключение по главе 3

Глава 4. Решение нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными

4.1. Решение квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными методом дополнительного аргумента

4.2. Исследование решений нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными
4.3. Сведение нелинейной задачи электрических колебаний в проводах со многими переменными к системам интегральных уравнений
4.4. Исследование решений операторно-дифференциального уравнения гиперболического типа
4.5. Заключение по главе 4
Выводы
Список использованных источников
Приложение

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

R – множество вещественных чисел;

R^n $(n \in N)$ – n-мерное вещественное евклидово пространство и его точки $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

$R_1^2=[0,\infty)\times R$; $R_{++}=(0,\infty)$;

Здесь и далее $T \in R_{++}$ - некоторое фиксированное число;

$G_2(T)=[0,T]\times R$; $G_{n+1}(T)=[0,T]\times R^n$;

$Q_2(T)=\{(t_1,t_2,x)\,|\, 0\le t_1 \le t_2 \le T,\, x\in R\}$;

$Q_2^n(T)=\{(t_1,t_2,x)\,|\,0\le t_1 \le t_2 \le T,\, x\in R^n\}$;

$Q_2=\{(t_1,t_2,x)\,|\,0\le t_1 \le t_2 <\infty,\, x\in R\}$;

Ω - подмножества евклидова пространства R^n;

$\overline{C}, \overline{C}^{(\ldots)}$ - пространства функций с дополнительным условием ограниченности (соответственно и для указанных производных);

$C^{(k)}(\Omega)$- пространства функций, определенных и непрерывных (вместе со всеми своими производными до порядка k) на Ω;

$\overline{C}_b^{(k)}$ -класс функций, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными до k-порядка;

Дифференциальные операторы:

$$D[\omega]=\frac{\partial}{\partial t}+\omega\frac{\partial}{\partial x},\ \ D_n[\omega]=\frac{\partial}{\partial t}+\omega\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k},$$

Оператор $F(t;u(t,\xi):\xi)$ записан в виде: функция каких переменных получается; на функцию скольких переменных действует оператор (по аналогии с записью интегралов); связанные переменные в этой функции.

Например:

$$F(t;u(t,\xi):\xi)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}K(t,s,\xi)\frac{\partial u(s,\xi)}{\partial \xi}d\xi ds+g(t),\quad (t,x)\in R_1^2$$

$$H(u(s,\xi):s,\xi)=\int_0^1\int_0^{\infty}\ldots\int_0^{\infty} u^2(s,\xi_1,\ldots\xi_n)d\xi_1\ldots d\xi_n ds$$ (если интеграл сходится);

$F(t,x;u)$ - оператор, содержащий неизвестную функцию в целом и под знаком интеграла.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. В настоящее время развивается метод изучения дифференциальных уравнений и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных под названием метод дополнительного аргумента.

Основы метода дополнительного аргумента созданы в монографии М. И. Иманалиева [18].

Затем в работах А.Ж. Аширбаевой [1] метод был распространен на нелинейные интегро-дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка с частными производными под знаком интеграла, с вырожденным ядром и с другими особенностями, а также на уравнения со многими пространственными переменными.

С помощью этого метода начальная задача для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений сведена к удобной для исследования системе интегральных уравнений.

В работах М.И. Иманалиева, П.С. Панкова, Т.М. Иманалиева методом дополнительного аргумента были исследованы смешанные задачи для уравнений с дифференциальным оператором типа полной производной по времени. В этих исследованиях появились преимущества метода дополнительного аргумента перед другими методами исследования подобных уравнений, заключающиеся в том, что система интегральных уравнений, к которой приводится исходная задача, не содержит суперпозиции неизвестных функций. Кроме того, решение исходной задачи получается из решения интегральных уравнений при помощи понижения размерности множества аргументов, а не при помощи обращения нелинейного алгебраического оператора. С использованием основных идей метода дополнительного аргумента были исследованы дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных типа Кортевега-де-Фриза, а также нелинейные волновые уравнения.

Осуществлено применение метода дополнительного аргумента для приближенных решений уравнений и показаны преимущества этого метода перед известными методами характеристик и сеток. Здесь следует отметить работы П.С. Панкова, Т.М. Иманалиева Г.М. Кененбаевой.

В настоящее время идея метода дополнительного аргумента находит свое применение при исследовании нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков. Изучению таких уравнений посвящены работы М.И. Иманалиева, П.С. Панкова, Т.М. Иманалиева, А.Ж. Аширбаевой.

Имеются такие классы дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, которые представляют теоретический интерес. Развитие метода дополнительного аргумента к таким классам функций определяют актуальность настоящей работы.

Цель исследования. Целью данной работы является исследование решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка методом дополнительного аргумента.

Методика исследования. С помощью метода дополнительного аргумента начальные задачи для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка сводятся к системам интегральных уравнений. Доказательство существования решений таких систем с помощью принципа сжимающих отображений обеспечивает существование решений исходных задач.

Научная новизна работы. Получены следующие результаты:

- получены достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка;

- построено решение нелинейного интегро - дифференциального уравнения второго порядка с частной производной под знаком интеграла;

- начальная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа, где коэффициенты при частных производных первого порядка зависят от неизвестной функции, новым способом сведена к решению системы интегральных уравнений;

- полученные результаты обобщены для многомерного случая

Теоретическая и практическая ценность. Результаты данной работы развивает теорию дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных и подтверждены строгими доказательствами. По полученным результатам работы построены решения конкретных задач.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Доказательство теоремы существования и единственности решения начальных задач для квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка методом дополнительного аргумента;
2. Сведение нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа, где

коэффициенты при частных производных первого порядка зависят от неизвестной функции к системе интегральных уравнений;

3. Осуществлено применение метода дополнительного аргумента для интегро-дифференциальных уравнения в частных производных второго порядка со многими пространственными переменными.

Апробация работы. Результаты исследований докладывались на на международной научной конференции «Рахматулинские-Ормонбековские чтения» (Бишкек, июнь 2013), на V конгрессе математиков Тюркского мира (с. Булан-Соготту, июнь 2014), на Иссык-Кульском международном математическом форуме (с. Бозтери, июнь 2014), на научной конференции, посвященной к 75-летию ОшГУ (Ош, 2014, 22-24 октябрь), на семинарах кафедры «Прикладная математика» Ошского технологического университета (2010-2016).

Публикации. Основные результаты работы опубликованы статьях [39-47], тезисах докладов [48-51]. В [41-45,47] соавтору принадлежит постановка задачи, соискателю – получение конкретных результатов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, списка использованных источников, выводов, всего 80 страниц.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н., доценту Аширбаевой Айжаркын Жоробековне за постановку проблемы исследования и постоянное внимание к работе.

ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ И РЕЗУЛЬТАТОВ

1.1. Обзор литературы

В настоящее время идея метода дополнительного аргумента находит свое применение при исследовании нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков

В работе [3] предложена общая схема исследования нелинейных дифференциальных и интегро–дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка на основе метода дополнительного аргумента. Начальные задачи для таких уравнений сведены к системам интегральных уравнений. Получены достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с дифференциальным оператором, являющимся любой степенью дифференциального оператора первого порядка, в том числе для случая многих пространственных переменных.

В [22,25] с использованием основных идей метода дополнительного аргумента были исследованы дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных типа Кортевега-де-Фриза.

В работах [2,3,4,6] начальная задача для интегро-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа, где коэффициенты при частных производных первого порядка не зависят от неизвестной функции, новым способом сведена к решению интегрального уравнения. Предложена схема приведения нелинейных интегро-дифференциальных уравнений четвертого порядка, где коэффициенты при частных производных до третьего порядка включительно зависят от неизвестной функции, к системам интегральных уравнений.

В [26] исследуется квазилинейное дифференциальное уравнение в частных производных третьего порядка, с составным оператором Лапласа, с начальными и предельными условиями. С помощью метода дополнительного аргумента задача сводится к интегральному уравнению, в котором вспомогательная функция определяется методом последовательных приближений.

В [52] показано, что метод дополнительного аргумента может применяться и для численного решения начальных задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, при этом он имеет преимущества перед методами, использующими фиксированные сетки (не производится численное дифференцирование) и перед методами типа метода характеристик (расчет ведется не вдоль ломаных, а вдоль прямых). Кроме того, этот метод, как использующий интегральные уравнения, более удобен для получения гарантированных результатов.

В [7] показано, что метод дополнительного аргумента может применяться и для численного решения начальных задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высших порядков.

1.2. Обзор результатов диссертации

Будем использовать следующее следствие из принципа сжимающих отображений Банаха.

Лемма 1.2.1. Если оператор *A* в банаховом пространстве удовлетворяет условиям

1) $||A(0)||\leq c = const$; 2) $||Ax-Ay|| \leq ½\ ||x-y||$ в шаре $||x||\leq 2c,$

то он имеет в этом шаре одну неподвижную точку.

В данной работе рассмотрены нелинейные интегро-дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. С помощью метода дополнительного аргумента начальные задачи рассмотренных уравнений сводятся к системам интегральных уравнений.

Доказательства существования решений таких систем с помощью принципа сжимающих отображений обеспечивают существование решений исходных задач.

В 2.1. рассмотрено исследование решений нелинейного операторно-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка вида:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = u(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\left[u(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right] - \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + F(t;u(t,\xi):\xi), \qquad (2.2.1)$$

$(t,x)\in G_2(T),$

с начальными условиями

$$u(0,x) \ = \varphi(x), \qquad (2.1.2)$$

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \qquad (2.1.3)$$

Доказана следующая

ТЕОРЕМА 2.1.1. Если 1) оператор *F*– непрерывный по первой переменной;

2) он удовлетворяет условию Липшица: существует такое *L>0,* что для любого $T^*\leq T$

$$\| F(t;u_1(t,\xi):\xi) - F(t;u_2(t,\xi):\xi)\|_{G_2(T^*)} \leq L\,\| u_1(t,x) - u_2(t,x)\|_{G_2(T^*)},$$

3) $\varphi(x)\in \overline{C}^{(1)}(R), \psi(x)\in \overline{C}(R)$ и удовлетворяют условию $\psi(x)+\varphi(x)\varphi'(x)=0.$

Тогда существует такое $T\leq T^*$, явно определяемое на основе исходных данных, что задачи (2.1.1)-(2.1.2) имеет ограниченное во всей области $G_2(T)$ решение $u(t,x)$, которое при $t=s$ совпадает с решением интегрального уравнения

$$\nu(\tau,t,x) = J(\tau,t;\nu(s,w,x):s,w)), \qquad (2.1.8)$$

где

$$J(\tau,t;v(s,w,x):s,w)) = A(\tau, p(\tau,t,x;v(s,t,x):s);v(s,w,x):s,w),\ (s,t,x)\in Q_2(T).$$

$$A(t,x;v(s,w,x):s,w) = \varphi(p(0,t,x;v(s,t,x):s)) + \int_0^t (t-\rho)F(\rho;v(\rho,\rho,\xi):\xi)d\rho,$$

$$p(\tau,t,x;v(\rho,t,x):\rho) = x - \int_\tau^t v(\rho,t,x)d\rho.$$

Рассмотрен конкретный

Пример 2.1.1.

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = u(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\left[u(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right] - \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + f(t), \qquad (2.1.15)$$

$$\partial u(0,x)/\partial t = -x, \qquad (2.1.16)$$

$$u(0,x) = x. \qquad (2.1.17)$$

Решение задачи 2.1.15)-(2.1.17) имеет вид:

$$u(t,x) = \frac{x}{1+t} - \frac{1}{1+t}\int_0^t \int_0^s (s-\nu)f(\nu)d\nu ds + \int_0^t (t-\nu)f(\nu)d\nu.$$

В 2.2. построено единственное решение нелинейного интегро - дифференциального уравнения второго порядка с частной производной под знаком интеграла

Рассматривается нелинейное интегро-дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка вида:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = u(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\left[u(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right] - \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} +$$

$$+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} K(t,s,\xi)\frac{\partial u(s,\xi)}{\partial \xi}d\xi ds + g(t), \quad (t,x)\in R_1^2 \qquad (2.2.1)$$

с начальными условиями

$$\frac{\partial^k u(t,x)}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = (-1)^k x, \quad k = 0,1 \qquad (2.2.2)$$

Доказана

ТЕОРЕМА 2.2.1. Пусть $\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty}|K(t,s,\xi)|d\xi ds \le \gamma = const.$

Тогда задача (2.2.1),(2.2.2) имеет единственное решение в пространстве $\overline{C}^{(2)}(R_1^2)$ в виде

$$u(t,x) = x - [1+t]^{-1}\{xt + \int_0^t\int_0^\eta (\eta-\rho)[\int_0^\rho\int_{-\infty}^{\infty} K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s}d\xi ds d\tau + q(\rho)]d\rho\}d\eta +$$

$$+\int_0^t (t-\rho)[\int_0^\rho\int_{-\infty}^{\infty} K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s}d\xi ds + q(\rho)\Bigg]d\rho,$$

В разделе 3.1 рассмотрено применение метода дополнительного аргумента для интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа вида:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2(t,x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + c(t,x,u)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + F(t,x;u), \qquad (3.1.1)$$

$$(t,x) \in G_2(T),$$

с начальными условиями

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = u_k(x), \quad k=0,1, \quad x \in R. \qquad (3.1.2)$$

Введем следующие обозначения:

$$\vartheta_i(t,x) = D[(-1)^i a(t,x)]u, \qquad (3.1.3)$$

$$g_i(t,x,u) = \frac{1}{a(t,x)}[c(t,x,u) + (-1)^i(a_t(t,x) + (-1)^{i+1}a(t,x)a_x(t,x)], \quad i=1,2, \quad (3.1.4)$$

$$f_i(t,x,u) = (-1)^{i+1} D[(-1)^{i+1}a(t,x)]g_i(t,x,u), \quad i=1,2,$$

$$r_i(t,x,u) = (-1)^{i+1}\frac{\partial g_i(t,x,u)}{\partial u}, \quad i=1,2.$$

Теорема 3.1.1. Пусть 1) $u_k(x) \in \overline{C}_b^{(2-k)}(R), \quad k=0,1,$ $a(t,x) \in \overline{C}_b^{(2)}(G_2(T)), \quad c(t,x,u) \in \overline{C}_b^{(2)}(G_2(T)\times R)$ и вместе со своими производными удовлетворяют условию Липшица по переменной u.

2) оператор $F(t,x;u)$ отображает непрерывные функции в непрерывные и удовлетворяет условию Липшица:

$$\left|F(t,x;u_1) - F(t,x;u_2)\right| \le L\|u_1 - u_2\|_{C(G_2(T))}, \quad L = const.$$

Тогда существует такое $T^* > 0$, что задача (3.1.1), (3.1.2) имеет единственное решение в $\overline{C}_b^{(2)}(G_2(T^*))$.

Доказана эквивалентность задачи (3.1.1)-(3.1.2) и системы интегральных уравнений

$$u(t,x) = u_0(p_i(0,t,x) + \int_0^t \vartheta_i(s,p_i(s.t.x))ds \qquad (3.1.5)$$

$$\vartheta_i(t,x) = \frac{1}{2}\varphi_i(p_i(0,t,x)) + (-1)^{i+1}\frac{1}{2}g_i(t,x,u)u + (-1)^i\frac{1}{2}\int_0^t g_i(s,p_i,u(s,p_i))\times$$

$$\times\vartheta_i(s,p_i)ds - \frac{1}{2}\int_0^t f_{i.}(s,p_i,u(s,p_i))u(s,p_i)ds - \frac{1}{2}\int_0^t r_i(s,p_i,u(s,p_i))u(s,p_i)\times \qquad (3.1.6)$$

$$\times\vartheta_j(s,p_i)ds + \int_0^t F(s,p_i;u(s,p_i))ds, \quad i,j=1,2; \quad i \ne j.$$

где

$$\left[2\vartheta_i(t,x) + (-1)^i g_i(t,x,u)u(t,x)\right]_{t=0} = \varphi_i(x) \quad i = 1,2, \qquad (3.1.7)$$

$p_i(s,t,x), \quad i = 1,2$ – соответствующие решения интегральных уравнений:

$$p_i(s,t,x) = x + (-1)^i \int_s^t a(\tau, p_i(\tau,t,x))d\tau, \quad 0 \le s \le t \le T. \qquad (3.1.8)$$

В разделе 3.2 рассмотрено сведение нелинейной задачи электрических колебаний в проводах к системам интегральных уравнений методом дополнительного аргумента.

Рассмотрено нелинейное уравнение для определения напряжения или электрического тока $u(t,x)$:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2(t,x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + b(t,x,u)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + F(t,x;u), \qquad (3.2.1)$$

$(t,x) \in G_2(T)$,

с начальными условиями (3.1.2).

Теорема 3.2.1. Пусть выполняются все условия теоремы 3.1.1., $b(t,x,u) \in \overline{C}_b^{(2)}(G_2(T) \times R)$ и вместе со своими производными удовлетворяют условию Липшица.

Тогда существует такое $T^* > 0$, что задача (3.2.1), (3.1.2) имеет единственное решение в $\overline{C}_b^{(2)}(G_2(T^*))$.

В 3.3 методом дополнительного аргумента исследовано решение более общего вида операторно-дифференциального уравнения гиперболического типа.

Рассмотрим операторно-дифференциальное уравнение гиперболического типа вида:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2(t,x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + b(t,x,u)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + c(t,x,u)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + F(t,x;u), \ (3.3.1)$$

$(t,x) \in G_2(T)$

с начальными условиями (3.1.2).

Теорема 3.3.1. Пусть выполняются все условия теоремы 3.2.1.

Тогда существует такое $T^* > 0$, что задача (3.3.1), (3.1.2) имеет единственное решение в $\overline{C_b}^{(2)}(G_2(T^*))$.

Пример. 3.3.1. Проверим эквивалентность на примере.

Рассмотрим уравнение колебания струны:

$$\frac{\partial^2 u(t.x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \qquad (3.3.6)$$

с начальными условиями (3.1.2)

Для задачи решения интегральных уравнений (3.3.6), (3.1.2) имеют вид:

$p_i(s,t,x) = x + (-1)^i (at - as)$,

Для (3.3.6)-(3.1.2) уравнение (3.3.2) имеет следующий вид:

$$\vartheta_1(t,x) = \frac{1}{2}\varphi(p_1(0,t,x)),$$

где

$$\varphi(x) = 2(u_t - au_x)|_{t=0} = 2(u_1(x) - au_0^{/}(x)).$$

Следовательно

$$\vartheta_1(t,x) = u_1(x-at) - au_0^{/}(x-at).$$

Из обозначения $\vartheta_1(t,x) = D[-a(t,x)]u(t,x)$ имеем

$$u(t,x) = u_0(x+at) + \int_0^t u_1(x+at-2as)ds - a\int_0^t u_0^{/}(x+at-2as)ds =$$

$$= u_0(x+at) + \int_0^t u_1(x+at-2as)ds +$$

$$+\frac{1}{2}u_0(x+at-2as)|_0^t = u_0(x+at) + \frac{1}{2}u_0(x-at) - \frac{1}{2}u_0(x+at) + \int_0^t u_1(x+at-2as)ds =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x+at-2as = \tau \\ ds = -\dfrac{d\tau}{2a} \\ s=0 \quad \tau = x+at \\ s=t \quad \tau = x-at \end{array} \right| = \frac{u_0(a-xt)+u_0(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(\tau)d\tau =$$

Следовательно, получаем формулу Даламбера:

$$u(t,x) = \frac{u_0(a-xt)+u_0(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(\tau)d\tau$$

В разделе 4.1. рассмотрено решение квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными методом дополнительного аргумента

Рассматривается нелинейное уравнение вида:

$$\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t^2} = u(t,x_1,x_2,...,x_n)\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left[u(t,x_1,x_2,...,x_n)\sum_{j=1}^n \frac{\partial u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x}\right] +$$

$$+\frac{\partial u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t}\sum_{i=1}^n \frac{\partial u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i} + F(t;u(t,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):\xi_1,\xi_2,...,\xi_n), \qquad (4.1.1)$$

$(t, x_1, x_2, ..., x_n) \in G_{n+1}(T)$.

Рассмотрим уравнение (4.1.1) с начальными условиями

$$\frac{\partial^k u(t, x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = \widetilde{u}_k(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{4.1.2}$$

$k = 0,1, \quad (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$.

ТЕОРЕМА 4.1.1. Если 1) оператор F– непрерывный по первой переменной;

2) он удовлетворяет условию Липшица: существует такое $L > 0$, что для любого $T_* \le T$

$$\| F(t; u_1(t, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) : \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) - F(t; u_2(t, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) : \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \|_{G_{n+1}(T_*)} \le$$
$$\le L \| u_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) - u_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \|_{G_{n+1}(T_*)},$$

3) $\widetilde{u}_0(x_1, x_2, ..., x_n) \in \overline{C}_b^{(1)}(R^n), \widetilde{u}_1(x_1, x_2, ..., x_n) \in \overline{C}(R^n)$

и удовлетворяют условию

$$\widetilde{u}_1(x_1, x_2, ..., x_n) - \widetilde{u}_0(x_1, x_2, ..., x_n) \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial \widetilde{u}_0(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} = 0. \tag{4.1.13}$$

Тогда существует такое $T \le T^*$, явно определяемое на основе исходных данных, что задачи (4.1.1), (4.1.2) имеет единственное решение, ограниченное во всей области $G_{n+1}(T)$.

В 4.2. рассматривается дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка вида:

$$\frac{\partial^2 u(t, x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial t^2} = a^2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u(t, x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i \partial x_j} +$$
$$+ c(t, x_1, x_2, ..., x_n, u) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(t, x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} + F(t, x_1, x_2, ..., x_n, u(t, x_1, x_2, ..., x_n)) \tag{4.2.1}$$

$(t, x_1, x_2, ..., x_n) \in G_{n+1}(T)$,

с начальными условиями

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = u_k(x_1, x_2, ..., x_n), \quad k = 0,1, \quad (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n. \tag{4.2.2}$$

Введя обозначение

$\vartheta_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) = D_n[(-1)^i a(t, x_1, x_2, ..., x_n)] u(t, x_1, x_2, ..., x_n)$,

$$g_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)=\frac{1}{a(t,x_1,x_2,...,x_n)}[c(t,x_1,x_2,...,x_n,u)+$$
$$+(-1)^i D_n[(-1)^{i+1}a(t,x_1,x_2,...,x_n)]a(t,x_1,x_2,...,x_n)],\quad i=1,2,$$
$$f_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)=(-1)^{i+1}D_n[(-1)^{i+1}a(t,x_1,x_2,...,x_n)]g_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u),\quad i=1,2,$$
$$r_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)=(-1)^{i+1}\frac{\partial g_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)}{\partial u},\quad i=1,2,$$

Доказана следующая

Теорема 4.2.2. Пусть 1) оператор $F(t,x_1,x_2,...,x_n;u)$ отображает непрерывные функции в непрерывные и удовлетворяет условию Липшица:
$\left|F(t,x_1,x_2,...,x_n;u_1)-F(t,x_1,x_2,...,x_n;u_2)\right|\le L\|u_1-u_2\|_{C(G_{n+1}(T))},\quad L=const,$
$u_k(x_1,x_2,...,x_n)\in\overline{C}_b^{(2-k)}(R^n),\ k=0,1,\ a(t,x_1,x_2,...,x_n)\in\overline{C}_b^{(2)}(G_{n+1}(T)),$
$b(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\in\overline{C}_b^{(2)}(G_{n+1}(T)\times R)$ и вместе со своими производными удовлетворяют условию Липшица по u.

Тогда существует такое $T^*>0$, что задача (4.2.1), (4.2.2) имеет единственное решение в $\overline{C}_b^{(2)}(G_{n+1}(T^*))$.

В разделе 4.3.рассмотрено сведение нелинейной задачи электрических колебаний в проводах со многими переменными к системам интегральных уравнений

Рассмотрено уравнение:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t^2}=a^2(t,x_1,x_2,...,x_n)\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x^2}+\\+b(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\frac{\partial u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t}+F(t,x_1,x_2,...,x_n;u),\end{gathered}\tag{4.3.1}$$
$(t,x_1,x_2,...,x_n)\in G_{n+1}(T),$
с начальными условиями (4.2.2).

Доказана

ТЕОРЕМА 4.3.1. Пусть выполняются все условия теоремы 4.2.1, $b(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\in\overline{C}_b^{(2)}(G_2(T)\times R)$ и вместе со своими производными удовлетворяют условию Липшица.

Тогда существует такое $T^*>0$, что задача (4.3.1), (4.2.2) имеет единственное решение в $\overline{C}_b^{(2)}(G_2(T^*))$.

В 4.4. рассмотрено исследование решений операторно-дифференциального уравнения гиперболического типа со многими переменными вида

$$\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t^2} = a^2(t,x_1,x_2,...,x_n)\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x^2} +$$
$$+ b(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\frac{\partial u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t} + c(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\frac{\partial u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x} + \quad (4.4.1)$$
$$+ F(t,x_1,x_2,...,x_n;u),$$
$$(t,x_1,x_2,...,x_n) \in G_{n+1}(T),$$

с начальными условиями (4.2.2).

Доказана

ТЕОРЕМА 4.4.1. Пусть выполняются все условия теоремы 4.3.1.

Тогда существует такое $T^* > 0$, что задача (4.4.1), (4.2.2) имеет единственное решение в $\overline{C}_b^{(2)}(G_2(T^*))$.

ГЛАВА 2. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

2.1. Исследование решений нелинейного операторно-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка

Рассмотрим применение метода дополнительного аргумента для нелинейного уравнения вида:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = u(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\left[u(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right] - \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + F(t;u(t,\xi):\xi), \qquad (2.2.1)$$

$(t,x) \in G_2(T)$,

с начальными условиями

$$u(0,x) \ = \varphi(x), \qquad (2.1.2)$$

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \qquad (2.1.3)$$

Будем использовать стандартное обозначение метода дополнительного аргумента:

$$p(\tau,t,x;v(\rho,t,x):\rho) = x - \int_{\tau}^{t} v(\rho,t,x)d\rho, \quad (\tau,t,x) \in Q_2(T), \qquad (2.1.4)$$

и общее уравнение метода дополнительного аргумента:

$$u(t,x) = v(t,t,x) \qquad (2.1.5)$$

Введем оператор

$$A(t,x;v(s,w,x):s,w) = \varphi(p(0,t,x;v(s,t,x):s)) + \int_0^t (t-\rho)F(\rho;v(\rho,\rho,\xi):\xi)d\rho,$$

Если имеет место равенство

$$D[v(t,t,x)]v(\tau,t,x) = 0, \qquad (2.1.6)$$

то из (2.1.4) вытекает соотношение

$$D[v(t,t,x)]p(\tau,t,x;v) = 0\,. \qquad (2.1.7)$$

ТЕОРЕМА 2.1.1. Если 1) оператор *F*– непрерывный по первой переменной;

2) он удовлетворяет условию Липшица: существует такое *L>0,* что для любого *T*≤T*

$$\| F(t;u_1(t,\xi):\xi) - F(t;u_2(t,\xi):\xi) \|_{G_2(T*)} \le L \, \| u_1(t,x) - u_2(t,x) \|_{G_2(T*)},$$

3) $\varphi(x)\in \overline{C}^{(1)}(R), \psi(x)\in \overline{C}(R)$ и удовлетворяют условию $\psi(x)+\varphi(x)\varphi'(x)=0.$

Тогда существует такое $T\le T_*$, явно определяемое на основе исходных данных, что задача (2.1.1)-(2.1.2) имеет ограниченное во всей области $G_2(T)$ решение $u(t,x)$, которое при $t=s$ совпадает с решением интегрального уравнения

$$\nu(\tau,t,x)=J(\tau,t;\nu(s,w,x):s,w)), \qquad (2.1.8)$$

где

$J(\tau,t;\nu(s,w,x):s,w))=A(\tau,p(\tau,t,x;\nu(s,t,x):s);\nu(s,w,x):s,w),(s,t,x)\in Q_2(T)$.

Представим основные этапы доказательства теоремы в виде лемм.

Лемма 2.1.1. Существует такое $T>0$, что интегральное уравнение (2.1.8) имеет единственное решение в $\overline{C}(Q_2(T^*))$.

Доказательство.

Имеем при $t\le T^*\le T$:

$$\left|J(\tau,t;0)\right|=\left|A(\tau,p(\tau,t,x;0;0\right|=$$

$$=\left|\varphi(p(0,t,x;0)+\int_0^t(t-\rho)F(\rho;0)d\rho,\right|\le\left|\varphi(p(0,t,x;0)\right|+\left|\int_0^t(t-\rho)F(\rho;0)d\rho,\right|\le$$

$$\le|\varphi\|_R+\|F(t;0)\|_{[0,T]}\,t\le\Omega_0(T^*),$$

где $\Omega_0(S)\equiv|\varphi\|_R+\|F(t;0)\|_{[0,T]}\,S.$

Далее, при $\tau\le t\le T^*\le T$:

$$\left|J(\tau,t;\nu_1(s,w,x):s,w))-J(\tau,t;\nu_2(s,w,x):s,w))\right|=$$

$$\left|A(\tau,p(\tau,t,x;\nu_1(s,t,x):s);\nu_1(s,w,x):s,w)-A(\tau,p(\tau,t,x;\nu_2(s,t,x):s);\nu_2(s,w,x):s,w)\right|\le$$

$$\le\left|\varphi(p(0,t,x;\nu_1(s,t,x):s))+\int_0^t(t-\rho)F(\rho;\nu_1(\rho,\rho,\xi):\xi)d\rho-\right.$$

$$\left.-\varphi(p(0,t,x;\nu_2(s,t,x):s))+\int_0^t(t-\rho)F(\rho;\nu_2(\rho,\rho,\xi):\xi)d\rho\right|\le$$

$$\le\left|\varphi(p(0,t,x;\nu_1(s,t,x):s))-\varphi(p(0,t,x;\nu_2(s,t,x):s))\right|+$$

$$+\left|\int_0^t(t-\rho)F(\rho;\nu_1(\rho,\rho,\xi):\xi)d\rho-\int_0^t(t-\rho)F(\rho;\nu_2(\rho,\rho,\xi):\xi)d\rho\right|\le$$

$$\le\left\|\varphi'\right\|\left|p(0,t,x;\nu_1(s,t,x):s))-p(0,t,x;\nu_2(s,t,x):s))\right|+$$

$$+\int_0^t(t-\rho)\left|F(\rho;\nu_1(\rho,\rho,\xi):\xi)-F(\rho;\nu_2(\rho,\rho,\xi):\xi)\right|d\rho\le$$

$$\le \|\varphi'\| \int_0^t | v_1(s,t,x) - v_1(s,t,x) | \, ds + \int_0^t (t-\rho) L \, \| v_1(w,s,x) - v_2(w,s,x) \|_{G_2(t)} \, d\rho \le$$

$$\le (\|\varphi'\| t + t \frac{t}{2} L \, \| v_1(w,s,x) - v_2(w,s,x) \|_{G_2(t)} \le$$

$$\le t \, (\|\varphi'\| + \frac{T}{2} L) \, \| v_1(w,s,x) - v_2(w,s,x) \|_{G_2(t)} \le$$

$$\le T^* \Omega_1 \, \| v_1(w,s,x) - v_2(w,s,x) \|_{G_2(T^*)},$$

где

$$\Omega_1 = \|\varphi'\| + \frac{T}{2} L.$$

Если выбрать $T^* = 1/2/\Omega_1$, то из следствия из принципа сжимающих отображений Банаха получаем, что уравнение (2.1.8) имеет решение в пространстве функций с нормой не более $2\Omega_0(T^*)$.

Лемма 2.1.1 доказана.

Лемма 2.1.2. Если имеют место равенства (2.1.5), (2.1.6), (2.1.8),то функция $u(t,x)$ является решением задачи (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3), и наоборот.

Доказательство. Введя обозначение

$$z(t,x;u) = D[u(t,x)]u(t,x),$$

запишем уравнение (2.1.1) в виде

$$D[u(t,x)]z(t,x;u) = F(t;u(t,\xi):\xi)). \tag{2.1.9}$$

Уравнение (2.1.9) с начальными условиями (2.1.2), (2.1.3) и условием $\psi(x) + \varphi(x)\varphi'(x) = 0$ с помощью метода дополнительного аргумента сводится к решению интегро-дифференциального уравнения

$$z(t,x;u) = \int_0^t F(s;u(s,\xi:\xi) ds. \tag{2.1.10}$$

В самом деле, дифференцируя (2.1.10), получаем (2.1.9).

Полагая $t = 0$ в (2.1.10), получаем $z(0,x;u) = 0$.

Задача (2.1.10), (2.1.2), (2.1.3) с помощью метода дополнительного аргумента сводится к решению интегрального уравнения

$$u(t,x) = A(t,x;v(s,w,x):s,w) = \varphi(p(0,t,x;v(s,t,x):s))$$

$$+ \int_0^t (t-\rho) F(\rho; v(\rho,\rho,\xi):\xi) d\rho, \tag{2.1.11}$$

В самом деле, дифференцируя (2.1.11), получаем

$$D[u(t,x)]u(t,x)=\varphi'(p(0,t,x;v:s))D[u(t,x)]p(0,t,x;v:s)+F(t;u(t,\xi):\xi).$$

В силу (2.1.7) доказано выполнение (2.1.10). Полагая *t=0* в (2.1.11), получаем (2.1.2).

Лемма 2.1.2 доказана.

Лемма 2.1.3. Функция $v(\tau,t,x)\in \overline{C}_b^{(2)}(Q_2(T))$, являющаяся при $0\le t\le T^*\le T$ решением интегрального уравнения (2.1.8), будет удовлетворять (2.1.6), а функция $u(t,x)$, определенная согласно (2.1.5), удовлетворяет (2.1.11).

Доказательство. Пусть $v(\tau,t,x)\in \overline{C}_b^{(2)}(Q_2(T^*))$ обращает интегральное уравнение (2.1.8) в тождество. Непосредственным дифференцированием из (2.1.8) выводится тождество

$$\omega(\tau,t,x)\equiv\varphi'(p(0,t,x;v))\int_0^t\omega(s,t,x)ds,,$$

где

$$\omega(\tau,t,x)=D[v(t,t,x)]v(\tau,t,x).$$

Из тождества следует равенство $\omega(\tau,t,x)=0$. Отсюда следует (2.1.6).

Полагая $\tau=t$ в (2.1.8), из Леммы 2.1.2 получаем (2.1.11).

Лемма доказана.

Лемма 2.1.4. Решение уравнения (2.1.8) при достаточно малых *t* имеет непрерывные производные по всем переменным.

Доказательство. Формально дифференцируя (2.1.8) по *x* и обозначая $V_3(\tau,t,x)=v_x(\tau,t,x),$ получаем

$$V_3(\tau,t,x)=\varphi'(p(0,t,x;v(s,t,x):s)\left(1-\int_0^t V_3(\rho,\tau,x)d\rho\right) \qquad (2.1.12)$$

Как и в доказательстве Леммы 2.1.3, доказываем, что это уравнение имеет непрерывное решение при достаточно малых *t*. Тогда интегрированием получаем, что функция

$$V_3(\tau,t,x)=v(\tau,t,0)+\int_0^x V_3(\tau,t,\xi)d\xi \quad (2.1.13)$$

где *v(τ,t,x)* – решение уравнения (2.1.8), также удовлетворяет (2.1.12), и, следовательно, совпадает с *v(τ,t,x).* Из (2.1.13) следует дифференцируемость *v(τ,t,x)* по *x*.

Формально дифференцируя (2.1.8) по t и обозначая $V_2(\tau,t,x)=v_t(\tau,t,x)$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}p(\tau,t,x;v(\rho,t,x):\rho)=v(t,t,x)+\int_\tau^t V_2(\rho,t,x)d\rho,$$

$$V_2(\tau,t,x)=J_2(\tau,t,x;V_2(\tau,t,x):\tau,t)\equiv\varphi'(p(0,t,x;v(s,t,x):s)\times$$

$$\times(v(t,t,x)+\int_0^t V_2(\rho,t,x)d\rho).$$

Как и в доказательстве Леммы 2.1.3, доказываем, что это уравнение имеет непрерывное решение при достаточно малых t. Тогда интегрированием получаем, что функция

$$V_2(\tau,t,x)=x+\int_\tau^t V_3(\tau,s,x)dx \qquad (2.1.14)$$

удовлетворяет (2.1.8), и, следовательно, совпадает с $v(\tau,t,x)$. Из (2.1.14) следует дифференцируемость $v(\tau,t,x)$ по t.

Правая часть (2.1.8) при заданной непрерывной функции $v(\tau,t,x)$ дифференцируема по τ. Отсюда следует дифференцируемость $v(\tau,t,x)$ по τ.

Лемма доказана.

Продолжая этот процесс, получаем справедливость соотношений

$$v(\tau,t,x)\in\overline{C}_b^{(2)}(Q_2(T^*)),\quad u(t,x)\in\overline{C}_b^{(2)}(G_2(T^*)).$$

Таким образом, по индукции, из Леммы 2.1.4 следует

Лемма 2.1.5. При наличии производных соответствующего порядка у всех функций $\varphi(x)$ функция $v(\tau,t,x)$ имеет производные такого же порядка.

Теорема доказана.

Пример 2.1.1. Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}=u(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\left[u(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right]-\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+f(t), \qquad (2.1.15)$$

$$\partial u(0,x)/\partial t=-x, \qquad (2.1.16)$$

$$u(0,x)=x. \qquad (2.1.17)$$

Для задачи (2.1.15)–(2.1.17) уравнение (2.1.10) принимает вид:

$$u_t(t,x)+u(t,x)u_x(t,x)=\int_0^t f(s)ds. \qquad (2.1.18)$$

А задача (2.1.18), (2.1.16), (2.1.17) методом дополнительного аргумента сводится к интегральному уравнению

$$u(t,x) = p(0,t,x;v) + \int_0^t (t-\rho) f(\rho) d\rho \,, (\tau,t,x) \in Q_2(T). \qquad (2.1.19)$$

Из (2.1.19) имеем

$$v(\tau,t,x) = p(0,t,x;v) + \int_0^\tau (\tau-\rho) f(\rho) d\rho \,.$$

Отсюда получаем интегральное уравнение

$$v(\tau,t,x) = x - \int_0^t v(\rho,t,x)) d\rho + \int_0^\tau (\tau-\rho) f(\rho) d\rho \,.$$

Интегрируя по τ от *0* до *t*, имеем:

$$\int_0^t v(\rho,t,x) d\rho = t(x - \int_0^t v(\rho,t,x) d\rho) + \int_0^t \int_0^s (s-\rho) f(\rho) d\rho ds \,.$$

Находим

$$\int_0^t v(\rho,t,x) d\rho = [tx - \int_0^t \int_0^s (s-\rho) f(\rho) d\rho \, ds] \frac{1}{1+t} \,.$$

Следовательно, решение поставленной задачи имеет вид:

$$u(t,x) = \frac{x}{1+t} - \frac{1}{1+t} \int_0^t \int_0^s (s-\nu) f(\nu) d\nu ds + \int_0^t (t-\nu) f(\nu) d\nu .$$

2.2. Построение решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с частной производной под знаком интеграла

Рассматривается нелинейное интегро-дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка вида:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = u(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\left[u(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right] - \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} +$$

$$+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} K(t,s,\xi)\frac{\partial u(s,\xi)}{\partial \xi}d\xi ds + g(t), \quad (t,x)\in R_1^{\ 2} \qquad (2.2.1)$$

с начальными условиями

$$\frac{\partial^k u(t,x)}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = (-1)^k x, \quad k=0,1 \qquad (2.2.2)$$

ТЕОРЕМА 2.2.1. Пусть $\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|K(t,s,\xi)\right| d\xi ds \le \gamma = const.$

Тогда задача (2.2.1),(2.2.2) имеет единственное решение в пространстве $\overline{C}^{(2)}(R_1^2)$ в виде

$$u(t,x) = x - [1+t]^{-1}\{xt + \int_0^t\int_0^{\eta}(\eta-\rho)[\int_0^{\rho}\int_{-\infty}^{\infty}K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s}d\xi ds + g(\rho)]d\rho d\eta\} +$$

$$+\int_0^t(t-\rho)[\int_0^{\rho}\int_{-\infty}^{\infty}K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s}d\xi ds + g(\rho)\Big]d\rho. \qquad (2.2.3)$$

Доказательство. Используем схему применения метода дополнительного аргумента к нелинейным операторно-дифференциальным уравнениям в частных производных второго порядка, приведенную в 2.1, где

$$\psi(x) = -x, \quad \varphi(x) = x, \quad F(t;u) = \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}K(t,s,\xi)\frac{\partial u(s,\xi)}{\partial \xi}d\xi ds + g(t).$$

Для задачи (2.2.1),(2.2.2) уравнение (2.1.11) принимает следующий вид:

$$u(t,x) = p(0,t,x;v) + \int_0^t(t-\rho)\left[\int_0^{\rho}\int_{-\infty}^{\infty}K(\rho,s,\xi)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial u(s,\xi)}{\partial \xi}d\xi ds + g(\rho)\right]d\rho, \quad (t,x)\in R_1^{\ 2}. \qquad (2.2.4)$$

В (2.2.4), заменяя x на $p(t,\theta,x;v)$, $\theta \ge t$, получаем

$$v(t,\theta,x) = p(0,\theta,x;v) + \int_0^t(t-\rho)\left[\int_0^{\rho}\int_{-\infty}^{\infty}K(\rho,s,\xi)\times\right.$$

$$\times \frac{\partial u(s,\xi)}{\partial \xi} d\xi ds + g(\rho)\Big] d\rho, \qquad (t,\theta,x) \in Q_2, \tag{2.2.5}$$

где $v(t,\theta,x) = u(t, p(t,\theta,x;v)),$

$p(\tau,t,p(t,\theta,x;v);v) = p(\tau,\theta,x;v), \quad (\tau,t,\theta,x) \in Q_3.$

Подставляя (2.1.4) в (2.2.5), имеем

$$v(t,\theta,x) = x - \int_0^\theta v(\rho,\theta,x)d\rho + \int_0^t (t-\rho)\Bigg[\int_0^\rho \int_{-\infty}^\infty K(\rho,s,\xi) \times$$

$$\times \frac{\partial u(s,\xi)}{\partial \xi} d\xi ds + g(\rho)\Bigg] d\rho, \qquad (t,\theta,x) \in Q_2. \tag{2.2.6}$$

Для функции $v(t,\theta,x) \in \overline{C}^{(2)}(Q_2(T))$, являющейся при малых t решением интегрального уравнения (2.2.6), выполняются равенства

$$\frac{\partial v(t,\theta,x)}{\partial x}\Big|_{t=\theta} = \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}. \tag{2.2.7}$$

В самом деле, определим из (2.2.6)

$$\frac{\partial v(t,\theta,x)}{\partial x} = 1 - \int_0^\theta \frac{\partial v(\rho,\theta,x)}{\partial x} d\rho. \tag{2.2.8}$$

Уравнение (2.2.8) при $t=\tau$ совпадает с уравнением

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = 1 - \int_0^t \frac{\partial v(\rho,t,x)}{\partial x} d\rho$$

которое получено из (2.2.4) непосредственно.

Далее, интегрируя (2.2.8) по t от 0 до ө, находим

$$\int_0^\theta \frac{\partial v(\tau,\theta,x)}{\partial x} d\tau = \frac{\theta}{1+\theta}. \tag{2.2.9}$$

Подставляя (2.2.9) в (2.2.8), имеем

$$\frac{\partial v(t,\theta,x)}{\partial x} = \frac{1}{1+\theta}.$$

Отсюда при $t=\theta$, согласно (2.2.7), следует

$$\frac{\partial v(t,t,x)}{\partial x} = \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = \frac{1}{1+t}. \tag{2.2.10}$$

Подставляя (2.2.10) в (2.2.6), имеем

$$v(t,\theta,x)=x-\int_0^\theta v(\rho,\theta,x)d\rho+\int_0^t (t-\rho)\left[\int_0^\rho\int_{-\infty}^\infty K(\rho,s,\xi)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{1+s}d\xi ds+g(\rho)\right]d\rho,\qquad (t,\theta,x)\in Q_2. \qquad (2.2.11)$$

Из (2.2.11) получаем

$$\int_0^\theta v(\tau,\theta,x)d\tau=[1+\theta]^{-1}\{x\theta+\int_0^\theta\int_0^\eta(\eta-\rho)\times$$
$$\times[\int_0^\rho\int_{-\infty}^\infty K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s}d\xi ds+g(\rho)]d\rho d\eta\}. \qquad (2.2.12)$$

Подставляя (2.2.12) в (2.2.11), получаем

$$v(t,\theta,x)=x-[1+\theta]^{-1}\{x\theta+\int_0^\theta\int_0^\eta(\eta-\rho)\left[\int_0^\rho\int_{-\infty}^\infty K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s}d\xi ds+g(\rho)]d\rho d\eta\right\}+$$
$$+\int_0^t(t-\rho)[\int_0^\rho\int_{-\infty}^\infty K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s}d\xi ds+g(\rho)\Big]d\rho, \qquad (2.2.13)$$
$$(t,\theta,x)\in Q_2.$$

Согласно равенству (2.1.5)*,* из (2.2.13), полагая $t=\theta$*,* получаем решение задачи (2.2.1), (2.2.2) в виде (2.2.3).

В самом деле из (2.2.3) имеем

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=[1+t]^{-2}\{xt+\int_0^t\int_0^\eta(\eta-\rho)[\int_0^\rho\int_{-\infty}^\infty K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s}d\xi ds+g(\rho)]d\rho d\eta\}-$$
$$-[1+t]^{-1}\{x+\int_0^t(t-\rho)[\int_0^\rho\int_{-\infty}^\infty K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s}d\xi ds+g(\rho)]d\rho\}+$$
$$+\int_0^t\ [\int_0^\rho\int_{-\infty}^\infty K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s}d\xi ds+g(\rho)\Big]d\rho,$$

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}=-2[1+t]^{-3}\{xt+\int_0^t\int_0^\eta(\eta-\rho)[\int_0^\rho\int_{-\infty}^\infty K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s}d\xi ds+g(\rho)]d\rho d\eta\}+$$
$$+2[1+t]^{-2}\{x+\int_0^t(t-\rho)[\int_0^\rho\int_{-\infty}^\infty K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s}d\xi ds+g(\rho)]d\rho\}-$$
$$-[1+t]^{-1}\int_0^t\ [\int_0^\rho\int_{-\infty}^\infty K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s}d\xi ds+g(\rho)\Big]d\rho+$$
$$+\int_0^t\int_{-\infty}^\infty K(t,s,\xi)\frac{\partial u(s,\xi)}{\partial\xi}d\xi ds+g(t),$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}=\frac{1}{1+t},\quad \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}=0.$$

Подставляя эти найденные производные в уравнение (2.2.1), имеем:

$$-2[1+t]^{-3}\{xt+\int_0^t\int_0^\eta(\eta-\rho)[\int_0^\rho\int_{-\infty}^{\infty}K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s}d\xi ds+g(\rho)]d\rho d\eta\}+$$

$$+2[1+t]^{-2}\{x+\int_0^t(t-\rho)[\int_0^\rho\int_{-\infty}^{\infty}K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s}d\xi ds+g(\rho)]d\rho\}-$$

$$-[1+t]^{-1}\int_0^t\ [\int_0^\rho\int_{-\infty}^{\infty}K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s}d\xi ds+g(\rho)\Big]d\rho+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}K(t,s,\xi)\frac{\partial u(s,\xi)}{\partial\xi}d\xi ds+g(t)=$$

$$=x[1+t]^{-2}-[1+t]^{-3}\{xt+\int_0^t\int_0^\eta(\eta-\rho)[\int_0^\rho\int_{-\infty}^{\infty}K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s}d\xi ds+g(\rho)]d\rho d\eta\}+$$

$$+[1+t]^{-2}\int_0^t(t-\rho)[\int_0^\rho\int_{-\infty}^{\infty}K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s}d\xi ds+g(\rho)]d\rho-$$

$$-[1+t]^{-3}\{xt+\int_0^t\int_0^\eta(\eta-\rho)[\int_0^\rho\int_{-\infty}^{\infty}K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s}d\xi ds+g(\rho)]d\rho d\eta\}+$$

$$+[1+t]^{-2}\{x+\int_0^t(t-\rho)[\int_0^\rho\int_{-\infty}^{\infty}K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s}d\xi ds+g(\rho)]d\rho\}-$$

$$-[1+t]^{-1}\int_0^t\ [\int_0^\rho\int_{-\infty}^{\infty}K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s}d\xi ds+g(\rho)\Big]d\rho+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}K(t,s,\xi)\frac{\partial u(s,\xi)}{\partial\xi}d\xi ds+g(t).$$

Теорема доказана.

ГЛАВА 3. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА, НЕЛИНЕЙНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИИ

3.1. Решение нелинейного операторно-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа

В данной работе рассмотрим применение метода дополнительного аргумента для интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа вида:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2(t,x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + c(t,x,u)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + F(t,x;u), \qquad (3.1.1)$$

$$(t,x) \in G_2(T),$$

с начальными условиями

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = u_k(x), \quad k = 0,1, \quad x \in R. \qquad (3.1.2)$$

В [5] рассмотрено уравнение (3.1.1) в случае, когда коэффициенты при частных производных первого порядка не зависят от неизвестной функции.

Введем следующие обозначения:

$$\vartheta_i(t,x) = D[(-1)^i a(t,x)]u, \qquad (3.1.3)$$

$$g_i(t,x,u) = \frac{1}{a(t,x)}[c(t,x,u) + (-1)^i(a_t(t,x) + (-1)^{i+1}a(t,x)a_x(t,x)], \quad i = 1,2, \quad (3.1.4)$$

$$f_i(t,x,u) = (-1)^{i+1}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]g_i(t,x,u), \quad i = 1,2,$$

$$r_i(t,x,u) = (-1)^{i+1}\frac{\partial g_i(t,x,u)}{\partial u}, \quad i = 1,2.$$

Теорема 3.1.1. Пусть 1) $u_k(x) \in \overline{C}_b^{(2-k)}(R), \quad k = 0,1,$ $a(t,x) \in \overline{C}_b^{(2)}(G_2(T)), \quad c(t,x,u) \in \overline{C}_b^{(2)}(G_2(T) \times R)$ и вместе со своими производными удовлетворяют условию Липшица по переменной u.

2) оператор $F(t,x;u)$ отображает непрерывные функции в непрерывные и удовлетворяет условию Липшица:

$$\left|F(t,x;u_1) - F(t,x;u_2)\right| \le L\|u_1 - u_2\|_{C(G_2(T))}, \quad L = const.$$

Тогда существует такое $T^* > 0$, что задача (3.1.1), (3.1.2) имеет единственное решение в $\overline{C}_b^{(2)}(G_2(T^*))$.

Представим основные этапы доказательства теорема в виде лемм.

Лемма 3.1.1. Задача (3.1.1)-(3.1.2) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$u(t,x)=u_0(p_i(0,t,x)+\int_0^t \vartheta_i(s,p_i(s.t.x))ds \qquad (3.1.5)$$

$$\vartheta_i(t,x)=\frac{1}{2}\varphi_i(p_i(0,t,x))+(-1)^{i+1}\frac{1}{2}g_i(t,x,u)u+(-1)^i\frac{1}{2}\int_0^t g_i(s,p_i,u(s,p_i))\times$$
$$\times\vartheta_i(s,p_i)ds-\frac{1}{2}\int_0^t f_{i.}(s,p_i,u(s,p_i))u(s,p_i)ds-\frac{1}{2}\int_0^t r_i(s,p_i,u(s,p_i))u(s,p_i)\times \qquad (3.1.6)$$
$$\times\vartheta_j(s,p_i)ds+\int_0^t F(s,p_i;u(s,p_i))ds,\quad i,j=1,2;\quad i\neq j.$$

где

$$\left[2\vartheta_i(t,x)+(-1)^i g_i(t,x,u)u(t,x)\right]_{t=0}=\varphi_i(x)\quad i=1,2, \qquad (3.1.7)$$

$p_i(s,t,x),\quad i=1,2-$соответствующие решения интегральных уравнений:

$$p_i(s,t,x)=x+(-1)^i\int_s^t a(\tau,p_i(\tau,t,x))d\tau\,,\quad 0\le s\le t\le T. \qquad (3.1.8)$$

Доказательство. Пусть $\vartheta_i(t,x),\ i=1,2$ решение системы интегральных уравнений (3.1.5), (3.1.6). Непосредственным дифференцированием из (3.1.5), (3.1.6) имеем:

$$D[(-1)^i a(t,x)]u=\vartheta_i(t,x),$$
$$D[(-1)^{i+1}a(t,x)]\vartheta_i(t,x)=(-1)^{i+1}\frac{1}{2}g_i(t,x,u)\vartheta_j(t,x)+$$
$$+(-1)^i\frac{1}{2}g_i(t,x,u)\vartheta_i(t,x)+F(t,x;u),\quad i,j=1,2;\quad i\neq j. \qquad (3.1.9)$$

Подставляя первое равенство (3.1.3) в (3.1.9), получаем уравнению (3.1.1).

Таким образом, мы доказали, система уравнений (3.1.5), (3.1.6) удовлетворяет уравнению (3.1.1). Система уравнений (3.1.5), (3.1.6) удовлетворяет и начальному условию (3.1.2).

Теперь покажем, что решение задачи (3.1.1)-(3.1.2) является решением системы интегральных уравнений (3.1.5), (3.1.6) т.е. решение задачи (3.1.1)-(3.1.2) сводим к решению системы интегральных уравнений (3.1.5)-(3.1.6). Для этого запишем уравнение (3.1.1) в виде

$$D[(-1)^{i+1}a(t,x]\big(2\vartheta_i(t,x)+(-1)^i g_i(t,x,u))u\big)=(-1)^i g_i(t,x,u)\vartheta_i(t,x)-f_i(t,x,u)u- \qquad (3.1.10)$$
$$-r_i(t,x,u)u(t,x)\vartheta_j(t,x)+2F(t,x;u),\quad i,j=1,2;\quad i\neq j.$$

Действительно из (3.1.10) имеем:

$$2D[(-1)^{i+1}a(t,x)]\vartheta_i(t,x)-r_i(t,x,u)\vartheta_j(t,x)u(t,x)-f_i(t,x,u)u(t,x)+$$

$$+(-1)^i g_i(t,x,u)\vartheta_j(t,x)=(-1)^i g_i(t,x,u)\vartheta_i(t,x)-f_i(t,x,u)u(t,x)- \qquad (3.1.11)$$

$$-r_i(t,x,u)\vartheta_j(t,x)u(t,x)+2F(t,x;u), \quad i,j=1,2; \quad i\neq j.$$

Отсюда

$$2D[(-1)^{i+1}a(t,x)]\vartheta_i(t,x)=(-1)^{i+1}g_i(t,x,u)\vartheta_j(t,x)+(-1)^i g_i(t,x,u)\vartheta_i(t,x)+$$
$$+2F(t,x;u), \quad i,j=1,2; \quad i\neq j.$$

Для (3.1.11) принимая во внимание обозначения (3.1.3), получаем:

$$2\left[\frac{\partial^2 u(t.x)}{\partial t^2}-a^2(t.x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+(-1)^i\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x)\right]=$$

$$=(-1)^{i+1}g_i(t,x,u)\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+(-1)^{i+1}a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)+(-1)^i g_1(t,x,u)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+(-1)^i a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)+2F(t,x;u), \quad i,j=1,2; \quad i\neq j.$$

Отсюда

$$2\left[\frac{\partial^2 u(t.x)}{\partial t^2}-a^2(t.x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+(-1)^i\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x)\right]=$$

$$=2\big(c(t,x,u)+(-1)^i D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}, \quad i,j=1,2; \quad i\neq j.$$

Таким образом, мы показали, что из (3.1.10) получается уравнение (3.1.1).

Введем обозначение $z(t,x;u)=2\vartheta_i(t,x)+(-1)^i g_i(t,x,u))u.$

Уравнение (3.1.10) с условиями (3.1.2) с помощью метода дополнительного аргумента сводится к решению интегро-дифференциального уравнения

$$z(t,x,;u)=\varphi_i(p_i(0,t,x))+(-1)^i\int_0^t g_i(s,p_i,u(s,p_i))\vartheta_i(s,p_i)ds-$$

$$-\int_0^t f_{i.}(s,p_i,u(s,p_i))u(s,p_i)ds-\int_0^t r_i(s,p_i,u(s,p_i))u(s,p_i)\vartheta_j(s,p_i)ds+ \qquad (3.1.12)$$

$$+2\int_0^t F(s,p_i;u(s,p_i))ds, \quad i,j=1,2; \quad i\neq j.$$

В самом деле, дифференцируя (3.1.12), получаем (3.1.10). Полагая $t=0$ в (3.1.12), получаем (3.1.7). Из (3.1.12) следует (3.1.6).

Из обозначения (3.1.3) методом дополнительного получаем (3.1.5). Лемма доказана.

Лемма 3.1.2. Существует такое $T^* > 0,$что система интегральных уравнений (3.1.5), (3.1.6) имеет единственное решение.

Запишем систему интегральных уравнений (3.1.5)-(3.1.6) в виде одного векторного равенства

$$\theta = A\theta, \tag{3.1.13}$$

в котором $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ - вектор-функция переменных (t,x), компоненты которой есть искомые функции $\theta_1 = u(t,x)$, $\theta_2 = \vartheta_1(t,x)$, $\theta_3 = \vartheta_3(t,x)$, а компоненты оператора $A = (A_1, A_2, A_3)$ определяются равенствами:

$$A_1\theta = u_0(p_i(0,t,x) + \int_0^t \theta_i(s, p_i(s.t.x))ds, \quad i = 1,2 \tag{3.1.14}$$

$$\begin{gathered}A_i\theta = \frac{1}{2}\varphi_i(p_i(0,t,x)) + (-1)^{i+1}\frac{1}{2}g_i(t,x,\theta_1)\theta_1 + \\ +(-1)^i\frac{1}{2}\int_0^t g_i(s,p_i,\theta_1(s,p_i))\theta_i(s,p_i)ds - \frac{1}{2}\int_0^t f_{i.}(s,p_i,\theta_1(s,p_i))\theta_1(s,p_i)ds - \\ -\frac{1}{2}\int_0^t r_i(s,p_i,\theta_1(s,p_i))\theta_1(s,p_i)\theta_j(s,p_i)ds + \int_0^t F(s,p_i;\theta_1(s,p_i))ds, \\ i,j = 1,2; \quad i \neq j.\end{gathered} \tag{3.1.15}$$

Покажем, что уравнение (3.1.13) имеет в области $G_2(T)$ при $T < T^*$единственное, непрерывное решение, удовлетворяющее неравенству $\|\theta - \theta_0\| \le M$.

Норму определим равенством

$$\|\theta\| = \max_{0\le i\le 3}\ \max_{(t,x)\in G_2(T)}\left\{|\theta_i|, \quad i = 1,2,3\right\}.$$

Покажем при $T < T^*$ оператор A отображает шар $S(\theta_0, M)$ в себя

$$|A_1\theta - u_0| \le KT,$$

$$\left|A_i\theta - \frac{1}{2}\varphi_i\right| \le \frac{1}{2}(1+T)A_0K + \frac{KT}{2}(B_0 + C_0K) + |F|T = \Omega_0(T), \tag{3.1.16}$$

где

$$|g_i(t,x,u)| \le A_0 = const, \quad |f_i(t,x,u)| \le B_0 = const \quad |r_i(t,x,u)| \le C_0 = const, \quad i = 1,2,$$

$$\|\theta\| \le \|\theta_0\| + M = K,$$

Обозначим через $T_0 = \dfrac{M}{K}$, $T_1 -$ положительный корень уравнения $\Omega_0(T) = M$.

Оператор A сжимает расстояние между элементами шара $S(\theta_0, M)$.

Справедливы следующие оценки

$$\left| A_1\theta^1 - A_1\theta^2 \right| \le T \left\| \theta^1 - \theta^2 \right\|,$$

$$\left| A_i\theta^1 - A_i\theta^2 \right| \le \Theta_0(T) \left\| \theta^1 - \theta^2 \right\|, \quad i = 1,2, \qquad (3.1.17)$$

где

$$\Theta_0(T) = \frac{1}{2}\left(A_0 + L_0 K\right) + \frac{T}{2}\left(L_0 K + A_0 + M_0 K + B_0 + K_0 K^2 + 2C_0 K + 2L\right),$$

$$\left| g_i(t,x,u_1) - g_i(t,x,u_2) \right| \le L_0 \left| u_1 - u_2 \right|, \quad L_0 \ge 0, \quad L_0 - const, \quad i = 1,2$$

$$\left| f_i(t,x,u_1) - f_i(t,x,u) \right| \le M_0 \left| u_1 - u_2 \right|, \quad M_0 \ge 0, \quad M_0 - const, \quad i = 1,2 .$$

$$\left| r_i(t,x,u_1) - r_i(t,x,u) \right| \le K_0 \left| u_1 - u_2 \right|, \quad K_0 \ge 0, \quad K_0 - const, \quad i = 1,2.$$

Положительный корень уравнения $\Theta_0(T) = 1$ обозначим через T_2.

Отсюда следует, что оператор A при $T < T^* = \min\{T_0, T_1, T_2\}$ осуществляет сжатое отображение шара $S(\theta_0, M)$ на себя. Следовательно, по принципу сжимающих отображений система уравнений (3.1.5), (3.1.6) имеет одно и только одно решение.

Теорема доказана.

3.2 Сведение нелинейной задачи электрических колебаний в проводах к системам интегральных уравнений методом дополнительного аргумента

Рассмотрено нелинейное уравнение для определения напряжения или электрического тока $u(t,x)$:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2(t,x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + b(t,x,u)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + F(t,x;u), \qquad (3.2.1)$$

$(t,x)\in G_2(T)$,

с начальными условиями (3.1.2).

Теорема 3.2.1. Пусть выполняются все условия теоремы 3.1.1., $b(t,x,u)\in \overline{C}_b^{(2)}(G_2(T)\times R)$ и вместе со своими производными удовлетворяют условию Липшица.

Тогда существует такое $T^*>0$, что задача (3.2.1), (3.1.2) имеет единственное решение в $\overline{C_b}^{(2)}(G_2(T^*))$.

Доказательство.

При доказательстве теоремы воспользуемся обозначением (3.1.3) и следующими обозначениями:

$$\alpha_{ij}(t,x;u) = b(t,x;u) + (-1)^j \frac{1}{a(t,x)}(a_t(t,x) + (-1)^{i+1}a(t,x)a_x(t,x)),\ i,j=1,2,$$

$$\beta_i(t,x,u) = D[(-1)^{i+1}a(t,x)]\alpha_{i1}, \quad \mu_i(t,x,u) = \frac{\partial \alpha_{i1}(t,x,u)}{\partial u}, \quad i=1,2.$$

Лемма 3.2.1. Задача (3.2.1)-(3.2.2) эквивалентна системе интегральных уравнений (3.1.5) и

$$\vartheta_i(t,x) = \frac{1}{2}\psi_i(p_i(0,t,x)) + \frac{1}{2}\alpha_{i1}(t,x,u)u + \frac{1}{2}\int_0^t \alpha_{i2}(s,p_i,u(s,p_i))\vartheta_i(s,p_i)ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t \beta_i(s,p_i,u(s,p_i))u(s,p_i)ds - \frac{1}{2}\int_0^t \mu_i(s,p_i,u(s,p_i))u(s,p_i)\vartheta_j(s,p_i)ds + \qquad (3.2.2)$$

$$+\int_0^t F(s,p_i,u(s,p_i))ds, \quad i,j=1,2; \quad i\neq j.$$

где

$$\left[2\vartheta_i - \alpha_{i1}(t,x,u)u\right]_{t=0} = \psi_i(x), \quad i=1,2.$$

Доказательство Леммы 3.2.1.

Пусть $\vartheta_i(t,x)$, $i=1,2$ решение системы интегральных уравнений (3.1.5), (3.2.2). Непосредственным дифференцированием из(3.1.5), (3.2.2) имеем:

$D[(-1)^i a(t,x)]u = \vartheta_i(t,x)$,

$$D[(-1)^{i+1}a(t,x)]\vartheta_i(t,x)=\frac{1}{2}\alpha_{i1}(t,x,u)\vartheta_j(t,x)+$$
$$+\frac{1}{2}\alpha_{i2}(t,x,u)\vartheta_i(t,x)+F(t,x;u),\quad i,j=1{,}2;\quad i\neq j.$$

Принимая во внимания обозначения (3.1.3) получаем справедливость уравнения (3.2.1).

Таким образом, мы доказали, система уравнений (3.1.5), (3.2.2) удовлетворяет уравнению (3.2.1). Система уравнений (3.1.5), (3.2.2) удовлетворяет и начальному условию (3.1.2).

Теперь покажем, что решение задачи (3.2.1)-(3.1.2) является решением системы интегральных уравнений (3.2.2)-(3.2.5), т.е. решение задачи (3.2.1)-(3.1.2) сводим к решению системы интегральных уравнений (3.2.2)-(3.2.5). Для этого запишем уравнение (3.2.1) в виде

$$D[(-1)^{I+1}a(t,x)]\big(2\vartheta_i(t,x)+(-1)^i\alpha_{i1}(t,x,u))u\big)=\alpha_{i2}(t,x,u)\vartheta_i(t,x)-$$
$$-\beta_i(t,x,u)u-\mu_i(t,x,u)u(t,x)\vartheta_j(t,x)+2F(t,x,u),\quad i,j=1{,}2;\quad i\neq j \qquad (3.2.3)$$

Действительно из (3.2.3) имеем:

$$2D[(-1)^{i+1}a(t,x)]\vartheta_i(t,x)-\mu_i(t,x,u)\vartheta_j(t,x)u(t,x)-\beta_i(t,x,u)u(t,x)-$$
$$-\alpha_{i1}(t,x,u)\vartheta_j(t,x)=\alpha_{i2}(t,x,u)\vartheta_i(t,x)-\beta_i(t,x,u)u(t,x)-$$
$$-\mu_i(t,x,u)\vartheta_j(t,x)u(t,x)+2F(t,x;u),\quad i,j=1{,}2;\quad i\neq j.$$

Отсюда

$$2D[(-1)^{i+1}a(t,x)]\vartheta_i(t,x)-\alpha_{i1}(t,x,u)\vartheta_j(t,x)=$$
$$=\alpha_{i2}(t,x,u)\vartheta_i(t,x)+2F(t,x;u),\quad i,j=1{,}2;\quad i\neq j. \qquad (3.2.4)$$

Для (3.2.4) принимая во внимание обозначения (3.2.3), получаем:

$$2\left[\frac{\partial^2 u(t.x)}{\partial t^2}-a^2(t.x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+(-1)^i\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x)\right]=$$

$$=\left(b(t,x,u)-\frac{1}{a(t,x)}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x\right)\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+(-1)^{i+1}a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)+$$

$$+\left(b(t,x,u)+\frac{1}{a(t,x)}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x\right)\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+(-1)^{i}a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)+$$

$$+2F(t,x;u),\vdots i=1,2.$$

Отсюда

$$2\left[\frac{\partial^2 u(t.x)}{\partial t^2}-a^2(t.x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+(-1)^i\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x)\right]=$$

$$=2b(t,x,u)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+2(-1)^i\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x)+$$

$$+2F(t,x;u),\quad i=1,2.$$

Таким образом, мы показали, что из (3.2.3) получается уравнение (3.2.1).

Введя обозначение $z(t,x;u)=2\vartheta_i(t,x)+(-1)^i\alpha_{i1}(t,x,u)u(t,x),$ запишем (3.2.3) в виде:

$$D[(-1)^{I+1}a(t,x)]z(t,x;u)=\alpha_{i2}(t,x,u)\vartheta_i(t,x)-$$

$$-\beta_i(t,x,u)u-\mu_i(t,x,u)u(t,x)\vartheta_j(t,x)+2F(t,x,u),\quad i,j=1,2;\quad i\neq j \qquad (3.2.5)$$

Для задачи (3.2.5), (3.1.2) применяя метод дополнительного аргумента, имеем

$$z(t,x;u)=\psi_i(p_i(0,t,x))+\int_0^t\alpha_{i2}(s,p_i,u(s,p_i))\vartheta_i(s,p_i)ds-$$

$$-\int_0^t\beta_i(s,p_i,u(s,p_i))u(s,p_i)ds-\int_0^t\mu_i(s,p_i,u(s,p_i))u(s,p_i)\vartheta_j(s,p_i)ds+ \qquad (3.2.6)$$

$$+2\int_0^t F(s,p_i,u(s,p_i))ds,\quad i,j=1,2;\quad i\neq j.$$

В самом деле, дифференцируя (3.2.6), получаем (3.2.5). Из (3.2.6) следует (3.2.2).

Из обозначения (3.1.3) методом дополнительного получаем (3.1.5). Лемма доказана.

Лемма 3.2.2. Существует такое $T^*>0,$ что система интегральных уравнений (3.2.2), (3.1.5) имеет единственное решение.

При доказательстве леммы 3.2.2. воспользуемся леммой 3.1.2.
Здесь компоненты оператора $A=(A_1, A_2, A_3)$ определяются равенствами: (3.1.14)

$$A_i\theta = \frac{1}{2}\psi_i(p_i(0,t,x)) + \frac{1}{2}\alpha_{i1i}(t,x,\theta_1)\theta_1 +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t \alpha_{i2}(s,p_i,\theta_1(s,p_i))\theta_i(s,p_i)ds - \frac{1}{2}\int_0^t \beta_{i.}(s,p_i,\theta_1(s,p_i))\theta_1(s,p_i)ds - \qquad (3.2.8)$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t \mu_i(s,p_i,\theta_1(s,p_i))\theta_1(s,p_i)\theta_j(s,p_i)ds + \int_0^t F(s,p_i;\theta_1(s,p_i))ds,$$

$i, j = 1{,}2;\quad i \neq j.$

Для системы интегральных уравнений (3.1.14), (3.2.8) оценки (3.1.16), (3.1.17) имеют следующий вид:

$$\left|A_i\theta - \frac{1}{2}\psi_i\right| \le \frac{1}{2}(1+T)A_1K + \frac{KT}{2}(B_1 + C_1K) + |F|T = \Omega_1(T), \qquad (3.1.16)$$

$$\left|A_i\theta^1 - A_i\theta^2\right| \le \Theta_1(T)\left\|\theta^1-\theta^2\right\|,\quad i=1{,}2, \qquad (3.1.17)$$

где

$$|\alpha_{ij}(t,x,u)| \le A_1 = const,\quad |\beta_i(t,x,u)| \le B_1 = const \quad |\mu_i(t,x,u)| \le C_1 = const,\quad i=1{,}2,$$

$$\Theta_1(T) = \frac{1}{2}\left(A_1 + L_1K\right) + \frac{T}{2}\left(L_1K + A_1 + M_1K + B_1 + K_1K^2 + 2C_1K + 2L\right),$$

$$|\alpha_{ij}(t,x,u_1) - \alpha_{ij}(t,x,u_2)| \le L_1|u_1-u_2|,\quad L_1 \ge 0,\quad L_1 - const,\quad i=1{,}2$$

$$|\beta_i(t,x,u_1) - \beta_i(t,x,u)| \le M_1|u_1-u_2|,\quad M_1 \ge 0,\quad M_1 - const,\quad i=1{,}2\,.$$

$$|\mu_i(t,x,u_1) - \mu_i(t,x,u)| \le K_1|u_1-u_2|,\quad K_1 \ge 0,\quad K_i - const,\quad i=1{,}2.$$

Положительные корни уравнений $\Omega_1(T)=M$, $\Theta_1(T)=1$ обозначим через T_3, T_4.

Отсюда следует, что оператор A при $T < T^* = \min\{T_0, T_3, T_4\}$ осуществляет сжатое отображение шара $S(\theta_0, M)$ на себя. Следовательно, по принципу сжимающих отображений система уравнений (3.1.4), (3.1.5) имеет одно и только одно решение.

Теорема доказана.

3.3 Исследование решений более общего вида операторно-дифференциального уравнения гиперболического типа

Рассмотрим операторно-дифференциальное уравнение гиперболического типа вида:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2(t,x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + b(t,x,u)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + c(t,x,u)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + F(t,x;u), \quad (3.3.1)$$

$(t,x) \in G_2(T)$

с начальными условиями (3.1.2).

Теорема 3.3.1. Пусть выполняются все условия теоремы 3.2.1.

Тогда существует такое $T^* > 0$, что задача (3.3.1), (3.1.2) имеет единственное решение в $\overline{C_b}^{(2)}(G_2(T^*))$.

Доказательство.

Воспользуемся обозначениями (3.1.3), (3.1.4) и следующими обозначениями:

$$\gamma_{ij}(t,x,u) = b(t,x,u) + (-1)^{i+1} g_j(t,x,u), \quad i,j = 1,2,$$

$$\chi_i(t,x,u) = D[(-1)^{i+1} a(t,x)]\gamma_{ii}(t,x,u), \quad i = 1,2,$$

$$\lambda_i(t,x,u) = \frac{\partial \gamma_{ii}(t,x,u)}{\partial u}, \quad i = 1,2.$$

Задача (3.3.1)-(3.1.2) эквивалентна системе интегральных уравнений (3.1.5) и

$$\vartheta_i(t,x) = \frac{1}{2}\phi_i(p_i(0,t,x)) + \frac{1}{2}\gamma_{ii}(t,x,u)u + \frac{1}{2}\int_0^t \gamma_{ji}(s,p_i,u(s,p_i))\vartheta_i(s,p_i)ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t \chi_i(s,p_i,u(s,p_i))u(s,p_i)ds - \frac{1}{2}\int_0^t \lambda_i(s,p_i,u(s,p_i))u(s,p_i)\vartheta_j(s,p_i)ds +$$

$$+\int_0^t F(s,p_i;u(s,p_i))ds \quad (3.3.2)$$

где

$$\left[2\vartheta_i(t,x) - \gamma_{ii}(t,x,u)u\right]_{t=0} = \phi_i(x),,$$

$p_i(s,t,x), \quad i = 1,2$ -соответствующие решения интегральных уравнений (3.1.8).

Пусть $u(t,x), \ \vartheta_i(t,x), \quad i = 1,2 -$ решение системы интегральных уравнений (3.1.5)-(3.2.2). Непосредственным дифференцированием из (3.1.5) и (3.2.2) имеем равенство (3.1.5) и следующее:

$$D[(-1)^{i+1}a(t,x)]\vartheta_i(t,x)=\frac{1}{2}\gamma_{ii}(t,x,u)\vartheta_j(t,x)+$$

$$+\frac{1}{2}\gamma_{ji}(t,x,u)\vartheta_i(t,x)+F(t,x;u),\quad i,j=1,2;\quad i\neq j.$$

Принимая во внимания обозначения (3.1.3) получаем справедливость уравнения (3.3.1).

Таким образом, мы доказали, система уравнений (3.1.5)-(3.3.2) удовлетворяет уравнению (3.3.1). Система уравнений (3.1.5)-(3.3.2) удовлетворяет и начальному условию (3.1.2).

Теперь покажем, что решение задачи (3.3.1)-(3.1.2) является решением системы интегральных уравнений (3.1.5)-(3.3.2), т.е. решение задачи (3.3.1)-(3.1.2) сводим к решению системы интегральных уравнений (3.1.5)-(3.3.2). Для этого запишем уравнение (3.3.1) в виде

$$D[(-1)^{i+1}a(t,x)]\big(2\vartheta_i(t,x)-\gamma_{ii}(t,x,u))u\big)=\gamma_{ji}(t,x,u)\vartheta_i(t,x)-\chi_i(t,x,u)u-$$

$$-\lambda_i(t,x,u)u(t,x)\vartheta_j(t,x)+2F(t,x;u),\quad i,j=1,2,\quad i\neq j. \tag{3.3.3}$$

Действительно из (3.3.3) имеем:

$$2\left[\frac{\partial\vartheta_i(t.x)}{\partial t}+(-1)^{i+1}a(t.x)\frac{\partial\vartheta_i(t,x)}{\partial x}\right]-\lambda_i(t,x,u)\vartheta_j(t,x)u(t,x)-\chi_i(t,x,u)u(t,x)-$$

$$-\gamma_{ii}(t,x,u)\vartheta_j(t,x)=\gamma_{ji}(t,x,u)\vartheta_i(t,x)-\chi_i(t,x,u)u(t,x)-$$

$$-\lambda_i(t,x,u)\vartheta_j(t,x)u(t,x)+2F(t,x;u),\quad i,j=1,2,\quad i\neq j.$$

Отсюда

$$2\left[\frac{\partial\vartheta_i(t.x)}{\partial t}+(-1)^{i+1}a(t.x)\frac{\partial\vartheta_i(t,x)}{\partial x}\right]=\gamma_{ii}(t,x,u)\vartheta_j(t,x)+\gamma_{ji}(t,x,u)\vartheta_i(t,x) \tag{3.3.4}$$

$$2\left[\frac{\partial\vartheta(t.x)}{\partial t}+a(t.x)\frac{\partial\vartheta(t,x)}{\partial x}\right]=\beta_1(t,x,u)\omega(t,x)+\beta_2(t,x,u)\vartheta(t,x)+2F(t,x;u),$$

$i,j=1,2,\quad i\neq j.$

Для (3.3.4) принимая во внимание обозначения (3.1.3), получаем:

$$2\left[\frac{\partial^2 u(t.x)}{\partial t^2}-a^2(t.x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+(-1)^i\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x)\right]=$$

$$=\left(b(t,x,u)-\frac{1}{a(t,x)}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x\right)\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+(-1)^{i+1}a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)+$$

$$+\left(b(t,x,u)+\frac{1}{a(t,x)}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x\right)\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+(-1)^{i}a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)+$$

$$+2F(t,x;u),\quad i=1,2.$$

$$2\left[\frac{\partial^2 u(t.x)}{\partial t^2}-a^2(t.x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+(-1)^i\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x)\right]=$$

$$=\left(b(t,x,u)+(-1)^{i+1}g_i(t,x,u)\right)D[(-1)^{i+1}a(t,x)]u(t,x)+$$

$$+\left(b(t,x,u)+(-1)^{i}g_i(t,x,u)\right)D[(-1)^{i}a(t,x)]u(t,x)+2F(t,x;u),\quad i=1,2.$$

Отсюда

$$2\left[\frac{\partial^2 u(t.x)}{\partial t^2}-a^2(t.x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+(-1)^i\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x)\right]=$$

$$=\left(b(t,x,u)+(-1)^{i+1}g_i(t,x,u)\right)D[(-1)^{i+1}a(t,x)]u(t,x)+$$

$$=2b(t,x,u)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+2\left(c(t,x,u)+(-1)^{i}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x)\right)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}+2F(t,x;u),$$

$$i=1,2.$$

Таким образом, мы показали, что из (3.3.3) получается уравнение (3.3.1).

Решение задачи (3.3.3)-(3.1.2) методом дополнительного аргумента сводится к системе интегральных уравнений (3.1.5), (3.3.2).

Мы доказали, что задача (3.3.1)-(3.1.2) эквивалентна системе интегральных уравнений (3.1.5), (3.3.2).

Воспользуемся леммой 3.1.2.

Здесь компоненты оператора $A=(A_1,A_2,A_3)$ определяются равенствами: (3.1.14)

$$\begin{aligned}A_i\theta=&\frac{1}{2}\phi_i(p_i(0,t,x))+\frac{1}{2}\gamma_{ii}(t,x,\theta_1)\theta_1+\\&+\frac{1}{2}\int_0^t\gamma_{ji}(s,p_i,\theta_1(s,p_i))\theta_i(s,p_i)ds-\frac{1}{2}\int_0^t\chi_{i.}(s,p_i,\theta_1(s,p_i))\theta_1(s,p_i)ds-\\&-\frac{1}{2}\int_0^t\lambda_i(s,p_i,\theta_1(s,p_i))\theta_1(s,p_i)\theta_j(s,p_i)ds+\int_0^t F(s,p_i;\theta_1(s,p_i))ds,\end{aligned}\qquad(3.3.5)$$

$$i,j=1,2;\quad i\neq j.$$

Для системы (3.1.5), (3.3.5) оценки (3.1.16), (3.1.17) имеют вид:

$$\left|A_i\theta - \frac{1}{2}\phi_i\right| \le \frac{1}{2}(1+T)A_2K + \frac{KT}{2}(B_2 + C_2K) + |F|T = \Omega_2(T),$$

$$\left|A_i\theta^1 - A_i\theta^2\right| \le \Theta_2(T)\left\|\theta^1 - \theta^2\right\|, \quad i = 1,2,$$

где

$$\left|\gamma_{ij}(t,x,u)\right| \le A_2 = const, \quad \left|\chi_i(t,x,u)\right| \le B_2 = const \quad \left|\lambda_i(t,x,u)\right| \le C_2 = const, \quad i = 1,2,$$

$$\Theta_2(T) = \frac{1}{2}\left(A_2 + L_2K\right) + \frac{T}{2}\left(L_2K + A_2 + M_2K + B_2 + K_2K^2 + 2C_2K + 2L\right),$$

$$\left|\gamma_{ij}(t,x,u_1) - \alpha_{ij}(t,x,u_2)\right| \le L_2|u_1 - u_2|, \quad L_2 \ge 0, \quad L_2 - const, \quad i = 1,2$$

$$\left|\chi_i(t,x,u_1) - \chi_i(t,x,u)\right| \le M_2|u_1 - u_2|, \quad M_2 \ge 0, \quad M_2 - const, \quad i = 1,2\,\mathbf{.}$$

$$\left|\lambda_i(t,x,u_1) - \lambda_i(t,x,u)\right| \le K_2|u_1 - u_2|, \quad K_2 \ge 0, \quad K_2 const, \quad i = 1,2.$$

Положительные корни уравнений $\Omega_2(T) = M$, $\Theta_2(T) = 1$ обозначим через T_5, T_6.

Отсюда следует, что оператор A при $T < T^* = \min\{T_0\ ,T_5,T_6\}$ осуществляет сжатое отображение шара $S(\theta_0, M)$ на себя. Следовательно, по принципу сжимающих отображений система уравнений (3.3.2), (3.1.5) имеет одно и только одно решение.

Теорема доказана.

Пример. 3.3.1. Проверим эквивалентность на примере.

Рассмотрим уравнение колебания струны:

$$\frac{\partial^2 u(t.x)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \tag{3.3.6}$$

с начальными условиями (3.1.2)

Для задачи решения интегральных уравнений (3.3.6), (3.1.2) имеют вид:

$p_i(s,t,x) = x + (-1)^i(at - as)$,

Для (3.3.6)-(3.1.2) уравнение (3.3.2) имеет следующий вид:

$$\vartheta_1(t,x) = \frac{1}{2}\varphi(p_1(0,t,x)),$$

где

$\varphi(x) = 2(u_t - au_x)\,|_{t=0} = 2(u_1(x) - au_0^{/}(x))$.

Следовательно

$\vartheta_1(t,x) = u_1(x - at) - au_0^{/}(x - at).$

Из обозначения $\vartheta_1(t,x) = D[-a(t,x)]u(t,x)$ имеем

$$u(t,x)=u_0(x+at)+\int_0^t u_1(x+at-2as)ds-a\int_0^t u_0{}'(x+at-2as)ds=$$

$$=u_0(x+at)+\int_0^t u_1(x+at-2as)ds+$$

$$+\frac{1}{2}u_0(x+at-2as)\big|_0^t=u_0(x+at)+\frac{1}{2}u_0(x-at)-\frac{1}{2}u_0(x+at)+\int_0^t u_1(x+at-2as)ds=$$

$$=\left|\begin{array}{l} x+at-2as=\tau \\ ds=-\dfrac{d\tau}{2a} \\ s=0 \qquad \tau=x+at \\ s=t \qquad \tau=x-at \end{array}\right|=\frac{u_0(a-xt)+u_0(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}u_1(\tau)d\tau=$$

Следовательно, получаем формулу Даламбера:

$$u(t,x)=\frac{u_0(a-xt)+u_0(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}u_1(\tau)d\tau$$

ГЛАВА 4. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО МНОГИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

4.1. Решение квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными методом дополнительного аргумента

Рассматривается нелинейное уравнение вида:

$$\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t^2} = u(t,x_1,x_2,...,x_n)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[u(t,x_1,x_2,...,x_n)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x}\right]+$$

$$+\frac{\partial u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i}+F(t;u(t,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):\xi_1,\xi_2,...,\xi_n), \qquad (4.1.1)$$

$(t,x_1,x_2,...,x_n)\in G_{n+1}(T)$,

Рассмотрим уравнение (4.1.1) с начальными условиями

$$\frac{\partial^k u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t^k}\bigg|_{t=0}=\widetilde{u}_k(x_1,x_2,...,x_n), \qquad (4.1.2)$$

$k=0,1, \quad (x_1,x_2,...,x_n)\in R^n$.

ТЕОРЕМА 4.1.1. Если 1) оператор F– непрерывный по первой переменной;

2) он удовлетворяет условию Липшица: существует такое $L>0$, что для любого $T_*\le T$

$$\| F(t;u_1(t,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)-F(t;u_2(t,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)\|_{G_{n+1}(T_*)}\le$$
$$\le L\| u_1(t,x_1,x_2,...,x_n)-u_2(t,x_1,x_2,...,x_n)\|_{G_{n+1}(T_*)},$$

3) $\widetilde{u}_0(x_1,x_2,...,x_n)\in \overline{C}_b^{(1)}(R^n), \widetilde{u}_1(x_1,x_2,...,x_n)\in \overline{C}(R^n)$

и удовлетворяют условию

$$\widetilde{u}_1(x_1,x_2,...,x_n)-\widetilde{u}_0(x_1,x_2,...,x_n)\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial \widetilde{u}_0(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i}=0. \qquad (4.1.13)$$

Тогда существует такое $T \le T_*$, явно определяемое на основе исходных данных, что задачи (4.1.1), (4.1.2) имеет единственное решение, ограниченное во всей области $G_{n+1}(T)$.

Доказательство.

Рассмотрим систему интегральных уравнений:

$$p_i(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;u) = x_i + \int_\tau^t u(s, p_1(s,t,x_1,x_2,...,x_n;u),..., p_n(s,t,x_1,x_2,...,x_n;u))ds,$$
$$i = 1,...,n, \qquad (4.1.4)$$
$$(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n) \in Q_2^n(T),$$

Введя обозначение

$$\nu(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n) = u(\tau, p_1(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;u),..., p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;u))$$

в (4.1.4), имеем:

$$p_i(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;\nu(s,t,x_1,x_2,...,x_n):s) = x_i + \int_\tau^t \nu(s,t,x_1,x_2,...,x_n)ds, \quad (4.1.5)$$

$$i = 1,2,...,n,$$

$$u(t,x_1,x_2,...,x_n) = \nu(t,t,x_1,x_2,...,x_n). \qquad (4.1.6)$$

Лемма 4.1.1. Решение задачи (4.1.1), (4.1.2) $u(t,x_1,x_2,...,x_n)$, которое при $t=\tau$ совпадает с решением интегрального уравнения

$$\nu(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n) = \vartheta_0(p_1(0,t,x_1,x_2,...,x_n;\nu:s)),..., p_n(0,t,x_1,x_2,...,x_n;\nu:s)) +$$
$$+\int_0^\tau (\tau-\rho)F(\rho;\nu(\rho,\rho,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)d\rho, \qquad (4.1.7)$$
$$(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n) \in Q_2^n(T)$$

Доказательство леммы 4.1.1.

Если имеет место равенство

$$D_n[-\nu(t,t,x_1,x_2,...,x_n)]\nu(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n) = 0, \qquad (4.1.8)$$

то из (4.1.5) вытекает соотношения

$$D_n[-\nu(t,t,x_1,x_2,...,x_n)]p_i(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;\nu:s) = 0, \quad i=1,...,n,. \qquad (4.1.9)$$

Обозначая через

$$z(t,x_1,x_2,...,x_n;u) = D_n[-u(t,x_1,x_2,...,x_n)]u(t,x_1,x_2,...,x_n),$$

запишем уравнение (4.1.1) в виде

$$D_n[u(t,x_1,x_2,...,x_n)]z(t,x_1,x_2,...,x_n;u) = F(t;u(t,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)). \qquad (4.1.10)$$

Уравнение (4.1.10) с начальными условиями (4.1.2) и условием (4.1.3) с помощью метода дополнительного аргумента сводится к решению интегро-дифференциального уравнения

$$z(t,x_1,x_2,...,x_n;u)=\int_0^t F(s;u(s,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n:\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)ds. \qquad (4.1.11)$$

В самом деле, дифференцируя (4.1.11), получаем (4.1.10).

Полагая $t=0$ в (4.1.11), получаем $z(0,x_1,x_2,...,x_n;u)=0.$

Задача (4.1.11), (4.1.2) с помощью метода дополнительного аргумента сводится к решению интегрального уравнения

$$u(t,x_1,x_2,...,x_n)=\vartheta_0((p_1(0,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s)),...,p_n(0,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s))+$$
$$\int_0^t(t-\rho)F(\rho;v(\rho,\rho,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)d\rho \qquad (4.1.12)$$

В самом деле, дифференцируя (4.1.12), получаем

$$D_n[-u(t,x_1,x_2,...,x_n)]u(t,x_1,x_2,...,x_n)=$$
$$=\sum_{i=1}^n\frac{\partial\vartheta_0}{\partial x_i}D_n[-u(t,x_1,x_2,...,x_n)]p_i(0,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s)+$$
$$+\int_0^t(t-\rho)F(\rho;v(\rho,\rho,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)d\rho.$$

В силу (4.1.6), (4.1.9) доказано выполнение (4.1.12). Полагая $t=0$ в (4.1.12), получаем (4.1.2).

Лемма 4.1.1 доказана.

Лемма 4.1.2. Существует такое $T_*>0$, что интегральное уравнение (4.1.7) имеет единственное решение в $\overline{C_b}^{(2)}(Q_2^n(T_*))$.

Доказательство леммы 4.1.2.

Запишем интегральное уравнение (4.1.7) в виде

$$v(\tau,t,x_1,...,x_n)=A(\tau,p_1(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s)),...,p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s);v(s,w,x_1,...,x_n):s,w),$$

где оператор

$$A(\tau,p_1(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s)),...,p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s);v(s,w,x_1,...,x_n):s,w)=$$
$$=\vartheta_0(p_1(0,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s)),...,p_n(0,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s))+$$
$$+\int_0^\tau(\tau-\rho)F(\rho;v(\rho,\rho,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)d\rho,$$

Имеем при $\tau\le t\le T_*\le T$:

$$\left|A(\tau,p_1(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;0:0)),...,p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;0:0))\right| =$$

$$=\left|\vartheta_0(p_1(0,t,x_1,x_2,...,x_n;0:0)),...,p_n(0,t,x_1,x_2,...,x_n;0:0))+\right.$$

$$\left.+\int_0^\tau(\tau-\rho)F(\rho;0)d\rho\right|\le\left|\vartheta_0(p_1(0,t,x_1,x_2,...,x_n;0:0)),...,p_n(0,t,x_1,x_2,...,x_n;0:0))\right|+$$

$$+\left|\int_0^\tau(\tau-\rho)F(\rho;0)d\rho\right|\le\left\|\vartheta_0\right\|_{R^n}+\|F(t;0)\|_{[0,T]}\frac{t^2}{2}\le\widetilde{\Omega}_0(T_*),$$

где

$$\widetilde{\Omega}_0(S)\equiv\|\vartheta_0\|_{R^n}+\|F(t;0)\|_{[0,T]}\frac{S^2}{2}.$$

Далее, при $\tau\le t\le T_*\le T$:

$$\left|A(\tau,p_1(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v_1(s,w,x_1,...,x_n):s,w),...,p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v_1(s,w,x_1,...,x_n):s,w)-\right.$$

$$\left.-A(\tau,p_1(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v_2(s,w,x_1,...,x_n):s,w),...,p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v_2(s,w,x_1,...,x_n):s,w\right|\le$$

$$\le\sum_{i=1}^n\left\|\frac{\partial\vartheta_0}{\partial x_i}\right\|\int_0^t|v_1(s,t,x_1,...,x_n)-v_2(s,t,x_1,...,x_n)|\,ds+$$

$$+\int_0^\tau(\tau-\rho)L\|v_1(w,s,x_1,...,x_n)-v_2(w,s,x_1,...,x_n)\|_{G_{n+1}(t)}\,d\rho\le$$

$$\le t\left(\sum_{i=1}^n\left\|\frac{\partial\vartheta_0}{\partial x_i}\right\|+\frac{T}{2}L\right)\|v_1(w,s,x_1,...,x_n)-v_2(w,s,x_1,...,x_n)\|_{G_{n+1}(t)}\le$$

$$\le T_{\bullet}\Omega_1\|v_1(w,s,x_1,...,x_n)-v_2(w,s,x_1,...,x_n)\|_{G_{n+1}(t)},$$

где $\widetilde{\Omega}_1=\sum_{i=1}^n\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|+\frac{T}{2}L.$

Если выбрать $T_*=\frac{1}{2}\widetilde{\Omega}_1$, то из следствия из принципа сжимающих отображений Банаха получаем, что уравнение (4.1.6) имеет решение в пространстве функций с нормой не более $2\widetilde{\Omega}_0,(T_*)$.

Лемма 4.1.2 доказана.

Лемма 4.1.3. Функция $v(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n)\in\overline{C}_b^{(2)}(Q_2^n(T))$, являющаяся при $0\le t\le T_*\le T$: решением интегрального уравнения (4.1.7), будет удовлетворять (4.1.8), а функция $u(t,x_1,x_2,...,x_n)$, определенная согласно (4.1.6), удовлетворяет (4.1.12).

Доказательство леммы 4.1.3**.** Пусть $v(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n)\in\overline{C}_b^{(2)}(Q_2^n(T_*))$ обращает интегральное уравнение (4.1.7) в тождество. Непосредственным дифференцированием из (4.1.7) выводится тождество

$$\omega(\tau,t,x_1,...,x_n)\equiv\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\vartheta_0}{\partial x_i}\int_0^t\omega(s,t,x_1,...,x_n)ds,$$

где

$$\omega(\tau,t,x_1,...,x_n)=D_n[-v(t,t,x_1,x_2,...,x_n)]v(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n).$$

Из тождества следует равенство $\omega(\tau,t,x_1,...,x_n)=0$. Отсюда следует (4.1.8). Полагая τ=t в (4.1.7), из Леммы 4.1.2 получаем (4.1.12).

Лемма 4.1.3 доказана.

Лемма 4.1.4. Решение уравнения (4.1.6) при достаточно малых t имеет непрерывные производные по всем переменным.

Доказательство леммы 4.1. 4. Если предположить, что $v_t\in\overline{C}$, то функциональном пространстве $\overline{C}$ $(Q_2^n(T_*))$ имеем

$$\left\|\frac{\partial A(\tau,p_1(\tau,t,x_1,...,x_n;v:s)),...,p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s);v(s,w,x_1,...,x_n):s,w)}{\partial t}\right\|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{n}\left\|\frac{\partial\vartheta_0}{\partial x_i}\right\|(v+\frac{T^2}{2}\|v_t\|)=V_t\ =const<\infty.$$

Справедлива оценка

$$\left\|\frac{\partial A(\tau,p_1(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v_1:s)),...,p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v_1:s);v_1:s,w)}{\partial t}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial A(\tau,p_1(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v_2:s)),...,p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v_2:s);v_2:s,w)}{\partial t}\right\|\le$$

$$\le 2T_*\widetilde{\Omega}_1\|v_{1t}-v_{2t}\|.$$

Аналогично получаем для оператора $\dfrac{\partial A}{\partial x_i},\quad i=1,2,...,n$ оценки

$$\left\|\frac{\partial A(\tau,p_1(\tau,t,x_1,...,x_n;v:s)),...,p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v:s);v(s,w,x_1,...,x_n):s,w)}{\partial x_i}\right\|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{n}\left\|\frac{\partial\vartheta_0}{\partial x_i}\right\|(1+\frac{T^2}{2}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|)=V_{x_i}\ =const<\infty.$$

$$\left\| \frac{\partial A(\tau, p_1(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v_1:s)),...,p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v_1:s);v_1:s,w)}{\partial x_i} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial A(\tau, p_1(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v_2:s)),...,p_n(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n;v_2:s);v_2:s,w)}{\partial x_i} \right\| \le$$

$$\le 2T_* \widetilde{\Omega}_1 \left\| \frac{\partial v_1}{\partial x_i} - \frac{\partial v_2}{\partial x_i} \right\|, \quad i = 1,2,...,n..$$

Дифференцируя (12) по t и по $x,$ получаем

$$\left\| \frac{\partial u(t,x_1,...,x_n)}{\partial t} \right\| \le \|F\| T + V_t, \quad \left\| \frac{\partial u(t,x_1,...,x_n)}{\partial x_i} \right\| \le V_{x_i}, \quad i = 1,2,...,n.$$

Продолжая этот процесс, можно получить, справедливость

$$v(\tau,t,x_1,...,x_n) \in \overline{C}_b^{(2)}(Q_2^n(T_*)), \quad u(t,x_1,...,x_n) \in \overline{C}_b^{(2)}(G_{n+1}(T_*)).$$

Лемма 4.1.4 и теорема доказаны.

4.2. Исследование решений нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными

Рассматривается дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка вида:

$$\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t^2} = a^2(t,x_1,x_2,...,x_n)\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i \partial x_j} +$$

$$+c(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i} + F(t,x_1,x_2,...,x_n;u(t,x_1,x_2,...,x_n)) \quad (4.2.1)$$

$$(t,x_1,x_2,...,x_n)\in G_{n+1}(T),$$

с начальными условиями

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = u_k(x_1,x_2,...,x_n), \quad k=0,1, \quad (x_1,x_2,...,x_n)\in R^n. \quad (4.2.2)$$

Воспользуемся обозначениями:

$$\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n) = D_n[(-1)^i a(t,x_1,x_2,...,x_n)]u(t,x_1,x_2,...,x_n),$$

$$g_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u) = \frac{1}{a(t,x_1,x_2,...,x_n)}[c(t,x_1,x_2,...,x_n,u) +$$

$$+(-1)^i D_n[(-1)^{i+1}a(t,x_1,x_2,...,x_n)]a(t,x_1,x_2,...,x_n)], \quad i=1,2,$$

$$f_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u) = (-1)^{i+1}D_n[(-1)^{i+1}a(t,x_1,x_2,...,x_n)]g_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u), \quad i=1,2,$$

$$r_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u) = (-1)^{i+1}\frac{\partial g_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)}{\partial u}, \quad i=1,2.$$

Теорема 4.2.2. Пусть 1) оператор $F(t,x_1,x_2,...,x_n;u)$ отображает непрерывные функции в непрерывные и удовлетворяет условию Липшица:

$$\left|F(t,x_1,x_2,...,x_n;u_1) - F(t,x_1,x_2,...,x_n;u_2)\right| \le L\left\|u_1-u_2\right\|_{C(G_{n+1}(T))}, \quad L=const,$$

$u_k(x_1,x_2,...,x_n)\in \overline{C}_b^{(2-k)}(R^n), k=0,1, a(t,x_1,x_2,...,x_n)\in \overline{C}_b^{(2)}(G_{n+1}(T)),$

$b(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\in \overline{C}_b^{(2)}(G_{n+1}(T)\times R)$ и вместе со своими производными удовлетворяют условию Липшица по u.

Тогда существует такое $T^*>0$, что задача (4.2.1), (4.2.2) имеет единственное решение в $\overline{C}_b^{(2)}(G_{n+1}(T^*))$.

Доказательство.

Лемма 4.2.1. Задача (4.2.1)-(4.2.2) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$u(t,x_1,x_2,...,x_n)=u_0(p_i(0,t,x_1,x_2,...,x_n)+\int_0^t \vartheta_i(s,p_i(s.t.x_1,x_2,...,x_n))ds \qquad (4.2.4)$$

$$\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n)=\frac{1}{2}\varphi_i(p_i(0,t,x_1,x_2,...,x_n))+(-1)^{i+1}\frac{1}{2}g_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)u+$$
$$+(-1)^i\frac{1}{2}\int_0^t g_i(s,p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n),u(s,p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n))\vartheta_i(s,p_i(s,t,,x_1,x_2,...,x_n)ds-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t f_{i.}(s,p_i,u(s,p_i(s,t,,x_1,x_2,...,x_n))u(s,p_i)ds-\frac{1}{2}\int_0^t r_i(s,p_i,u(s,p_i))u(s,p_i)\times$$
$$\times\vartheta_j(s,p_i(s,t,,x_1,x_2,...,x_n)ds+\int_0^t F(s,p_i(s,t,,x_1,x_2,...,x_n,u(s,p_i))ds,\quad i,j=1,2;\quad i\neq j, \qquad (4.2.5)$$

где

$$\left[2\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n)+(-1)^i g_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)u(t,x_1,x_2,...,x_n)\right]_{t=0}=\varphi_i(x_1,x_2,...,x_n), \qquad (4.2.6)$$
$i=1,2,$

$p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n)=(p_i^1(s,t,x_1,x_2,...,x_n),...,p_i^n(s,t,x_1,x_2,...,x_n)),\quad i=1,2-$ решения соответствующих систем интегральных уравнений:

$$p_i^j(s,t,x_1,x_2,...,x_n)=x_j+(-1)^i\int_s^t a(\tau,p_i(\tau,t,x_1,x_2,...,x_n))d\tau, \qquad (4.2.7)$$

$i=1,2,\quad j=1,...,n,$

$(s,t,x_1,x_2,...,x_n)\in Q_2^n(T).$

Доказательство леммы 4.2.1.

Пусть $u(t,,x_1,x_2,...,x_n),\vartheta_i(t,,x_1,x_2,...,x_n),\ i=1,2$ - решение системы интегральных уравнений (4.2.4),(4.2.5). Непосредственным дифференцированием из (4.2.4), (4.2.5) имеем:

$$D_n[(-1)^i a(t,,x_1,x_2,...,x_n)]u(t,,x_1,x_2,...,x_n)=\vartheta_i(t,,x_1,x_2,...,x_n), \qquad (4.2.8)$$

$$D_n[(-1)^{i+1}a(t,,x_1,x_2,...,x_n)]\vartheta_i(t,,x_1,x_2,...,x_n)=(-1)^{i+1}\frac{1}{2}g_i(t,,x_1,x_2,...,x_n,u)\times$$
$$\times\vartheta_j(t,,x_1,x_2,...,x_n)+(-1)^i\frac{1}{2}g_i(t,,x_1,x_2,...,x_n,u)\vartheta_i(t,,x_1,x_2,...,x_n)+ \qquad (4.2.9)$$
$$+F(t,,x_1,x_2,...,x_n;u),\quad i,j=1,2,\quad i\neq j.$$

Подставляя (4.2.8) в (4.2.9), получаем уравнению (4.2.1).

Таким образом, мы доказали, система уравнений (4.2.4), (4.2.5) удовлетворяет уравнению (4.2.1). Система уравнений (4.2.4), (4.2.5) удовлетворяет и начальному условию (4.2.2).

Теперь покажем, что решение задачи (4.2.1)-(4.2.2) является решением системы интегральных уравнений (4.2.4), (4.2.5) т.е. решение задачи (4.2.1)-(4.2.2) сводим к решению системы интегральных уравнений (4.2.4)-(4.2.5). Для этого запишем уравнение (4.2.1) в виде

$$D_n[(-1)^{i+1}a(t,x_1,x_2,...,x_n)]\big(2\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n)+(-1)^i g_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u))u\big)=$$

$$\begin{gathered}=(-1)^i g_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n)-f_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)u-\\ -r_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)u(t,x_1,x_2,...,x_n)\vartheta_j(t,x_1,x_2,...,x_n)+2F(t,x_1,x_2,...,x_n,u),\\ i,j=1,2;\quad i\neq j.\end{gathered}\tag{4.2.10}$$

Действительно из (4.2.10) имеем:

$$2D_n[(-1)^{i+1}a(t,x_1,x_2,...,x_n)]\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n)-r_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\vartheta_j(t,x_1,x_2,...,x_n)\times$$

$$\times u(t,x_1,x_2,...,x_n)-f_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)u(t,x_1,x_2,...,x_n)+(-1)^i g_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\times$$

$$\times\vartheta_j(t,x_1,x_2,...,x_n)=(-1)^i g_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n)-$$

$$-f_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)u(t,x_1,x_2,...,x_n)-r_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\vartheta_j(t,x_1,x_2,...,x_n)\times$$

$$\times u(t,x_1,x_2,...,x_n)+2F(t,x_1,x_2,...,x_n,u),\quad i,j=1,2;\quad i\neq j.$$

Отсюда

$$\begin{gathered}2D_n[(-1)^{i+1}a(t,x_1,x_2,...,x_n)]\vartheta_i(t,x)=(-1)^{i+1}g_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\vartheta_j(t,x_1,x_2,...,x_n)+\\ +(-1)^i g_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n)+2F(t,x_1,x_2,...,x_n,u),\\ i,j=1,2;\quad i\neq j.\end{gathered}\tag{4.2.11}$$

Для (4.2.11) принимая во внимание обозначения (4.2.3), получаем:

$$2\left[\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t^2} - a^2(t,x_1,x_2,...,x_n)\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i \partial x_j} + \right.$$

$$\left. + (-1)^i \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i} D_n[(-1)^{i+1} a(t,x_1,x_2,...,x_n)]a(t,x_1,x_2,...,x_n)\right] =$$

$$= (-1)^{i+1} g_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u) D_n[(-1)^{i+1} a(t,x_1,x_2,...,x_n)]u(t,x_1,x_2,...,x_n) +$$

$$+ (-1)^i g_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u) D_n[(-1)^i a(t,x_1,x_2,...,x_n)]u(t,x_1,x_2,...,x_n) +$$

$$+ 2F(t,x_1,x_2,...,x_n,u), \quad i = 1,2.$$

Отсюда

$$2\left[\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t^2} - a^2(t,x_1,x_2,...,x_n)\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i \partial x_j} + \right.$$

$$\left. + (-1)^i \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i} D_n[(-1)^{i+1} a(t,x_1,x_2,...,x_n)]a(t,x_1,x_2,...,x_n)\right] =$$

$$= 2\big(c(t_{,1},x_2,...,x_n,u) + (-1)^i D_n[(-1)^{i+1} a(t_{,1},x_2,...,x_n)]a(t_{,1},x_2,...,x_n)\big) \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(t_{,1},x_2,...,x_n)}{\partial x_i} + 2F(t,x_1,x_2,...,x_n,u),$$

$i = 1,2.$

Таким образом, мы показали, что из (4.2.11) получается уравнение (4.2.1).

Введем обозначение

$$z(t,x_1,x_2,...,x_n;u) = 2\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n) + (-1)^i g_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u))u.$$

Уравнение (4.2.10) с условиями (4.2.2) с помощью метода дополнительного аргумента сводится к решению интегро-дифференциального уравнения

$$z(t,x_1,x_2,...,x_n;u) = \varphi_i(p_i(0,t,x_1,x_2,...,x_n)) + (-1)^i \int_0^t g_i(s,p_i,u(s,p_i))\vartheta_i(s,p_i)ds -$$

$$- \int_0^t f_{i.}(s,p_i,u(s,p_i))u(s,p_i)ds - \int_0^t r_i(s,p_i,u(s,p_i))u(s,p_i)\vartheta_j(s,p_i)ds +$$

$$+ 2\int_0^t F(s,p_i,u(s,p_i))ds, \quad i,j = 1,2; \quad i \neq j. \qquad (4.2.12)$$

В самом деле, дифференцируя (4.2.12), получаем (4.2.10). Полагая $t=0$ в (4.2.12), получаем (4.2.6). Из (4.2.12) следует (4.2.5).

Из обозначения (4.2.3) методом дополнительного получаем (4.2.4). Лемма 4.2.1. доказана.

Лемма 4.2.2. Существует такое $T^*>0,$ что система интегральных уравнений (4.2.4), (4.2.5) имеет единственное решение.

Доказательство леммы 4.2.2.

Запишем систему интегральных уравнений (4.2.4)-(4.2.5) в виде:

$$\theta = A\theta, \tag{4.2.13}$$

где $\theta=(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ - вектор-функция переменных $(t,x_1,x_2,...,x_n)$,

$\theta_1=u(t,x_1,x_2,...,x_n)$, $\theta_2=\vartheta_1(t,x_1,x_2,...,x_n)$, $\theta_3=\vartheta_2(t,x_1,x_2,...,x_n)$,

$A=(A_1,A_2,A_3)$ определяются равенствами:

$$A_1\theta = u_0(p_i(0,t,x_1,x_2,...,x_n)+\int_0^t \theta_i(s,p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n))ds, \quad i=1,2 \tag{4.2.14}$$

$$A_i\theta=\frac{1}{2}\varphi_i(p_i(0,t,x_1,x_2,...,x_n))+(-1)^{i+1}\frac{1}{2}g_i(t,xx_1,x_2,...,x_n\theta_1)\theta_1+$$
$$+(-1)^i\frac{1}{2}\int_0^t g_i(s,p_i,\theta_1(s,p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n))\theta_i(s,p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n)ds-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t f_{i.}(s,p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n,\theta_1(s,p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n))\theta_1(s,p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n)ds-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t r_i(s,p_i,\theta_1(s,p_i))\theta_1(s,p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n)\theta_j(s,p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n)ds+$$
$$+\int_0^t F(s,p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n;\theta_1(s,p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n))ds, \quad i,j=1,2; \quad i\neq j. \tag{4.2.15}$$

Покажем, что уравнение (4.2.13) имеет в области $G_{n+1}(T)$ при $T<T^*$ единственное, непрерывное решение, удовлетворяющее неравенству $\|\theta-\theta_0\|\le M$.

Справедливы следующие оценки:

$\left|A_1\theta-u_0\right|\le KT,$

$\left|A_i\theta-\dfrac{1}{2}\varphi_i\right|\le\dfrac{1}{2}(1+T)A_0K+\dfrac{KT}{2}(B_0+C_0K)+\left|F\right|T=\Omega_0(T),$

$\left|A_1\theta^1-A_1\theta^2\right|\le T\left\|\theta^1-\theta^2\right\|,$

$\left|A_i\theta^1-A_i\theta^2\right|\le\Theta_0(T)\left\|\theta^1-\theta^2\right\|, \quad i=1,2,$

где

$$\left|g_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\right| \le A_0 = const, \quad \left|f_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\right| \le B_0 = const,$$

$$\left|r_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\right| \le C_0 = const, \quad i=1,2,$$

$$\Theta_0(T) = \frac{1}{2}\left(A_0 + L_0K\right) + \frac{T}{2}\left(L_0K + A_0 + M_0K + B_0 + K_0K^2 + 2C_0K + 2L\right),$$

$$\left|g_i(t,x,u_1) - g_i(t,x,u_2)\right| \le L_0\left|u_1 - u_2\right|, \quad L_0 \ge 0, \quad L_0 - const, \quad i=1,2$$

$$\left|f_i(t,x,u_1) - f_i(t,x,u)\right| \le M_0\left|u_1 - u_2\right|, \quad M_0 \ge 0, \quad M_0 - const, \quad i=1,2 .$$

$$\left|r_i(t,x,u_1) - r_i(t,x,u)\right| \le K_0\left|u_1 - u_2\right|, \quad K_0 \ge 0, \quad K_0 - const, \quad i=1,2.$$

$$\|\theta\| \le \|\theta_0\| + M = K.$$

Обозначим через $T_0 = \dfrac{M}{K}$, $T_1, T_2 -$ положительные корни уравнений соответственно $\Omega_0(T) = M$, $\Theta_0(T) = 1$.

При $T < T^* = \min\{T_0 , T_1, T_2\}$ по принципу сжатых отображений система уравнений (4.2.4), (4.2.5) имеет одно и только одно решение.

Теорема доказана.

4.3. Сведение нелинейной задачи электрических колебаний в проводах со многими переменными к системам интегральных уравнений

Рассмотрено нелинейное уравнение для определения напряжения или электрического тока $u(t,x)$:

$$\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t^2} = a^2(t,x_1,x_2,...,x_n)\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x^2} + \\ + b(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\frac{\partial u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t} + F(t,x_1,x_2,...,x_n;u), \tag{4.3.1}$$

$(t,x_1,x_2,...,x_n) \in G_{n+1}(T)$,

с начальными условиями (4.2.2).

ТЕОРЕМА 4.3.1. Пусть выполняются все условия теоремы 4.2.1, $b(t,x_1,x_2,...,x_n,u) \in \overline{C}_b^{(2)}(G_2(T)\times R)$ и вместе со своими производными удовлетворяют условию Липшица.

Тогда существует такое $T^* > 0$, что задача (4.3.1), (4.2.2) имеет единственное решение в $\overline{C}_b^{(2)}(G_2(T^*))$.

Доказательство.

При доказательстве теоремы воспользуемся обозначениями, приведенными в 4.2. и следующими обозначениями:

$$\alpha_{ij}(t,x_1,x_2,...,x_n;u) = b(t,x_1,x_2,...,x_n;u) + \\ + (-1)^j \frac{1}{a(t,x_1,x_2,...,x_n)} D_n[(-1)^{i+1}a(t,x_1,x_2,...,x_n)]a(t,x_1,x_2,...,x_n), \; i,j=1,2,$$

$$\beta_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u) = D_n[(-1)^{i+1}a(t,x_1,x_2,...,x_n)]\alpha_{i1}(t,x_1,x_2,...,x_n,u),$$

$$\mu_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u) = \frac{\partial \alpha_{i1}(t,x_1,x_2,...,x_n,u)}{\partial u}, \quad i=1,2.$$

Задача (4.3.1)-(4.2.2) эквивалентна системе интегральных уравнений (4.2.4) и

$$\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n)=\frac{1}{2}\psi_i(p_i(0,t,x_1,x_2,...,x_n))+\frac{1}{2}\alpha_{i1}(t,x_1,x_2,...,x_n,u)u(t,x_1,x_2,...,x_n)+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t\alpha_{i2}(s,p_i,u(s,p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n))\vartheta_i(s,p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n)ds-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t\beta_i(s,p_i,u(s,p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n))u(s,p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n)ds-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t\mu_i(s,p_i,u(s,p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n))u(s,p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n)\vartheta_j(s,p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n)ds+$$
$$+\int_0^t F(s,p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n,u(s,p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n))ds,\quad i,j=1,2;\quad i\neq j.$$
(4.3.2)

где
$$\left[2\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n)-\alpha_{i1}(t,x_1,x_2,...,x_n,u(t,x_1,x_2,...,x_n)u(t,x_1,x_2,...,x_n\right]_{t=0}=$$
$$\psi_i(x_1,x_2,...,x_n),\quad i=1,2.$$

Пусть $u(t,x_1,x_2,...,x_n)$, $\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n)$, $i=1,2$ решение системы интегральных уравнений (4.2.4), (4.3.2). Непосредственным дифференцированием из(4.2.4), (4.3.2) имеем:

$$D[(-1)^i a(t,x_1,x_2,...,x_n)]u(t,x_1,x_2,...,x_n)=\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n),$$
$$D[(-1)^{i+1}a(t,x)]\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n)=\frac{1}{2}\alpha_{i1}(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\vartheta_j(t,x_1,x_2,...,x_n)+$$
$$+\frac{1}{2}\alpha_{i2}(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n)+F(t,x_1,x_2,...,x_n;u),\quad i,j=1,2;\quad i\neq j.$$

Таким образом, мы доказали, система уравнений (4.2.4), (4.3.2) удовлетворяет уравнению (4.3.1). Система уравнений (4.2.4), (4.3.2) удовлетворяет и начальному условию (4.2.2).

Теперь покажем, что решение задачи (4.3.1)-(4.2.2) является решением системы интегральных уравнений (4.2.4), (4.3.2) , т.е. решение задачи (4.3.1), (4.2.2) сводим к решению системы интегральных уравнений (4.2.4), (4.3.2). Для этого запишем уравнение (4.3.1) в виде

$$D[(-1)^{I+1}a(t,x_1,x_2,...,x_n)]\left(2\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n)+(-1)^i\alpha_{i1}(t,x_1,x_2,...,x_n,u))u\right)=$$
$$=\alpha_{i2}(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n)-\beta_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)u-$$
$$-\mu_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)u(t,x_1,x_2,...,x_n)\vartheta_j(t,x_1,x_2,...,x_n)+2F(t,x_1,x_2,...,x_n,u),$$
$$i,j=1,2;\quad i\neq j$$
(4.3.3)

Действительно из (4.3.3) имеем:

$$2D_n[(-1)^{i+1}a(t,x_1,x_2,...,x_n)]\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n)-\mu_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\times$$

$$\times\vartheta_j(t,x_1,x_2,...,x_n)u(t,x_1,x_2,...,x_n)-\beta_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)u(t,x_1,x_2,...,x_n)-$$

$$-\alpha_{i1}(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\vartheta_j(t,x_1,x_2,...,x_n)=\alpha_{i2}(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n)-$$

$$-\beta_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)u(t,x_1,x_2,...,x_n)-\mu_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\vartheta_j(t,x_1,x_2,...,x_n)\times$$

$$\times u(t,x_1,x_2,...,x_n)+2F(t,x_1,x_2,...,x_n;u),\quad i,j=1,2;\quad i\neq j.$$

Отсюда

$$2D_n[(-1)^{i+1}a(t,x_1,x_2,...,x_n)]\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n)-\alpha_{i1}(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\times$$

$$\times\vartheta_j(t,x_1,x_2,...,x_n)=\alpha_{i2}(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n)+$$

$$+2F(t,x_1,x_2,...,x_n;u),\quad i,j=1,2;\quad i\neq j. \tag{4.3.4}$$

Для (3.2.4) принимая во внимание обозначения (3.2.3), получаем:

$$2\left[\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t^2}-a^2(t,x_1,x_2,...,x_n)\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i\partial x_j}+\right.$$

$$\left.+(-1)^i\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i}D_n[(-1)^{i+1}a(t,x_1,x_2,...,x_n)]a(t,x_1,x_2,...,x_n)\right]=$$

$$=\left(b(t,x_1,x_2,...,x_n,u)-\frac{1}{a(t,x_1,x_2,...,x_n)}D_n[(-1)^{i+1}a(t,x_1,x_2,...,x_n)]a(t,x_1,x_2,...,x_n)\right)\times$$

$$\times D_n[(-1)^{i+1}a(t,x_1,x_2,...,x_n)]u(t,x_1,x_2,...,x_n)+$$

$$+\left(b(t,x_1,x_2,...,x_n,u)+\frac{1}{a(t,x_1,x_2,...,x_n)}D_n[(-1)^{i+1}a(t,x_1,x_2,...,x_n)]a(t,x_1,x_2,...,x_n)\right)\times$$

$$\times D_n[(-1)^{i}a(t,x_1,x_2,...,x_n)]u(t,x_1,x_2,...,x_n)+2F(t,x_1,x_2,...,x_n,u),\quad i=1,2.$$

Отсюда

$$2\left[\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t^2}-a^2(t,x_1,x_2,...,x_n)\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i\partial x_j}+\right.$$

$$\left.+(-1)^i\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i}D_n[(-1)^{i+1}a(t,x_1,x_2,...,x_n)]a(t,x_1,x_2,...,x_n)\right]=$$

$$=2\left(b(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\frac{\partial u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t}+\right.$$

$$+(-1)^i D_n[(-1)^{i+1}a(t,x_1,x_2,...,x_n)]a(t,x_1,x_2,...,x_n))\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i}+2F(t,x_1,x_2,...,x_n,u),$$

$i=1,2.$

Таким образом, мы показали, что из (4.3.3) получается уравнение (4.3.1).

Введя обозначение

$$z(t,x_1,x_2,...,x_n;u)=2\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n)+(-1)^i\alpha_{i1}(t,x_1,x_2,...,x_n,u)u(t,x_1,x_2,...,x_n),$$

запишем (4.3.3) в виде:

$$D_n[(-1)^{I+1}a(t,x_1,x_2,...,x_n)]z(t,x_1,x_2,...,x_n;u)=\alpha_{i2}(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n)-$$

$$-\beta_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)u-\mu_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)u(t,x_1,x_2,...,x_n)\vartheta_j(t,x_1,x_2,...,x_n)+$$

$$+2F(t,x_1,x_2,...,x_n,u),\quad i,j=1,2;\quad i\neq j. \qquad (4.3.5)$$

Для задачи (4.3.5), (4.2.2.) применяя метод дополнительного аргумента, имеем

$$z(t,x_1,x_2,...,x_n;u)=\psi_i(p_i(0,t,x_1,x_2,...,x_n))+\int_0^t\alpha_{i2}(s,p_i,u(s,p_i))\vartheta_i(s,p_i)ds-$$
$$-\int_0^t\beta_i(s,p_i,u(s,p_i))u(s,p_i)ds-\int_0^t\mu_i(s,p_i,u(s,p_i))u(s,p_i)\vartheta_j(s,p_i)ds+ \qquad (4.3.6)$$
$$+2\int_0^t F(s,p_i,u(s,p_i))ds,\quad i,j=1,2;\quad i\neq j.$$

В самом деле, дифференцируя (4.3.6), получаем (4.3.5). Из (4.3.6) следует (4.2.2).

Лемма доказана.

Лемма 4.3.2. Существует такое $T^*>0,$ что система интегральных уравнений (4.2.4), (4.3.2) имеет единственное решение.

При доказательстве леммы 4.3.2. воспользуемся леммой 4.2.2.

Здесь компоненты оператора $A=(A_1,A_2,A_3)$ определяются равенствами: (3.2.13)

$$A_i\theta=\frac{1}{2}\psi_i(p_i(0,t,x_1,x_2,...,x_n))+\frac{1}{2}\alpha_{i1i}(t,x_1,x_2,...,x_n,\theta_1)\theta_1+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t\alpha_{i2}(s,p_i,\theta_1(s,p_i))\theta_i(s,p_i)ds-\frac{1}{2}\int_0^t\beta_{i.}(s,p_i,\theta_1(s,p_i))\theta_1(s,p_i)ds- \qquad (4.2.7)$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t\mu_i(s,p_i,\theta_1(s,p_i))\theta_1(s,p_i)\theta_j(s,p_i)ds+\int_0^t F(s,p_i;\theta_1(s,p_i))ds,$$

$i,j=1,2;\quad i\neq j.$

Имеем следующие оценки:

$$\left|A_i\theta-\frac{1}{2}\psi_i\right|\leq\frac{1}{2}(1+T)A_1K+\frac{KT}{2}(B_1+C_1K)+|F|T=\Omega_1(T),$$

$$\left|A_i\theta^1-A_i\theta^2\right|\leq\Theta_1(T)\left\|\theta^1-\theta^2\right\|,\quad i=1,2,$$

где

$$\left|\alpha_{ij}(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\right| \le A_1 = const, \quad \left|\beta_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\right| \le B_1 = const,$$

$$\left|\mu_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\right| \le C_1 = const, \quad i=1,2,$$

$$\Theta_1(T) = \frac{1}{2}\left(A_1 + L_1K\right) + \frac{T}{2}\left(L_1K + A_1 + M_1K + B_1 + K_1K^2 + 2C_1K + 2L\right),$$

$$\left|\alpha_{ij}(t,x_1,x_2,...,x_n,u_1) - \alpha_{ij}(t,x_1,x_2,...,x_n,u_2)\right| \le L_1\left|u_1 - u_2\right|,$$

$$L_1 \ge 0, \quad L_1 - const, \quad i=1,2$$

$$\left|\beta_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u_1) - \beta_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\right| \le M_1\left|u_1 - u_2\right|,$$

$$M_1 \ge 0, \quad M_1 - const, \quad i=1,2$$

$$\left|\mu_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u_1) - \mu_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\right| \le K_1\left|u_1 - u_2\right|,$$

$$K_1 \ge 0, \quad K_i - const, \quad i=1,2.$$

Положительные корни уравнений $\Omega_1(T) = M, \Theta_1(T) = 1$ обозначим через T_3, T_4.

Отсюда следует, что оператор A при $T < T^* = \min\{T_0, T_3, T_4\}$ осуществляет сжатое отображение шара $S(\theta_0, M)$ на себя. Теорема доказана.

4.4. Исследование решений операторно-дифференциального уравнения гиперболического типа

Рассмотрим операторно-дифференциальное уравнение гиперболического типа вида:

$$\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t^2} = a^2(t,x_1,x_2,...,x_n)\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x^2} +$$
$$+ b(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\frac{\partial u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t} + c(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\frac{\partial u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x} + \quad (4.4.1)$$
$$+ F(t,x_1,x_2,...,x_n;u),$$
$$(t,x_1,x_2,...,x_n) \in G_{n+1}(T),$$

с начальными условиями (4.2.2).

ТЕОРЕМА 4.4.1. Пусть выполняются все условия теоремы 4.3.1.

Тогда существует такое $T^* > 0$, что задача (4.4.1), (4.2.2) имеет единственное решение в $\overline{C}_b^{(2)}(G_2(T^*))$.

Доказательство.

Воспользуемся обозначениями, приведенными в 4.2, 4.3 и следующими обозначениями:

$$\gamma_{ij}(t,x_1,x_2,...,x_n,u) = b(t,x_1,x_2,...,x_n,u) + (-1)^{i+1} g_j(t,x_1,x_2,...,x_n,u), \quad i,j = 1,2,$$
$$\chi_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u) = D[(-1)^{i+1} a(t,x_1,x_2,...,x_n)]\gamma_{ii}(t,x_1,x_2,...,x_n,u), \quad i = 1,2,$$
$$\lambda_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u) = \frac{\partial \gamma_{ii}(t,x_1,x_2,...,x_n,u)}{\partial u}, \quad i = 1,2.$$

Задача (4.4.1)-(4.2.2) эквивалентна системе интегральных уравнений (4.2.4) и

$$\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n) = \frac{1}{2}\phi_i(p_i(0,t,x_1,x_2,...,x_n)) + \frac{1}{2}\gamma_{ii}(t,x_1,x_2,...,x_n,u)u +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \gamma_{ji}(s,p_i\,,u(s,p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n))\vartheta_i(s,p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n)ds -$$
$$- \frac{1}{2}\int_0^t \chi_i(s,p_i,u(s,p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n))u(s,p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n)ds -$$
$$- \frac{1}{2}\int_0^t \lambda_i(s,p_i,u(s,p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n))u(s,p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n)\vartheta_j(s,p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n)ds +$$
$$+ \int_0^t F(s,p_i;u(s,p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n))ds$$

(4.4.2)

где

$\left[2\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n)-\gamma_{ii}(t,x_1,x_2,...,x_n,u)u\right]_{t=0}=\phi_i(x_1,x_2,...,x_n),$,

$p_i(s,t,x_1,x_2,...,x_n),\quad i=1{,}2$ -соответствующие решения интегральных уравнений (4.2.7).

Пусть $u(t,x_1,x_2,...,x_n),\ \vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n),\quad i=1{,}2-$ решение системы интегральных уравнений (4.2.4), (4.4.2).

Непосредственным дифференцированием из (4.2.4), (4.4.2) имеем равенство

$\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n)=D_n[(-1)^i a(t,x_1,x_2,...,x_n)]u(t,x_1,x_2,...,x_n)$

и следующее:

$$D[(-1)^{i+1}a(t,x_1,x_2,...,x_n)]\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n)=\frac{1}{2}\gamma_{ii}(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\vartheta_j(t,x_1,x_2,...,x_n)+$$

$$+\frac{1}{2}\gamma_{ji}(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n)+F(t,x_1,x_2,...,x_n;u),\quad i,j=1{,}2;\quad i\neq j.$$

Таким образом, мы доказали, система уравнений (4.4.2), (4.2.4) удовлетворяет уравнению (4.4.1). Система уравнений (4.4.2), (4.2.4) удовлетворяет и начальному условию (4.2.2).

Теперь покажем, что решение задачи (4.4.1)-(4.2.4) является решением системы интегральных уравнений (4.4.2), (4.2.4) , т.е. решение задачи (4.4.1)-(4.2.4) сводим к решению системы интегральных уравнений (4.4.2), (4.2.4). Для этого запишем уравнение (4.4.1) в виде

$$D[(-1)^{i+1}a(t,x_1,x_2,...,x_n)]\big(2\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n)-\gamma_{ii}(t,x_1,x_2,...,x_n,u))u\big)=$$

$$=\gamma_{ji}(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n)-\chi_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)u-$$

$$-\lambda_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)u(t,x_1,x_2,...,x_n)\vartheta_j(t,x_1,x_2,...,x_n)+2F(t,x_1,x_2,...,x_n;u),\tag{4.4.3}$$

$i,j=1{,}2,\quad i\neq j.$

Действительно из (4.4.3) имеем:

$$2D_n[(-1)^{i+1}a(t,x_1,x_2,...,x_n)]\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n)-\lambda_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\times$$

$$\times\vartheta_j(t,x_1,x_2,...,x_n)u(t,x_1,x_2,...,x_n)-\chi_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)u(t,x_1,x_2,...,x_n)-$$

$$-\gamma_{ii}(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\vartheta_j(t,x_1,x_2,...,x_n)=\gamma_{ji}(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n)-$$

$$-\chi_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)u(t,x_1,x_2,...,x_n)-\lambda_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\vartheta_j(t,x_1,x_2,...,x_n)\times$$

$$\times u(t,x_1,x_2,...,x_n)+2F(t,x_1,x_2,...,x_n;u),\quad i,j=1,2;\quad i\neq j.$$

Отсюда

$$2D_n[(-1)^{i+1}a(t,x_1,x_2,...,x_n)]\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n)-\gamma_{ii}(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\times$$

$$\times\vartheta_j(t,x_1,x_2,...,x_n)=\gamma_{ji}(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n)+$$

$$+2F(t,x_1,x_2,...,x_n;u),\quad i,j=1,2;\quad i\neq j. \tag{4.4.4}$$

Имеем:

$$2\left[\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t^2}-a^2(t,x_1,x_2,...,x_n)\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i\partial x_j}+\right.$$

$$\left.+(-1)^i\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i}D_n[(-1)^{i+1}a(t,x_1,x_2,...,x_n)]a(t,x_1,x_2,...,x_n)\right]=$$

$$=\left(b(t,x_1,x_2,...,x_n,u)-\frac{1}{a(t,x_1,x_2,...,x_n)}D_n[(-1)^{i+1}a(t,x_1,x_2,...,x_n)]a(t,x_1,x_2,...,x_n\right)\times$$

$$\times D_n[(-1)^{i+1}a(t,x_1,x_2,...,x_n)]u(t,x_1,x_2,...,x_n)+$$

$$+\left(b(t,x_1,x_2,...,x_n,u)+\frac{1}{a(t,x_1,x_2,...,x_n)}D_n[(-1)^{i+1}a(t,x_1,x_2,...,x_n)]a(t,x_1,x_2,...,x_n)\right)\times$$

$$\times D_n[(-1)^{i}a(t,x_1,x_2,...,x_n)]u(t,x_1,x_2,...,x_n)+2F(t,x_1,x_2,...,x_n,u),\quad i=1,2.$$

Таким образом, мы показали, что из (4.4.3) получается уравнение (4.4.1).

Решение задачи (4.4.3)-(4.2.2) методом дополнительного аргумента сводится к системе интегральных уравнений (4.4.2), (4.2.4).

Мы доказали, что задача (4.4.3)-(4.2.2) эквивалентна системе интегральных уравнений (4.4.2), (4.2.4).

Воспользуемся леммой 4.2.2.

Здесь компоненты оператора $A=(A_1,A_2,A_3)$ определяются равенствами: (4.2.14)

$$A_i\theta=\frac{1}{2}\phi_i(p_i(0,t,x_1,x_2,...,x_n))+\frac{1}{2}\gamma_{ii}(t,x_1,x_2,...,x_n,\theta_1)\theta_1+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t\gamma_{ji}(s,p_i,\theta_1(s,p_i))\theta_i(s,p_i)ds-\frac{1}{2}\int_0^t\chi_{i.}(s,p_i,\theta_1(s,p_i))\theta_1(s,p_i)ds- \tag{4.4.5}$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t\lambda_i(s,p_i,\theta_1(s,p_i))\theta_1(s,p_i)\theta_j(s,p_i)ds+\int_0^tF(s,p_i;\theta_1(s,p_i))ds,$$
$$i,j=1,2;\quad i\neq j.$$

Для системы (3.1.5), (3.3.5) оценки (3.1.16), (3.1.17) имеют вид:

$$\left|A_i\theta-\frac{1}{2}\phi_i\right|\le\frac{1}{2}(1+T)A_2K+\frac{KT}{2}(B_2+C_2K)+|F|T=\Omega_2(T),$$
$$\left|A_i\theta^1-A_i\theta^2\right|\le\Theta_2(T)\left\|\theta^1-\theta^2\right\|,\quad i=1,2,$$

Где

$$\left|\gamma_{ij}(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\right|\le A_2=const,\quad \left|\chi_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\right|\le B_2=const$$
$$\left|\lambda_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\right|\le C_2=const,\quad i=1,2,$$
$$\Theta_2(T)=\frac{1}{2}\left(A_2+L_2K\right)+\frac{T}{2}\left(L_2K+A_2+M_2K+B_2+K_2K^2+2C_2K+2L\right),$$
$$\left|\gamma_{ij}(t,x_1,x_2,...,x_n,u_1)-\alpha_{ij}(t,x_1,x_2,...,x_n,u_2)\right|\le L_2|u_1-u_2|,$$
$$L_2\ge0,\quad L_2-const,\quad i=1,2$$
$$\left|\chi_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u_1)-\chi_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\right|\le M_2|u_1-u_2|,$$
$$M_2\ge0,\quad M_2-const,\quad i=1,2$$
$$\left|\lambda_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u_1)-\lambda_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\right|\le K_2|u_1-u_2|,$$
$$K_2\ge0,\quad K_2const,\quad i=1,2.$$

Положительные корни уравнений $\Omega_2(T)=M$, $\Theta_2(T)=1$ обозначим через T_5,T_6.

Отсюда следует, что оператор A при $T < T^* = \min\{T_0, T_5, T_6\}$ осуществляет сжатое отображение шара $S(\theta_0, M)$ на себя. Следовательно, по принципу сжимающих отображений система уравнений (4.4.2), (4.2.4) имеет одно и только одно решение.

Теорема доказана.

ВЫВОДЫ

В диссертации методом дополнительного аргумента получены достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, при этом построены решения нелинейных интегро-дифференциальных

Начальная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа, где коэффициенты при частных производных первого порядка зависят от неизвестной функции, новым способом сведена к решению системы интегральных уравнений;

Полученные результаты обобщены для многомерного случая.

Результаты диссертации подтверждены строгими доказательствами.

В диссертации получены новые результаты, которые вносят определенный вклад в теорию нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Аширбаева А.Ж. Развитие метода дополнительного аргумента для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных: Автореф. дисс. … канд. физ.–матем. наук. 01.01.02. [Текст] / А.Ж. Аширбаева. – Бишкек, 1995. – 15 с.
2. Аширбаева А.Ж. Исследование решений интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ч.Б. Жолдошева // Вестник ОшГУ, Серия естественных и медицинских наук. – 2012. – № 2. – Вып. 1. – С. 150–153.
3. Аширбаева А.Ж. Исследование решений нелинейного интегро-дифферен-циального уравнения в частных производных четвертого порядка гиперболического типа [Текст] / А.Ж. Аширбаева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2012. – Вып.44. – С. 37–43.
4. Аширбаева А.Ж. Приведение дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа к интегральному уравнению [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Материаловедение. – Бишкек. - 2013. - № 2. – С. 258-261.
5. Аширбаева А.Ж. Решение нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева. – Бишкек: Илим, 2013. – 134 с.
6. Аширбаева А.Ж. Новый способ приведения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа к интегральному уравнению [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Вестник ОшГУ. – 2013. – № 1. – Спец. выпуск. – С. 87–90.
7. Аширбаева А.Ж. Приближенное решение начальной задачи для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2014. – Вып.46. – С. 37–40.
8. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных [Текст] / А.В. Бицадзе. – Москва: Наука, 1981. – 448 с.
9. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики [Текст] / А.В. Бицадзе, Д.Ф. Калиниченко. – Москва: Наука, 1985. –312 с.

10. Быков Я.В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / Я.В. Быков. – Фрунзе: КГУ, 1957. – 327 с.
11. Тихонов А.Н., Сборник задач по математической физике [Текст] / Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. – Москва: Наука, 1980. – 688 с.
12. Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики [Текст] / В.С. Владимиров, В.П. Михайлов, А.А. Вашарин, Х.К. Каримова, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин – Москва: Наука, 1982. –265 с.
13. Владимиров В.С. Уравнения математической физики [Текст] / В.С. Владимиров. – Москва: Наука, 1988. – 512 с.
14. Габов С.А. О свойстве разрушения уединенных волн, описываемых уравнениями Уизема [Текст] / С.А. Габов // Докл. АН СССР. - 1979. – Т. 246, № 6. – С. 1292-1295.
15. Габов С.А. Об уравнении Уизема [Текст] / С.А. Габов //Докл. АН СССР. – 1978. – Т. 242. – № 5. – С.993–996.
16. Джураев Т.Д. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка [Текст] / Т.Д.Джураев, А.С. Сопуев. – Ташкент: ФАН, 2000. –144 с.
17. Иманалиев М.И. О дифференциальном уравнении в частных производных первого порядка с интегральным коэффициентом [Текст] / М.И. Иманалиев, Ю.А. Ведь //Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 3. – С. 465–477.
18. Иманалиев М.И. Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными [Текст] / М.И. Иманалиев. – Бишкек: Илим, 1992. –112 с.
19. Иманалиев М.И. К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема [Текст] / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Доклады Российской АН. – 1992. –Т. 323. – № 3. – С. 410–414.
20. Иманалиев М.И. К теории систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема [Текст] / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Доклады АН. – 1992. – Т. 325. – № 6. – С.1111–1115.
21. Иманалиев М.И. К теории нелинейных уравнений с дифференциальным оператором типа полной производной по времени [Текст] / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Доклады Российской АН. – 1993. –Т. 329. – № 5. – С. 543–546.
22. Иманалиев М.И. К теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных типа Кортевега - де Фриза [Текст] / М.И.

Иманалиев, П.С. Панков, Т.М. Иманалиев // Доклады Российской АН. – 1995. – Т. 342. – № 1. – С.17–19.
23. Иманалиев М.И. Метод дополнительного аргумента в теории нелинейных волновых уравнений в частных производных [Текст] / М.И. Иманалиев, П.С. Панков, Т.М. Иманалиев // Доклады Российской АН. – 1995. – Т. 343. – № 5. – С. 596–598.
24. Иманалиев М.И. К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [Текст] / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Доклады Российской АН. – 2001. –Т. 379. – № 1. – С.16–21.
25. Иманалиев М.И. К теории почти солитонных решений нелинейного дифференциального уравнения в частных производных типа Кортевега-де Фриза четвертого порядка [Текст] / М.И. Иманалиев, Т.М. Иманалиев, У.М. Иманалиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2003. – Вып. 32. – С.17–23.
26. Иманалиев М.И. К теории почти солитонных решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка [Текст] / М.И. Иманалиев, Т.М. Иманалиев, У.М. Иманалиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2004. – Вып. 33. – С.17-23.
27. Иманалиев М.И. О задачах Коши для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными шестого порядка [Текст] / М.И. Иманалиев, Т.М. Иманалиев, К.Какишов // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2007. – Вып. 36. – С.19–28.
28. Иманалиев Т.М. Интегро-дифференциальные уравнения с частными производными типа Вольтера первого порядка [Текст] / Т.М. Иманалиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 1991. – Вып. 23. – С.34–38.
29. Иманалиев Т.М. Об одном эффекте в теории интегро-дифференциальных уравнений в частных производных [Текст] / Т.М. Иманалиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 1991. – Вып. 23. – С. 38–41.
30. Иманалиев Т.М. Нарушение единственности решений задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных [Текст] / Т.М. Иманалиев // Асимптотические методы теории сингулярно возмущенных уравнений и некорректно

поставленных задач: тез. докл. всесоюз. конф. - Бишкек: Илим, 1991. – С. 51.
31. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка [Текст] / Э. Камке. – Москва: Наука, 1966. – 260 с.
32. Колоджеро Ф. Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений [Текст] / Ф. Колоджеро, А. Дегаперис. – Москва: Мир, 1985. – 469 с.
33. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] /А.Н.Колмогоров, С.И. Фомин. – Москва: Наука, 1968. – 496 с.
34. Кошляков Н.С. Уравнения в частных производных математической физики [Текст] / Н.С.Кошляков, Э.Б.Глинер, М.М.Смирнов. – Москва: Высшая школа, 1970. – 712 с.
35. Краснов М.Л. Интегральные уравнения [Текст] / М.Л. Краснов. – Москва: Наука, 1975. – 303 с.
36. Курант Р. Уравнения с частными производными [Текст] / Р. Курант. – Москва: Мир, 1964. - 830 с.
37. Курант Р. Методы математической физики [Текст] / Р. Курант, Д. Гильберт. – Ленинград: ГИТТЛ, 1951. – Т. 2. – 544 с.
38. Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения [Текст] / О.А. Ладыженская. – Москва: Гостехиздат, 1953. – 280 с.
39. Мамазиаева Э.А. Построение решений нелинейных интегро – дифференциальных уравнений второго порядка с частной производной под знаком интеграла [Текст] / Э.А. Мамазияева – Бишкек: Илим, 2014. 44-48 с.
40. Мамазиаева Э.А. Исследование решений нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными [Текст] / Э.А. Мамазияева – Бишкек: Илим, 2014. 137-141 с.
41. Мамазиаева Э.А. Сведение нелинейной задачи электрических колебаний в проводах к системам интегральных уравнений методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Известия ОшТУ. – 2015. – № 1. С. 87–90.
42. Мамазиаева Э.А. Исследование решений операторно-дифференциального уравнения гиперболического типа [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Вестник ОшГУ. – 2014. – № 3. С. 27–32.

43. Мамазиаева Э.А. Решение нелинейного операторно-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Вестник КРСУ. 2015. –Т.15 –№5. – С. 61–64.
44. Мамазиаева Э.А. Решение нелинейного операторно-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Наука и новые технологии. 2015. –№2. – С. 8–11.
45. Мамазиаева Э.А. Решение нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Сибак 2016
46. Мамазиаева Э.А. Применение метода дополнительного аргумента для нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными [Текст] / Э.А. Мамазияева // Проблемы современной науки и образования. 2016. –№8(50)
47. Мамазиаева Э.А. Решение нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Проблемы современной науки и образования. 2016.
48. Mamaziaeva E. Investigation of solutions of partial operator- differential equations of second order by the method of additional argument. [Текст]/ Ashirbaeva A., Mamaziaeva E. // The V Conqress of Turkic world mathematicians, Bulan-Soqottu, Kyrqyzstan. 2014.–Pp. –166
49. Mamaziaeva E. Solving of non-linear partial differential equations of second order with many variables by means of the method of additional argument [Текст]/ Mamaziaeva E. , Ashirbaeva A// Issyk-Kul International Mathematical Forum, Bosteri, Kyrqyzstan. 2015.–Pp. –50
50. Mamaziaeva E. Formation of the solutions of non-linear inteqro-differential equations of second order with differentiation under the inteqral siqn. [Текст]/ Mamaziaeva E. // Issyk-Kul International Mathematical Forum, Bosteri, Kyrqyzstan. 2015.–Pp. –51
51.
52. Панков П.С. Приближенное решение начальной задачи для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных методом дополни-тельного аргумента [Текст] / П.С.Панков, Т.М.Иманалиев, Г.М. Кененбаева // Юбилейная науч. конф.,

посвященная 50-летию развития мате-матики в Академии наук Казахстана: Тез. докл. – Алматы, 1995. – С. 164.

53. Панков П.С. Численное решение задачи о движении волн Римана на основе метода дополнительного аргумента [Текст] / П.С.Панков, О.Д. Будникова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2003. – Вып. 32. – С.35–38.
54. Смирнов М.М. Курс высшей математики. Т.4. Ч. 1 [Текст] / М.М. Смирнов – Москва: Наука, 1974. – 336 с.
55. Смирнов М.М. Курс высшей математики. Т.4. Ч. 2 [Текст] / М.М. Смирнов. – Москва: Наука, 1981. – 552 с.
56. Соболев С.Л. Уравнения математической физики [Текст] / С.Л. Соболев. – Москва: Наука, 1966. – 443 с.
57. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – Москва: Наука, 1977. – 736 с.
58. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных [Текст] / Ф. Трикоми. – Москва: ИЛ, 1957. – 444 с.
59. Уизем Дж.Б. Линейные и нелинейные волны [Текст] / Дж.Б. Уизем. – Москва: Мир, 1977. – 622 с.
60. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров [Текст] / С. Фарлоу. – Москва: Мир, 1985. – 384 с.