**НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**

**КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Ж.БАЛАСАГЫНА**

Диссертационный совет Д 01.15.513

На правах рукописи
УДК 517. 9

МАМАЗИАЕВА ЭЛЬМИРА АМАНОВНА

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Бишкек - 2016

Работа выполнена на кафедре прикладной математики Ошского технологического университета им. академика М. М. Адышева

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент **Аширбаева А.Ж.**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор

кандидат физико-математических наук, доцент

Ведущая организация:

.

Защита диссертации состоится «   »   2016 г. в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.12.001 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико–математических наук при Институте теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики и Кыргызском Национальном университете им. Ж. Баласагына по адресу: Кыргызстан, 720054, г. Бишкек, ул. Абдымомунова 328, лабораторный корпус № 6 КНУ, аудитория 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН КР, Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а.

Автореферат разослан “   ”   2016 г.

Ученый секретарь диссертационного совета, д.ф.-м.н., проф.   Искандаров С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящее время развивается метод изучения дифференциальных уравнений и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных под названием метод дополнительного аргумента.

Основы метода дополнительного аргумента созданы в монографии М. И. Иманалиева. Аксиоматические основы метода были выявлены Т.М.Иманалиевым.

С помощью этого метода начальные задачи для различных типов дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений могут быть сведены к удобным для исследования системам интегральных уравнений.

В работах М.И. Иманалиева, П.С. Панкова, Т.М. Иманалиева, С.Н.Алексеенко методом дополнительного аргумента были исследованы смешанные задачи для уравнений с дифференциальным оператором типа полной производной по времени. В этих исследованиях появились преимущества метода дополнительного аргумента перед другими методами исследования подобных уравнений, заключающиеся в том, что система интегральных уравнений, к которой приводится исходная задача, не содержит суперпозиции неизвестных функций. Кроме того, решение исходной задачи получается из решения интегральных уравнений при помощи понижения размерности множества аргументов, а не при помощи обращения нелинейного алгебраического оператора. С использованием основных идей метода дополнительного аргумента были исследованы дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных типа Кортевега-де-Фриза, а также нелинейные волновые уравнения.

П.С. Панковым, Т.М. Иманалиевым, Г.М. Кененбаевой осуществлено применение метода дополнительного аргумента для приближенных решений уравнений и показаны преимущества этого метода перед известными методами характеристик и сеток.

А.Ж. Аширбаевой развит метод дополнительного аргумента и предложена методика использования операторов в функциональных пространствах со связанными переменными для исследования нелинейных дифференциальных уравнений высших и сколь угодно высоких порядков.

Вместе с тем, имеются такие специфические классы дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, которые представляют теоретический интерес. Развитие метода дополнительного аргумента применительно к таким классам функций определяют актуальность настоящей работы.

Цель исследования. Целью данной работы является исследование решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с учетом специфики второго порядка методом дополнительного аргумента.

Методика исследования. С помощью метода дополнительного аргумента начальные задачи для нелинейных операторно-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка сводятся к системам интегральных уравнений. Доказательство существования решений таких систем с помощью принципа сжимающих отображений обеспечивает существование решений исходных задач. Развитие методики использования операторов в функциональных пространствах со связанными переменными, а также методики введения дополнительных неизвестных функций дает возможность получать общие результаты, из которых следуют конкретные результаты для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений.

Научная новизна работы. Получены следующие результаты:

- получены достаточные условия существования и единственности локальных решений начальных задач для нелинейных операторно-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с вольтерровскими операторами как в пространствах ограниченных функций, так и в пространствах неограниченных функций;

- обнаружено явление линейности пространства решений нелинейной задачи;

- построено решение нелинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка с частной производной под знаком интеграла;

- получены достаточные условия существования и единственности локальных решений начальных задач для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, где коэффициенты при частных производных первого порядка зависят от неизвестной функции;

- полученные результаты обобщены для многомерного случая.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты данной работы развивают теорию дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных и подтверждены строгими доказательствами. По полученным результатам работы построены решения конкретных задач.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Доказательство теоремы существования и единственности локальных решений начальных задач для квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, в том числе с производной под знаком интеграла, методом дополнительного аргумента;
2. Приведение нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка, где коэффициенты при частных производных первого порядка зависят от неизвестной функции, к системе интегральных уравнений;
3. Развитие метода дополнительного аргумента для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка со многими пространственными переменными.

Апробация работы. Результаты исследований докладывались: на международной научной конференции «Рахматулинские-Ормонбековские чтения» (Бишкек, июнь 2013), на V конгрессе математиков Тюркского мира (с. Булан-Соготту, июнь 2014; опубликованы тезисы [10]), на Иссык-Кульском международном математическом форуме (с. Бозтери, июнь 2015; опубликованы тезисы [11-12]), на научной конференции, посвященной 75-летию ОшГУ (г.Ош, октябрь 2014), на семинарах кафедры «Прикладная математика» Ошского технологического университета (2010-2016).

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в статьях [1-9]. В [3-7,9] соавтору принадлежит постановка задачи, соискателю – получение конкретных результатов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, списка использованных источников, выводов, приложения – текста программы и результатов расчетов - всего 90 страниц.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н., доценту Аширбаевой Айжаркын Жоробековне за постановку проблемы исследования и постоянное внимание к работе.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Обозначения: $\boldsymbol{R}$ – множество вещественных чисел;

Верхний (декартово произведение) или нижний индекс указывает размерность пространства.

$\boldsymbol{R}^n$ $(n \in \boldsymbol{N})$ – n-мерное вещественное евклидово пространство и его точки $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $\boldsymbol{R}_+ =[0,\infty)$; $\boldsymbol{R}_{++} =(0,\infty)$;

$T \in \boldsymbol{R}_{++}$ - некоторое фиксированное число;

$G_2(T)=[0,T]\times\boldsymbol{R}$; $G_{n+1}(T)=[0,T]\times\boldsymbol{R}^n$;

$H_2(T)=\{(\tau,t):0\leq\tau\leq t<T\}$;

$Q_3(T)= H_2(T)\times R$; $Q_{2+n}(T)= H_2(T)\times\boldsymbol{R}$.

Соответствующие пространства с $T=\infty$ (с $t\in\boldsymbol{R}_+$) записываются без буквы T.
Ω - область евклидова пространства $\boldsymbol{R}^m$;
$C(\Omega)$, $C^{(k)}(\Omega)$ - пространства функций, определенных и непрерывных (соответственно вместе со всеми своими производными до порядка k) на Ω;
$C_b(\Omega)$, $C_b^{(k)}(\Omega)$ - пространства функций с дополнительным условием ограниченности (соответственно и для указанных производных);
$\|\cdot\|_\Omega$ - норма в пространстве $C(\Omega)$, если область Ω ограничена, и $C_b(\Omega)$, если область Ω не ограничена.

Дифференциальные операторы:

$$D[\omega]=\frac{\partial}{\partial t}+\omega\frac{\partial}{\partial x},\ D_n[\omega]=\frac{\partial}{\partial t}+\omega\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k},$$

Операторы, преобразующие функции в функции, записываются сначала в полном виде: функция каких переменных получается; (после знака ;): на какую функцию (или несколько функций) и каких переменных действует оператор; связанные переменные в этой функции (по аналогии с записью интегралов), через двоеточие. В дальнейшем, если запись повторяется без изменений, операторы записываются и в кратком виде.

Дифференциальные операторы:

$$D[\omega]=\frac{\partial}{\partial t}+\omega\frac{\partial}{\partial x},\ D_n[\omega]=\frac{\partial}{\partial t}+\omega\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Оператор $J(t,x,u(s,x):s)$, $t\geq 0$, фактически зависящий только от значений $u(s,x)$ при $0\leq s\leq t$, называется «вольтерровского типа»; если существует такое $T^*>0$, что уравнение вида $J(t,x,u(s,x):s)=0$, имеет решение при $0\leq t\leq T^*$, то такое решение называется локальным. Рассматривается следующий класс вольтерровских операторов $F(t;u(t,\xi):\xi)$, преобразующих ограниченные непрерывные функции двух переменных из $C_b(G_2(T))$ в непрерывную функцию одной переменной из $C([0,T])$:

F1) оператор F – непрерывный по первой переменной;

F2) существует такое $L>0$, что для любого $T^*\leq T$

$$\| F(t;u_1(s,\xi):s,\xi)-F(t;u_2(s,\xi):s,\xi)\|_{[0,T^*]}\leq L\,\| u_1(t,x)-u_2(t,x)\|_{G_2(T^*)}\,.$$

Для единообразия фиксируются значения букв: $u(t,x)$ – неизвестная функция; $v(\tau,t,x)$ – неизвестная функция с одной добавленной переменной; по умолчанию предполагается, что $u(t,x)=v(t,t,x)$;

$\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные начальные функции;

$$p(\tau,t,x;v(\rho,t,x):\rho)=x-\int_\tau^t v(\rho,t,x)d\rho$$ - вспомогательный оператор.

Краткое изложение содержания диссертации

В первой главе приводится аксиоматика, основные леммы и обзор известных результатов по методу дополнительного аргумента, а также формулируются вспомогательные результаты, используемые в работе, в том числе: следствие из принципа сжимающих отображений Банаха.

Лемма 1.5.1. Если оператор A в банаховом пространстве удовлетворяет условиям 1) $||A(0)||\le c = const$; 2) $||Ax-Ay|| \le ½\, ||x-y||$ в шаре $||x||\le 2c$, то он имеет в этом шаре одну неподвижную точку.

Лемма 1.5.4. Сумма вещественнозначных функций, удовлетворяющих условию Липшица, и произведение ограниченных вещественнозначных функций, удовлетворяющих условию Липшица, также удовлетворяют условию Липшица.

Данная лемма дает возможность доказывать существование локальных решений нелинейных вольтерровских интегральных уравнений без проведения громоздких оценок в каждом конкретном случае.

Во второй главе исследуются квазилинейные интегро-дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка

В разделе 2.1 рассмотрено уравнение вида:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = u(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\left[u(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right] - \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + F(t;u(s,\xi):s,\xi), \qquad (2.1.1)$$

$(t,x)\in G_2(T),$

с начальными условиями

$$u(0,x) = \varphi(x) \equiv \varphi_0(x), \qquad (2.1.2)$$

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x). \qquad (2.1.3)$$

Введем оператор

$$A(t,x;v(s,w,\xi):s,w,\xi) = \varphi(p(0,t,x;v(s,t,x):s)) + \int_0^t (t-\rho)F(\rho;v(\rho,\rho,\xi):\xi)d\rho.$$

ТЕОРЕМА 2.1.1. Если 1) выполняются условия F1) и F2) для вольтерровского оператора $F;$

2) заданные функции $\varphi_0(x)\in C_b^{(1)}(R), \varphi_1(x)\in C_b^{(1)}(R)$ и удовлетворяют условию $\varphi_1(x)+\varphi_0(x)\varphi_0'(x)=0,$

то задача (2.1.1)-(2.1.2)-(2.1.3) имеет локальное решение $u(t,x) \in C_b^{(1)}(G_2(T^*)),$ которое получается из решения интегрального уравнения

$\nu(\tau,t,x) = J(\tau,t;v(s,w,x):s,w)),$

где $J(\tau,t;v(s,w,x):s,w)) = A(\tau,p(\tau,t,x;\nu(s,t,x):s);v(s,w,x):s,w),$ $(s,t,x)\in Q_3(T)$

.

$$A(t,x;v(s,w,x):s,w)=\varphi(p(0,t,x;v(s,t,x):s))+\int_0^t (t-\rho)F(\rho;v(\rho,\rho,\xi):\xi)d\rho.$$

В разделе 2.2 рассмотрены неограниченные начальные условия

$$u(0,x)=x, \tag{2.2.1}$$

$$\partial u(0,x)/\partial t|_{t=0}=-x. \tag{2.2.2}$$

Для частного случая уравнения (2.1.1)

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}=u(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\left[u(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right]-\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+f(t), \tag{2.2.3}$$

с условиями (2.2.1)-(2.2.2) методом дополнительного аргумента получается интегральное уравнение

$$u(t,x)=p(0,t,x;v)+\int_0^t (t-\rho)f(\rho)d\rho,(\tau,t,x)\in Q_3(T). \tag{2.2.5}$$

Отсюда решение поставленной задачи имеет вид:

$$u(t,x)=\frac{x}{1+t}-\frac{1}{1+t}\int_0^t\int_0^s (s-\nu)f(\nu)d\nu ds+\int_0^t (t-\nu)f(\nu)d\nu. \tag{2.2.6}$$

Обозначим линейный оператор

$$W(t;f(\nu):\nu)=-\frac{1}{1+t}\int_0^t\int_0^s (s-\nu)f(\nu)d\nu ds+\int_0^t (t-\nu)f(\nu)d\nu, \tag{2.2.7}$$

тогда получаем:

$$u(t,x)=\frac{x}{1+t}+W(t;f(\nu):\nu). \tag{2.2.8}$$

Итак, имеет место явление линейности пространства решений нелинейной задачи (2.2.4)-(2.2.1)-(2.2.2).

ТЕОРЕМА 2.2.1. Если 1) Значение оператора $F(t;\frac{\xi}{1+t}:\xi)$ определено для всех $t\in[0,T]$ (функция $\frac{x}{1+t}$ входит в область определения оператора F); 2) выполняются условия 1) и 2) Теоремы 2.1.1,
то задача (2.1.1)-(2.2.1) -(2.2.2) имеет локальное решение
$u(t,x)\in C^{(1)}(G_2(T^*))$.

Построен приближенный метод для частного случая уравнения (2.1.1)

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}=u(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\left[u(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right]-\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+ \tag{2.2.10}$$

$$+\int_0^X K(t)u(t,\xi)d\xi,$$

с условиями (2.2.1)-(2.2.2).

В разделе 2.3 рассматривается уравнение с производной под знаком интеграла вида:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = u(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\left[u(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right] - \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} +$$

$$+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} K(t,s,\xi)\frac{\partial u(s,\xi)}{\partial \xi}d\xi ds + g(t), \quad (t,x)\in G_2 \;. \qquad (2.3.1)$$

Доказана

ТЕОРЕМА 2.3.1. Пусть $\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|K(t,s,\xi)\right|d\xi ds \le \gamma = const.$

Тогда задача (2.3.1)-(2.2.1)-(2.2.2) имеет единственное решение в пространстве $C_b^{(2)}(G_2)$ в виде

$$u(t,x) = x - [1+t]^{-1}\{xt + \int_0^t\int_0^\eta (\eta-\rho)[\int_0^\rho\int_{-\infty}^{\infty} K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s}d\xi ds + g(\rho)]d\rho d\eta\} +$$

$$+\int_0^t (t-\rho)[\int_0^\rho\int_{-\infty}^{\infty} K(\rho,s,\xi)\frac{1}{1+s}d\xi\, ds + g(\rho)\Big]d\rho. \qquad (2.3.2)$$

В Главе 3 исследуются интегро-дифференциальные уравнения гиперболического типа дополнительно методом введения дополнительных неизвестных функций.

В разделе 3.1 рассмотрено применение метода дополнительного аргумента для уравнения вида:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2(t,x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + c(t,x,u(t,x))\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + F(t;u), \qquad (3.1.1)$$

$$(t,x)\in G_2(T),$$

с начальными условиями (2.1.2)-(2.1.3).

Вводятся следующие обозначения:

$$\vartheta_i(t,x) = D[(-1)^i a(t,x)]u, \qquad (3.1.3)$$

$$g_i(t,x,u) = \frac{1}{a(t,x)}[c(t,x,u) + (-1)^i(a_t(t,x) + (-1)^{i+1}a(t,x)a_x(t,x)], \quad i=1,2, \quad (3.1.4)$$

$$f_i(t,x,u) = (-1)^{i+1}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]g_i(t,x,u), \quad i=1,2,$$

$$r_i(t,x,u) = (-1)^{i+1}\frac{\partial g_i(t,x,u)}{\partial u}, \quad i=1,2.$$

Теорема 3.1.1. Пусть 1) выполняются условия F1) и F2) для вольтерровского оператора F

2) $a(t,x)\in C_b^{(2)}(G_2(T)), a(t,x)>0, \quad c(t,x,u)\in C_b^{(2)}(G_2(T)\times R)$ и вместе со своими производными удовлетворяют условию Липшица по переменной u.

Тогда задача (3.1.1)-(2.1.2)-(2.1.3) имеет локальное решение.

Для доказательства вводятся следующие обозначения *(i=1,2)*: функции:

$$g_i(t,x,w)=\frac{1}{a(t,x)}[c(t,x,w)+(-1)^i(a_t(t,x)+(-1)^{i+1}a(t,x)a_x(t,x)],\tag{3.1.2}$$

$$r_i(t,x,w)=(-1)^{i+1}\frac{\partial g_i(t,x,w)}{\partial w};\tag{3.1.3}$$

$p_i(s,t,x)$ – соответственно решения интегральных уравнений

$$p_i(s,t,x)=x+(-1)^i\int\limits_s^t a(\tau,p_i(\tau,t,x))d\tau\,,\quad 0\le s\le t\le T;\tag{3.1.4}$$

операторы

$$f_i(t,x;W(s,\xi):s,\xi)=(-1)^{i+1}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]g_i(t,x,W(t,x)).$$

Лемма 3.1.1. Задача (3.1.1)-(2.1.2)-(2.1.3) эквивалентна системе

$$u(t,x)=\varphi_0(p_1(0,t,x))+\int\limits_0^t \vartheta_1(s,p_1(s,t,x))ds;\tag{3.1.5}$$

$$\begin{gathered}\vartheta_i(t,x)=\frac{1}{2}\psi_i(p_i(0,t,x))+(-1)^{i+1}\frac{1}{2}g_i(t,x,u(t,x))u(t,x)+\\ +(-1)^i\frac{1}{2}\int\limits_0^t g_i(s,p_i(s,t,x),u(s,p_i(s,t,x)))\vartheta_i(s,p_i(s,t,x))ds-\\ -\frac{1}{2}\int\limits_0^t f_{i.}(s,p_i(s,t,x),u(s,p_i(s,t,x)))u(s,p_i(s,t,x))ds-\\ -\frac{1}{2}\int\limits_0^t r_i(s,p_i,u(s,p_i(s,t,x)))u(s,p_i(s,t,x))\vartheta_{3-i}(s,p_i(s,t,x))ds+\\ +\int\limits_0^t F(s;u(s,p_i(s,t,x)))ds,\quad i=1,2,\end{gathered}\tag{3.1.6}$$

где $\psi_{12}(x)=\varphi_1(x)\pm a(0,x)\varphi_0'(x)$.

Аналогичные построения используются и для доказательства последующих результатов.

В разделе 3.2 рассмотрено уравнение с производной по временнóй переменной

$$\frac{\partial^2u(t,x)}{\partial t^2}=a^2(t,x)\frac{\partial^2u(t,x)}{\partial x^2}+b(t,x,u(t,x))\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+F(t;u),\tag{3.2.1}$$

$(t,x)\in G_2(T)$,

с начальными условиями (2.1.2)-(2.1.3).

Теорема 3.2.1. Пусть 1) выполняются условия Теоремы 3.1.1;
2) $b(t,x,w)\in C_b^{(2)}(G_2(T)\times R)$ и вместе со своими производными удовлетворяет условию Липшица по переменной w.

Тогда задача (3.2.1)-(2.1.2)-(2.1.3) имеет локальное решение.

В 3.3 исследовано более общего вида операторно-дифференциальное уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}=a^2(t,x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+b(t,x,u(t,x))\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+c(t,x,u(t,x))\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}+F(t;u), \quad (3.3.1)$$

$(t,x)\in G_2(T)$.

Теорема 3.3.1. Пусть выполняются все условия теоремы 3.2.1.

Тогда задача (3.3.1)-(2.1.2)-(2.1.3) имеет локальное решение.

Как следствие из предложенной методики, для решения уравнения колебаний струны: $\frac{\partial^2 u(t.x)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$ с начальными условиями (2.1.2)-(2.1.3) выведена формула Даламбера: $u(t,x)=\frac{1}{2}\big(\varphi_0(a-xt)+\varphi_0(x+at)\big)+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\varphi_1(\tau)d\tau.$

В четвертой главе показано, что полученные в третьей главе достаточные условия существования решений начальной задачи для интегро-дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с коэффициентами при частных производных первого порядка по пространственной и временно́й переменным, зависящих от неизвестной функции, могут быть обобщены на случай нескольких пространственных переменных.

В разделе 4.1 рассматривается уравнение вида:

$$\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t^2}=u(t,x_1,x_2,...,x_n)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[u(t,x_1,x_2,...,x_n)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x}\right]+$$

$$+\frac{\partial u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i}+F(t;u(t,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):\xi_1,\xi_2,...,\xi_n), \quad (4.1.1)$$

$(t,x_1,x_2,...,x_n)\in G_{n+1}(T)$.

с начальными условиями

$$\frac{\partial^k u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t^k}\Big|_{t=0}=\varphi_k(x_1,x_2,...,x_n), k=0,1, \quad (x_1,x_2,...,x_n)\in R^n. \quad (4.1.2)$$

ТЕОРЕМА 4.1.1. Если 1) оператор F – непрерывный по первой переменной; 2) он является вольтерровым и удовлетворяет условию Липшица: существует такое $L>0$, что для любого $T_* \le T$

$$\| F(t;u_1(t,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):\xi_1,\xi_2,...,\xi_n) - F(t;u_2(t,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n):\xi_1,\xi_2,...,\xi_n) \|_{[0,T_*]} \le$$
$$\le L \| u_1(t,x_1,x_2,...,x_n) - u_2(t,x_1,x_2,...,x_n) \|_{G_{n+1}(T_*)},$$

3) $\varphi_0(x_1,x_2,...,x_n) \in C_b^{(1)}(R^n), \varphi_1(x_1,x_2,...,x_n) \in C_b(R^n)$

и 4) удовлетворяют условию

$$\varphi_1(x_1,x_2,...,x_n) - \varphi_0(x_1,x_2,...,x_n)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_0(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i} = 0. \quad (4.1.3)$$

Тогда задача (4.1.1)-(4.1.2) имеет локальное решение.

В разделе 4.2 рассматривается уравнение вида:

$$\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t^2} = a^2(t,x_1,x_2,...,x_n)\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i \partial x_j} +$$
$$+ c(t,x_1,x_2,...,x_n,u)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i} + F(t;u), \quad (4.2.1)$$
$$a(t,x_1,x_2,...,x_n) > 0, (t,x_1,x_2,...,x_n) \in G_{n+1}(T),$$

Вводятся обозначения

$$\vartheta_i(t,x_1,x_2,...,x_n) = D_n[(-1)^i a(t,x_1,x_2,...,x_n)]u(t,x_1,x_2,...,x_n),$$
$$g_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u) = \frac{1}{a(t,x_1,x_2,...,x_n)}[c(t,x_1,x_2,...,x_n,u) +$$
$$+ (-1)^i D_n[(-1)^{i+1} a(t,x_1,x_2,...,x_n)]a(t,x_1,x_2,...,x_n)], \quad i = 1,2,$$
$$f_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u) = (-1)^{i+1} D_n[(-1)^{i+1} a(t,x_1,x_2,...,x_n)]g_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u), \quad i = 1,2,$$
$$r_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u) = (-1)^{i+1}\frac{\partial g_i(t,x_1,x_2,...,x_n,u)}{\partial u}, \quad i = 1,2,$$

Доказана следующая

Теорема 4.2.1. Пусть 1) выполняются условия Теоремы 4.1.1; 2) $c(t,x_1,x_2,...,x_n,u) \in C_b^{(2)}(G_{n+1}(T) \times R)$ и вместе со своими производными удовлетворяют условию Липшица по u.

Тогда задача (4.2.1)-(4.1.2) имеет локальное решение.

В разделе 4.3 рассмотрено уравнение

$$\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t^2} = a^2(t,x_1,x_2,...,x_n)\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i \partial x_j} +$$
$$+ b(t,x_1,x_2,...,x_n,u(t,x_1,x_2,...,x_n))\frac{\partial u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t} + F(t;u), \quad (4.3.1)$$

$(t,x_1,x_2,...,x_n)\in G_{n+1}(T)$.

ТЕОРЕМА 4.3.1. Пусть 1) выполняются все условия теоремы 4.2.1, 2) $b(t,x_1, x_2,..., x_n,u)\in C_b^{(2)}(G_{n+1}(T)\times R)$ и вместе со своими производными удовлетворяют условию Липшица.

Тогда задача (4.3.1)-(4.1.2) имеет локальное решение.

В 4.4 рассмотрено уравнение, объединяющее (4.2.1) и (4.3.1):

$$\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t^2}=a^2(t,x_1,x_2,...,x_n)\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x^2}+$$

$$+b(t,x_1,x_2,...,x_n,u(x_1,x_2,...,x_n))\frac{\partial u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial t}+$$

$$+c(t,x_1,x_2,...,x_n,u(x_1,x_2,...,x_n))\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i\partial x_j}+F(t;u), \qquad (4.4.1)$$

$(t,x_1,x_2,...,x_n)\in G_{n+1}(T)$.

Доказана

ТЕОРЕМА 4.4.1. Пусть выполняются все условия теоремы 4.3.1.

Тогда задача (4.4.1)-(4.1.2) имеет локальное решение.

ВЫВОДЫ

В диссертации методом дополнительного аргумента получены достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, при этом построены решения нелинейных интегро-дифференциальных

Начальная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа, где коэффициенты при частных производных первого порядка зависят от неизвестной функции, новым способом сведена к решению системы интегральных уравнений;

Полученные результаты обобщены для многомерного случая.

Результаты диссертации подтверждены строгими доказательствами.

В диссертации получены новые результаты, которые вносят определенный вклад в теорию нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Основные содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1. Мамазиаева Э.А. Построение решений нелинейных интегро–дифференциальных уравнений второго порядка с частной производной под знаком интеграла [Текст] / Э.А. Мамазияева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2014. - Вып.47. - С.44-48.
2. Мамазиаева Э.А. Исследование решений нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными [Текст] / Э.А. Мамазияева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2014. - Вып.47. - С. 137-141.
3. Мамазиаева Э.А. Сведение нелинейной задачи электрических колебаний в проводах к системам интегральных уравнений методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Известия ОшТУ. – Ош, 2015. – № 1. - С. 87–90.
4. Мамазиаева Э.А. Исследование решений операторно-дифференциального уравнения гиперболического типа [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Вестник ОшГУ. – Ош, 2014. – № 3. - С. 27–32.
5. Мамазиаева Э.А. Решение нелинейного операторно-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Вестник КРСУ. 2015. –Т.15. – № 5. – С. 61–64.
6. Мамазиаева Э.А. Решение нелинейного операторно-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазиаева // Наука и новые технологии. 2015. – № 2. – С. 8–11.
7. Мамазиаева Э.А. Решение нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазиаева // Естественные и математические науки в современном мире. 2016. - № 42. - С.111-124.
8. Мамазиаева Э.А. Применение метода дополнительного аргумента для нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными [Текст] / Э.А. Мамазиаева // Проблемы современной науки и образования. 2016. – № 8 (50). - С.10-15.
9. Мамазиаева Э.А. Решение нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными

методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазиаева // Проблемы современной науки и образования. 2016. - № 14 (56). - С.10-16.
10. Mamaziaeva E. Investigation of solutions of partial operator-differential equations of second order by the method of additional argument [Текст]/ A.Ashirbaeva, E.Mamaziaeva // Abstracts of the V Congress of Turkic world mathematicians, Bulan-Sogottu, Kyrgyzstan, 2014 /Ed. by Academician A.Borubaev. – P. 166.
11. Mamaziaeva E. Solving of non-linear partial differential equations of second order with many variables by means of the method of additional argument [Текст]/ Mamaziaeva E., Ashirbaeva A. // Abstracts of Issyk-Kul International Mathematical Forum, Bosteri, Kyrgyzstan. 2015 /Ed. by Academician A.Borubaev. – P. 50.
12. Mamaziaeva E. Formation of the solutions of non-linear integro- differential equations of second order with differentiation under the integral sign. [Текст]/ Mamaziaeva E. // Abstracts of Issyk-Kul International Mathematical Forum, Bosteri, Kyrgyzstan. 2015 /Ed. by Academician A.Borubaev. – P. 51.

РЕЗЮМЕ

Мамазиаева Элмира Амановна

«Экинчи тартиптеги жеке туундулуу, сызыктуу эмес интегро-дифференциалдык теңдемелерди кошумча аргумент кийирүү усулу менен чыгарылыштарын изилдөө» - деген темадагы 01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу деген адистик боюнча физика-математикалык илимдердин кандидаты окумуштуулук даражасын алуу үчүн диссертация сунушталган

Урунттуу сөздөр: жеке туундулуу дифференциалдык теңдеме, сызыктуу эмес теңдеме, интегро-дифференциалдык теңдеме, экинчи тартиптеги теңдеме, кошумча аргумент кийирүү усулу, Кошинин маселеси, функционалдык мейкиндиктеги оператор, байланган өзгөрмө, кысуучу чагылтуулардын принциби

Кошумча аргумент кийирүү усулунун негизинде, экинчи тартиптеги сызыктуу эмес жекече туундулуу Вольтерралык оператор-дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелер үчүн баштапкы маселелер оператор-интегралдык теңдемелер системаларына келтирилет. Чыгарылыштардын жашоосун далилдөө автор сунуш кылган функционалдык мейкиндикте байланган өзгөрмөлөрү болгон операторлорду тагыраак жолдо жазуу менен жана кысуучу чагылтуулардын принциби менен, ошондой эле, кошумча белгисиз функцияларды кийирүү аркылуу жүргүзүлөт.

Ар түрдүү, алардын ичинде чектелген функциялардын жана чектелбеген функциялардын жана мейкиндиктерде; интеграл белгисиндеги жеке туундусу болгон; биринчи тартиптеги жекече туундуларынын алдындагы коэффициенттери белгисиз функцияга көз каранды болгон теңдемелер үчүн баштапкы маселелеринин чыгарылыштарынын жашоосу менен жалгыздыгынын жетишерлик шарттары алынган.

Алынган натыйжалар көп мейкиндиктик өзгөрмө учуруна жалпыланган.

РЕЗЮМЕ

Мамазиаева Эльмира Амановна

Диссертация «Исследование решений нелинейных интегро–дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка методом дополнительного аргумента» представлена на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: дифференциальное уравнение в частных производных, нелинейное уравнение, интегро–дифференциальное уравнение, уравнение второго порядка, метод дополнительного аргумента, задача Коши, оператор в функциональном пространстве, связанная переменная, принцип сжимающих отображений

Начальные задачи для нелинейных вольтерровских операторно-дифференциальных и интегро–дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка на основе метода дополнительного аргумента сводятся к системам операторно-интегральных уравнений. Доказательства существования решений проводятся в предложенном автором более строгом способе записи операторов в функциональных пространствах со связанными переменными, с использованием принципа сжимающих отображений, а также введения дополнительных неизвестных функций.

Получены достаточные условия существования и единственности локальных решений начальных задач для различных типов уравнений, как в пространствах ограниченных функций, так и в пространствах неограниченных функций; с частной производной под знаком интеграла; когда коэффициенты при частных производных первого порядка зависят от неизвестной функции.

Полученные результаты обобщены для случая многих пространственных переменных.

SUMMARY

Mamaziaeva Elmira Amanovna

Dissertation "Investigation of solutions of non-linear partial integro-differential equations of second order by means of the method of additional argument" submitted for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences on specialty 01.01.02 - differential equations, dynamical systems and optimal control

Key words: partial differential equation, non-linear equation, integro-differential equation, equation of second order, method of additional argument, Cauchy problem, power of differential operator, operator in functional space, bound variable, contracting mappings principle.

Initial value problems for nonlinear partial operator-differential and integro-differential equations on the base of the method of additional argument are reduced to systems of operator-integral equations. Proving of existence of solutions is performed in more strict way to write operators in functional spaces with bound variables proposed by the author; by means of applying the contracting mappings principle and by introducing additional unknown functions.

There are obtained sufficient conditions for existence and uniqueness of local solutions of initial value problems for equations of various types both in spaces of bounded functions and in ones of unbounded functions, with a partial derivative under the integral sign; when coefficients by partial derivatives of the first order depend on unknown function.

The results obtained are generated to the case of many spatial variables.