// Вестник Жалал-Абадского государственного университета, 2016, № 1(32). – С.24-29.

УДК 517.968

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА
БИРИНЧИ ТҮРҮНДӨГҮ СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ОҢ ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫНЫН ЖАШООСУНУН ШАРТТАРЫ
CONDITIONS OF EXISTENCE OF POSITIVE SOLUTIONS OF LINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND

Аскар кызы Л.
Национальная академия наук, Бишкек, Кыргызстан
lira555@rambler.ru

Аннотации: Ранее автор доказала, что линейные интегральные уравнения первого рода могут быть корректными в некоторых классах аналитических функций. В данной статье найдены условия, когда решения таких уравнений будут положительными.

Мурда автор биринчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелердин аналитикалык функциялардын кээ бир класстарында корректтүүлүгүн далилдеген. Бул макалада мындай теңдемелердин оң чыгарылыштарынын жашоосунун шарттары табылган.

Earlier, the author proved that linear integral equations of the first kind might be correct in some classes of analytical functions. Conditions to ensure positivity of solutions of such equations are found in this paper.

Ключевые слова: интегральное уравнение первого рода, линейное уравнение, аналитическая функция, корректность, положительное решение

Түйүндүү сөздөр: биринчи түрүндөгү интегралдык теңдеме, сызыктуу теңдеме, аналитикалык функция, корректтүүлүк, оң чыгарылыш

Keywords: integral equation of the first kind, linear equation, analytical function, correctness, positive solution

Введение

На основе анализа работ [1]-[3] с помощью методики [4] Г.М.Кененбаева сделала вывод о наличии в математике «эффекта аналитичности» - задачи из различных разделов математики, которые являются некорректными в классах непрерывных и гладких функций, становятся корректными в некоторых классах аналитических функций. В работах упомянутых авторов это были задачи из различных разделов теории дифференциальных уравнений.

Нами были рассмотрены с данной точки зрения задачи теории интегральных уравнений. Было найдено следующее необходимое условие корректности задач для линейных интегральных уравнений первого рода.

Известно, что интегральный оператор Фредгольма с непрерывным ядром на ограниченном отрезке Δ является вполне непрерывным, то есть он переводит любую ограниченную последовательность функций в сходящуюся по норме пространства $C(\Delta)$. Следовательно, задача решения линейного интегрального уравнения первого рода типа Фредгольма с заданной правой частью - непрерывной функцией - не может быть корректно поставлена. Таким образом, корректной может быть только задача решения линейного интегрального уравнения первого рода на неограниченной области Δ.

1. Обзор известных результатов по корректным задачам для линейных интегральных уравнений первого рода

В ряде работ накладываются дополнительные условия.

В работах по регуляризации интегральных уравнений первого рода предполагается (дополнительно), что правая часть интегрального уравнения такая, что решение существует.

В литературе известен ряд теорем, простейшей из которых является следующая:

ТЕОРЕМА 1. Если $M(x,s)$ и $f(x)$ – гладкие функции, (выполняются дополнительные условия) $f(0)=0$ и $M(x,x)\neq 0$, то уравнение типа Вольтерра первого рода

$$\int_0^x M(x,s)\,u(s)ds = f(x) \tag{1}$$

имеет непрерывное решение.

Такие теоремы доказываются дифференцированием, приводящим их к уравнениям типа Вольтерра второго рода.

Для уравнений типа свертки известна

ТЕОРЕМА 2 [5]. Если существуют преобразования Фурье для заданных функций $f(x) \in L_2(R)$, $K(x) \in L_1(R)$ и они удовлетворяют (дополнительным) условиям

$$\Phi f(\cdot)(\xi) \in L_2(R),\quad \Phi K(\cdot)(\xi) \in L_2(R),\quad (\Phi K(\cdot)(\xi))^{-1}\Phi f(\cdot)(\xi) \in L_2(R),$$

то уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-s)\,u(s)ds = f(x) \tag{2}$$

имеет решение

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\big(\Phi K(\cdot)(\xi)\big)^{-1}\,\Phi f(\cdot)(\xi) e^{i\xi x} d\xi \in L_2(R).$$

Перед нами была поставлена задача найти классы интегральных уравнений первого рода, где существуют решения без дополнительных условий.

2. Линейное интегральное уравнение первого рода по неограниченной области, имеющее решение при любой правой части

Пусть $v>0$. Будем рассматривать пространства:

A_v – множество целых аналитических функций $f(z)$ экспоненциального типа с показателем v, то есть удовлетворяющих условию:

$(\forall f(z) \in A_v)(\exists C \in R_+)(\forall z \in C)(\,|f(z)| < C\exp(v|z|)$;

$||\cdot||_v$ – норма в пространстве A_v: $||f||_v := \sup\{|f(z)|\exp(-v|z|): z \in C\}$.

A_{+v} – множество целых аналитических функций $f(z)$ таких, что в некоторой точке (можно принять – в начале координат) последовательность их производных имеет скорость роста не выше степенного:

$(\forall f(z) \in A_{+v})\ (\exists C \in R_+)(\forall n \in N_0)(\,|f^{(n)}(0)| \le Cv^n)$.

$||\cdot||_{+v}$ – норма в пространстве A_{+v}: $||\chi||_{+v} := \sup\{|f^{(n)}(0)|\,v^{-n}: n=0,1,2,\dots\}$.

Рассмотрим уравнение

$$u_t(t,x) = -a\,u_{xx}(t,x)\quad (t \in R_+,\ x \in R) \tag{3}$$

с начальным условием

$$u(0,x) = \varphi(x),\ x \in R, \tag{4}$$

где $a>0$, $\varphi(x)$ – заданная аналитическая функция, вещественная при вещественном x.

Из результатов [6] следует

ТЕОРЕМА 3. Если функция $\varphi(z)$ - целая аналитическая экспоненциального типа, то существует целое аналитическое решение задачи (3)-(4), которое выражается формулой

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,(-a)^k\varphi^{(2k)}(x)t^k. \tag{5}$$

Это решение устойчиво по $\varphi(x)$ в пространстве A_{+v}.

В [7] предложено следующее построение.

Зафиксируем некоторое $T>0$ и обозначим $w(x)=u(T,x)$. Тогда получим в силу известной интегральной формулы для решения уравнения начальной задачи для уравнения теплопроводности:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\sqrt{a\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4aT}\right) w(s)ds.$$

Обозначим $b := \frac{1}{4aT}, f(x) := \sqrt{\frac{\pi}{b}}\varphi(x)$. Тогда получим: $T = \frac{1}{4ab}$,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} exp(-b(x-s)^2)\, w(s)ds.$$

Отсюда следует

ТЕОРЕМА 4. Если функция $f(x)$ - целая аналитическая экспоненциального типа, то существует целое аналитическое решение интегрального уравнения первого рода

$$Jw(\cdot)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} exp(-b(x-s)^2)\, w(s)ds = f(x). \quad (6)$$

Это решение выражается формулой

$$w(x) = J^{-1}f(\cdot)(x) \coloneqq \sqrt{\frac{b}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(4b)^k}\, f^{(2k)}(x). \quad (7)$$

Оно устойчиво по $f(z)$ в пространстве $A_{+\nu}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (кратко). Имеем по формуле (5):

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-a)^k}{k!(4ab)^k}\, \sqrt{\frac{b}{\pi}} f^{(2k)}(x).$$

Отсюда следует (7).

Находим формальные ряды для производных

$$w^{(p)}(x) \sim \sqrt{\frac{b}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(4b)^k}\, f^{(2k+p)}(x), p = 0,1,2,\ldots \quad (8)$$

Обозначим $f_0 := \|f\|_{+\nu}$, тогда по определению пространства $|f^{(k)}(x)| \le f_0 \nu^k exp(\nu|x|)$, $k=0,1,2,\ldots$, и оценим почленно ряд (8):

$$|w^{(p)}(x)| \sim \sqrt{\frac{b}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(4b)^k}|\, f^{(2k+p)}(x)| \le \sqrt{\frac{b}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(4b)^k} v^{2k+p}\exp(v|x|) =$$

(видно, что ряд сходится)

$$= \sqrt{\frac{b}{\pi}}\, f_0 v^p exp\left(\frac{v^2}{4b}\right)\exp(v|x|).$$

Отсюда находим оценку операторной нормы

$$\|J^{-1}f\|_{+v} \coloneqq \sup\left\{\left|w^{(p)}(0)\right| v^{-p} : p = 0,1,2,\ldots\right\} \le$$

$$\le \sup\left\{\sqrt{\frac{b}{\pi}}\, f_0 v^p exp\left(\frac{v^2}{4b}\right) v^{-p} : p = 0,1,2,\ldots\right\} =$$

$$= \sup\left\{\sqrt{\frac{b}{\pi}}\, f_0 exp\left(\frac{v^2}{4b}\right) : p = 0,1,2,\ldots\right\} = \sqrt{\frac{b}{\pi}}\, exp\left(\frac{v^2}{4b}\right)\|f\|_{+v}.$$

Таким образом, обратный оператор ограничен. Его операторная норма

$$\|J^{-1}\|_{+v} \le \sqrt{\frac{b}{\pi}}\, exp\left(\frac{v^2}{4b}\right).$$

Теорема доказана.

3. Условия существования положительных решений

Отметим, что общая задача поиска условий существования положительных решений для различных типов уравнений была поставлена в [8].

ТЕОРЕМА 5. Если 1) выполняются условия Теоремы 4, 2) $(\forall x\in R)(f(x)>0)$, 3) $(\forall x\in R)(|f^{(2k)}(x)|\le 2b\,k|f^{(2k-2)}(x)|, k=1,2,3,\dots)$,

то решение уравнения (6) неотрицательно для всех $x\in R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия 3) теоремы по индукции получаем:

$(\forall x\in R)(|f^{(2k)}(x)|\le (2b)^k\, k!|f(x)| = (2b)^k\, k!f(x), k=1,2,3\dots)$.

Из формулы (7) получаем:

$$w(x) \ge \sqrt{\frac{b}{\pi}}\left(f(x) - \left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(4b)^k}\, f^{(2k)}(x)\right|\right) \ge$$

$$\ge \sqrt{\frac{b}{\pi}}\left(f(x) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!(4b)^k}\, \left|f^{(2k)}(x)\right|\right) \ge$$

$$\ge \sqrt{\frac{b}{\pi}}\left(f(x) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!(4b)^k}(2b)^k\, k!\, f(x)\right) = \sqrt{\frac{b}{\pi}}\, f(x)\left(1 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\right) = 0.$$

Теорема доказана.

Данный результат кратко опубликован в [9].

ПРИМЕР. Для $f(x)=exp(qx)$ получаем: $f^{(2k)}(x)=q^2 f^{(2k-2)}(x)$, то есть Теорема 5 дает достаточное условие для существования положительного решения: $q^2<2b$.

Найдем решение уравнения (6) для такой функции. Имеем:

$$w(x) = \sqrt{\frac{b}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(4b)^k}\, f^{(2k)}(x) = \sqrt{\frac{b}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(4b)^k}\, q^{2k}\exp(qx) =$$

$$= \sqrt{\frac{b}{\pi}}\exp\left(-\frac{q^2}{4b}\right)\exp(qx). \qquad (9)$$

То есть, отсюда видно, что уравнение (6) имеет положительное решение при любом q.

Таким образом, Теорема 5 дает дополнительное ограничение на q, что можно объяснить огрублением оценки при доказательстве.

Также найдем решение уравнения (6) для $f(x)=sin\ qx$. Используя (9) и тождество

$sin\ qx = (exp(iqx) - exp(-iqx))/(2i)$,

получаем

$$w(x) = \sqrt{\frac{b}{\pi}}\left(\exp\left(-\frac{(iq)^2}{4b}\right)\exp(iqx) - \exp\left(-\frac{(-iq)^2}{4b}\right)\exp(-iqx)\right)\frac{1}{2i} =$$

$$= \sqrt{\frac{b}{\pi}}\ exp\left(\frac{q^2}{4b}\right)\sin qx.$$

Отсюда видно, что можно сформулировать условие положительности для периодических функций $f(x)$, представимых в виде суммы рядов Фурье.

Список использованной литературы

1. Алыбаев К.С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости // Вестник КГНУ. - Серия 3, Выпуск 6. – Бишкек, 2001. - С. 190-200.
2. Pankov P.S., Imanaliev T. M. Convergence of Finite Difference Method for First-Order Partial Differential Equations with Analytical Initial Conditions // Analytical and Approximate Methods: International Conference at the Kyrgyz-Russian Slavic University. - Shaker Verlag, Aachen, Germany, 2003. - Pp. 185-193.
3. Панков П.С., Сабирова Х.С. Применение метода сеток к обратной начальной задаче для уравнения теплопроводности с аналитическим начальным условием // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына: Естественно-технические науки. Серия 3. - Вып. 3. Математические науки. Информатика и информационные технологии. - 2005. - С. 103-106.
4. Кененбаева Г.М. Теория и методика поиска новых эффектов и явлений в теории возмущенных дифференциальных и разностных уравнений. - Бишкек: Изд-во "Илим", 2012. - 204 с.
5. Манжиров А. В., Полянин А. Д. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения. - Москва: Изд-во «Факториал Пресс», 2000. - 384 с., раздел 4.3-1.
6. Панков П.С., Сабирова Х.С. Корректность обратной начальной задачи для уравнения теплопроводности с аналитическими данными // Дифференциальные уравнения в частных производных и родственные проблемы анализа и информатики: Труды международной научной конференции (г. Ташкент, 16-19 ноября 2004). Том 1. – Ташкент, 2004. – С. 117-121.
7. Кененбаева Г.М., Аскар кызы Л. Класс интегральных уравнений первого рода, имеющих решение при любой правой части // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики: труды Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Г. И. Марчука, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН. - Новосибирск: Абвей, 2015. - С.321-325.
8. Акерова Дж. А. Нелинейные дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных и особенности их решений. – Автореф. дисс. … к.ф.-м.н., специальность 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление. – Бишкек, 2016. – 18 с.
9. Askar kyzy L. Conditions of positivity of solutions of integral equations of the first kind in the space of analytical functions // Abstracts of the V International Scientific Conference “Asymptotical, Topological and Computer Methods in Mathematics” devoted to the 85 anniversary of Academician M. Imanaliev / Ed. by Academician A.Borubaev. - Bishkek, 2016. – P. 35.