УДК 517.955

Т.Р. Кыдыралиев
старший преподаватель,
кафедра информатики и инновационных технологий,
ФИИТ «Кыргызский национальный университет
имени Жусупа Баласагына», Киргизия

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РЕШЕНИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Аннотация. В статье рассмотрены методы преобразования решений к исследованию разрешимости задачи Коши для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. В решении найдено интегральное представление.

Ключевые слова: интегральное уравнение, дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, принцип сжатых отображений, нелинейность.

T.R. Kydyraliev, Kyrgyz National University named after Jusup Balasagun, Kyrgyzstan

ON THE APPLICATION OF THE METHOD OF CONVERTING SOLUTIONS TO THE STUDY OF THE INITIAL PROBLEM SOLVABILITY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PARTIAL DERIVATIVES

Abstract. The article describes the methods of converting solutions to the study of the Cauchy problem solvability for nonlinear partial differential equations of third order. Found an integral representation of solutions.

Keywords: integral equation, partial differential equation of the second order, the principle of contraction mappings, nonlinearity.

В работе [1–2] методы преобразования решений были применены в аналитической и асимптотической теории дифференциальных и интегральных уравнений. В данной работе методы преобразования решений применяются к исследованию разрешимости начальной задачи дифференциальных уравнений в частных производных.

I. Рассмотрим разрешимость задачи Коши для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

$$\begin{aligned}&u_{tt}(t,x,y)+2(u_{tx}(t,x,y)+u_{ty}(t,x,y))+u_{xx}(t,x,y)+2u_{xy}(t,x,y)+u_{yy}(t,x,y)+\\&+u_t(t,x,y)+u_x(t,x,y)+u_y(t,x,y)=f(t,x,y,u(t,x,y))\end{aligned}\tag{1}$$

с начальными условиями:

$$u(0,x,y)=\varphi(x,y),\tag{2}$$

$$u_t(0,x,y)=\psi(x,y).\tag{3}$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ (T). Пусть $\varphi(x,y),\ \psi(x,y)\in \bar{C}^2(R\times R)$ и

$f(t,x,u)\in Lip(L_u)\cap\bar{C}^{(1,1)}([0,T]\times R\times R\times R)$,

$LT_0<1, T_0<T_0$.

Докажем, что при предположении (T) решение задачи (1)–(3) можно получить из нелинейного интегрального уравнения Вольтерра вида:

$$\begin{aligned}&u(t,x,y)=\varphi(x-t,y-t)+\int_0^t e^{-s}\eta(x-t,y-t)ds+\\&+\int_0^t\int_0^s e^{-(s-\rho)}f(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho,u(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho))d\rho d\rho\equiv Pu.\end{aligned}\tag{4}$$

В самом деле, дифференцируя обе части (4) по *t*, *x* и *y*, имеем:

$$
\begin{aligned}
u_t &= -[\varphi_x(x-t,y-t)+\varphi_y(x-t,y-t)]+e^{-t}\cdot\eta(x-t,y-t)+\\
&-\int_0^t e^{-s}[\eta_x(x-t,y-t)+\eta_y(x-t,y-t)]ds+\\
&+\int_0^t e^{-(t-\rho)}f(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho,u(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho)]d\rho+\\
&+\int_0^t\int_0^s e^{-(s-\rho)}\left[-(f_x+f_y+f_u(u_x+u_y)\right]d\rho ds;
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$$
u_x=\varphi_x(x-t,y-t)+\int_0^t e^{-s}[\eta_x(x-t,y-t)]ds+\int_0^t\int_0^s e^{-(s-\rho)}\left[f_x+f_uu_x\right]d\rho ds,
\tag{6}
$$

$$
u_y=\varphi_y(x-t,y-t)+\int_0^t e^{-s}[\eta_y(x-t,y-t)]ds+\int_0^t\int_0^s e^{-(s-\rho)}\left[f_y+f_uu_y\right]d\rho ds.
\tag{7}
$$

Сложив почленно равенства (5), (6) и (7) получим

$$
\begin{aligned}
u_t+u_x+u_y &= \eta\left(x-t,y-t\right)e^{-t}+\\
&+\int_0^t e^{-(t-\rho)}f(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho,u(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho))d\rho.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Дифференцируя обе части выражения (8) по t, имеем:

$$
\begin{aligned}
&u_{tt}+u_{tx}+u_{ty}=-[\eta_x\left(x-t,y-t\right)+\eta_y\left(x-t,y-t\right)e^{-t}+\eta\left(x-t,y-t\right)e^{-t}]+\\
&+f(t,x,y,u(t,x,y))-\int_0^t e^{-(t-\rho)}f(\rho,x-t+\rho,u(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho))d\rho-\\
&-\int_0^t e^{-(t-\rho)}[f_x+f_y+f_u\cdot[u_x+u_y]d\rho.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Аналогично, дифференцируя обе части выражения (8) по x, и по y, получим:

$$
u_{tx}+u_{xx}+u_{xy}=[\eta_x\left(x-t,y-t\right)]e^{-t}+\int_0^t e^{-(t-\rho)}\left[f_x+f_uu_x\right]d\rho;
\tag{10}
$$

$$
u_{ty}+u_{xy}+u_{yy}=[\eta_y\left(x-t,y-t\right)]e^{-t}+\int_0^t e^{-(t-\rho)}\left[f_y+f_uu_y\right]d\rho.
\tag{11}
$$

Сложив почленно выражения (9), (10) и (11), имеем:

$$
\begin{aligned}
&u_{tt}+2(u_{tx}+u_{ty})+u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}=-[\eta\left(x-t,y-t\right)]e^{-t}-\\
&-\int_0^t e^{-(t-\rho)}f(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho,u(x-t+\rho))d\rho+f(t,x,y,u).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Из (12), учитывая (8), получим (1). Заметим, что из (4) и (5) следует, что

$$
u(0,x,y)=\varphi(x,y),
$$

$$
u_t(0,x,y)=\psi(x,y)=-[\varphi_x(x,y)+\varphi_y(x,y)]+\eta(x,y).
$$

Из последнего выражения находим, что

$$
\eta(x,y)=\psi(x,y)+[\varphi_x(x,y)+\varphi_y(x,y)].
\tag{13}
$$

Что и требовалось доказать. Далее, к нелинейному интегральному уравнению Вольтерра (4) применим принцип сжатых отображений.

Пусть

$$
Q=\left\{u(t,x,y):u(t,x,y)\in\bar{C}^{(2,2,2)}\left(\left[0,T\right]\cap R\times R\right)\cap\|u\|\le h\right\}.
\tag{14}
$$

Величины T_0, h определяются позже. Введем обозначения:

$$\left\|\varphi(x-t,y-t)+\int_0^t e^{-s}[\eta(x-t,y-t)]ds\right\|=q.$$

и определим константы T_0 и h из неравенства

$$q+MT_0\le h,$$

где $M=\max|f(t,x,y,u)|$.

Из (4) в силу предположения (T) имеем неравенство:

$$\|Pu\|\le q+M\left\|\int_0^t\int_0^s e^{-(s-\rho)}d\rho ds\right\|\le q+MT_0\le h. \quad (15)$$

Итак,

$$Pu:Q\to Q.$$

Докажем теперь, что интегральный оператор $Pu,$ определенный по формуле (4), является оператором сжатия на множестве $Q.$ Из (4), используя предположение (T), получаем:

$$\|Pu_1-Pu_2\|\le\left\|\int_0^t\int_0^s e^{-(s-\rho)}\left[f(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho,u_1(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-f(\rho,x-t+\rho,u_2(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho))\right]\right\|d\rho ds\|\le$$
$$\le L\|u_1-u_2\|\cdot\int_0^t\int_0^s e^{-(s-\rho)}d\rho ds\le LT_0\|u_1-u_2\|.$$

Следовательно, на основании принципа сжатых отображений нелинейное интегральное уравнение Вольтерра (4) имеет единственное решение.

$$u(t,x,y)\in\bar{C}^{(2,2,2)}\left([0,T_0]\times R\times R\right).$$

ТЕОРЕМА 1. Если выполнено предположение (T), то начальная задача (1)–(3) имеет единственное решение $u(t,x,y)\in\bar{C}^{(2,2,2)}\left([0,T_0]\times R\times R\right),$ которое имеет интегральное представление вида (4).

СЛЕДСТВИЕ 1. Если в (1) правая часть f не зависит от u, то решение начальной задачи (1)–(3) находится в квадратурах:

$$u(t,x,y)=\varphi(x-t,y-t)+\left[\psi(x-t,y-t)+[\varphi_x(x-t,y-t)]\right]\left(1-e^{-t}\right)+$$
$$+\int_0^t\int_0^s e^{-(s-\rho)}f(t,x-t+\rho,y-t+\rho)d\rho ds.$$

Доказательство следствия 1 следует из соотношения (4), (13).

II. Далее, рассмотрим задачу Коши для систем уравнений:

$$u_t(t,x,y)+u_x(t,x,y)+A(t,x,y)u(t,x,y)=f(t,x,y,u(t,x,y)),\ t\in[0,T],\ x,y\in R, \quad (16)$$

с начальным условием

$$u(0,x,y)=\varphi(x,y), \quad (17)$$

где $f(t,x,u)$ – заданный n-мерная вектор-функция.

УСЛОВИЕ (С). Предположим, что $A(t,x,y)\in\bar{C}\left([0,T]\times R\times R\right),$

$$f(t,x,y,u)\in\bar{C}\left([0,T]\times R\times R\times R\right)\cap Lip\left(L|_u\right),\ \varphi(x,y)\in\bar{C}^{1,1}(R\times R).$$

Очевидно, что из условия (С) имеем $\|A(t,x,y)\|\le M_A=const.$

Решение задачи Коши (16), (17) ищем в виде

$$u(t,x)=\varphi(x-t,y-t)+\int_0^t e^{-\alpha(t-s)+\beta s}Q(s,x-t+s,y-t+s)ds, \tag{18}$$

где Q – неизвестная функция, α,β – некоторые положительные числа, которые будут определяться позже.

Последовательно дифференцируя по t и x, y соотношение (18), имеем

$$u_t(t,x,y)=-\left[\varphi_x(x-t,y-t)+\varphi_y(x-t,y-t)\right]+e^{\beta t}Q(t,x,y)-\alpha(u-\varphi)-$$
$$-\int_0^t e^{-\alpha(t-s)+\beta s}\left[Q_x(s,x-t+s)+Q_y(s,x-t+s)\right]ds;$$
$$u_x(t,x,y)=-\varphi_x(x-t,y-t)+\int_0^t e^{-\alpha(t-s)+\beta s}Q_x(s,x-t+s,y-t+s)ds;$$
$$u_x(t,x,y)=-\varphi_y(x-t,y-t)+\int_0^t e^{-\alpha(t-s)+\beta s}Q_y(s,x-t+s,y-t+s)ds.$$

Отсюда

$$u_t(t,x,y)+u_x(t,x,y)+u_y(t,x,y)=e^{\beta t}Q(t,x,y)-\alpha u+\alpha\varphi(x-t,y-t). \tag{19}$$

Учитывая (18), имеем

$$\begin{aligned}&\left[A(t,x,y)-\alpha E\right]u=\left[A(t,x,y)-\alpha E\right]\varphi(x-t,y-t)+\left[A(t,x,y)-\alpha E\right]\times\\&\times\int_0^t e^{-\alpha(t-s)+\beta s}Q\ (s,x-t+s,y-t+s)ds.\end{aligned} \tag{20}$$

Складывая почленно соотношения (19) и (20), получим:

$$u_t+u_x+u_y+A(t,x,y)u=f(t,x,y,u)=e^{\beta t}Q(t,x,y)+\alpha\varphi(x-t,y-t)+$$
$$+A(t,x,y)\varphi(x-t,y-t)-\alpha\varphi(x-t,y-t)+\left[A(t,x,y)-\alpha E\right]\int_0^t e^{-\alpha(t-s)+\beta s}Q(s,x-t+s,y-t+s)ds.$$

Отсюда, учитывая (18), имеем:

$$\begin{aligned}&Q(t,x,y)=e^{-\beta t}[f(t,x,y,\varphi(x-t,y-t)+e^{\beta t}\int_0^t e^{-(\alpha+\beta)(t-s)}\times\\&\times Q(s,x-t+s,y-t+s)ds)-A(t,x,y)\varphi(x-t,y-t)-\left[A(t,x)-\alpha E\right]e^{\beta t}\times\\&\times\int_0^t e^{-(\alpha+\beta)(t-s)}Q(s,x-t+s,y-t+s)ds\right]\equiv PQ.\end{aligned} \tag{21}$$

Интегральное уравнение (21) будем решать, применяя принцип сжатых отображений.

Пусть $Q=\left\{u(t,x,y):u(t,x,y)\in\bar{C}^{(2,2,2)}\left(\left[0,T\right]\cap R\times R\right)\cap\|u\|\le h\right\}$.

Отметим, что величины $T_0 < T$ и h будут определены ниже.

Из (21) в силу условия (С) имеем

$$\|PQ\|\le e^{-\beta T}M+\frac{2}{\alpha+\beta}(M_A+n\alpha)h\ .$$

Выберем α,β так, чтобы

$$\frac{2}{\alpha+\beta}((M_0+\alpha n)+L)\le 1. \tag{22}$$

Будем считать, что $T_0 < T$ и такими, что

$$e^{-\beta T_0}M+\frac{2}{\alpha+\beta}(M_A+\alpha n)h\le h.$$

Тогда оператор PQ переводит множества Ω в себя, т.е.

$$Pu : Q \to Q.$$

Покажем теперь, что оператор P и является оператором сжатия. Из (21), используя условие (C), получаем:

$$\begin{aligned}
&\|PQ_1 - PQ_2\| \le \Big\| e^{-\beta t}\Big[f(t,x,y,\varphi(x-t,y-t) + e^{\beta t}\int_0^t e^{-(\alpha+\beta)(t-s)}\, Q_1(s,x-t+s,y-t+s)ds) - \\
&-f(t,x,y,\varphi(x-t,y-t) + e^{\beta t}\int_0^t e^{-(\alpha+\beta)(t-s)} Q_2(s,x-t+s,y-t+s)ds)\Big]\Big\| + \\
&+\Big\| [A(t)-\alpha E]\int_0^t e^{-(\alpha+\beta)(t-s)}[Q_1(s,x-t+s,y-t+s) - Q_2(s,x-t+s,y-t+s)]ds \Big\| \le \\
&\le \frac{2}{\alpha+\beta}((M_0+\alpha n)+L)\|Q_1 - Q_2\|.
\end{aligned} \tag{23}$$

Тогда из (23) следует, что PQ есть оператор сжатия на множестве Ω. По принципу сжатых отображений уравнение (21) имеет единственное решение $Q(t,x,y) \in \Omega$. Подставив найденную функцию в (18), получим решение задачи Коши (16), (17).

Теперь сформулируем полученные результаты.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия (C). Тогда $\exists\, T_0 > 0$ такое, что задача Коши (16), (17) имеет решение $u(t,x,y) \in \bar{C}^{(1,1,1)}\left([0,T_0]\times R\times R\right)$, которое, представимо в виде (18).

Список литературы:

1. Иманалиев М.И., Байзаков А.Б. О разрешимости задачи Коши для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных // Поиск. Сер. ест.-техн. наук. – Алматы, 2009. – № 1. – С. 209–213. – (Научное приложение международного журнала «Высшая школа Казахстана»).

2. Байзаков А.Б. Методы преобразования решений в аналитической и асимптотической теории дифференциальных и интегральных уравнений: автореф. дисс. на соиск. уч. ст. д-ра физ.-мат. наук. – Бишкек, 2011. – 25 с.

3. Imanaliev M.I., Baizakov A.B.,Kydyraliev T.R. Sufficient conditions for the existense of solutions of the Cauchy problem of partial differential eguations of third order // Proceedings of V Congress of the Turkic World mathematicians. – Bishkek, 2014. – V. 1. – P. 121–126.

4. Aitbaev K.A. On the existence of the solutions of Cauchy problem for nonlinear partial differential equations // Proceedings of the V Congress of the Turkic World Mathematical Society. – Bishkek, 2014. – P. 150–154.