НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Ж. БАЛАСАГЫНА

Диссертационный совет Д 01.19.598

На правах рукописи
УДК 517.9

ДЖЭЭНБАЕВА ГУЛГААКЫ АБДЫКААРОВНА

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

01.01.02 - дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Бишкек – 2020

Диссертационная работа выполнена в Институте математики Национальной академии наук Кыргызской Республики.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор, **Байзаков Асан Байзакович**, (заведующий лабораторией Прикладной математики и информатики Института математики Национальной академии наук Кыргызской Республики)

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент Национальной академии наук Кыргызской Республики **Алымкулов Келдибай,** (директор Института фундаментальных наук Ошского государственного университета)

кандидат физико-математических наук, доцент, **Курманбаева Айнура Кудайбергеновна,** (Кыргызско-Российский Славянский университет, кафедра «Высшая математика»)

Ведущая организация: Ошский Технологический университет им. М.М.Адышева, кафедра «Прикладная математика» 723503 г. Ош, ул. Исанова 81а

Защита диссертации состоится 4 марта 2020 года в 14.00 на заседании диссертационного совета Д 01.19.598 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук при Институте математики Национальной академии наук Кыргызской Республики и Кыргызском Национальном университете им. Ж. Баласагына по адресу: Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй 265-а, кабинет 374.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Национальной академии наук Кыргызской Республики, Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй 265-а, и на сайте www.math.aknet.kg Института математики Национальной академии наук Кыргызской Республики.

Автореферат опубликован «3 » февраля 2020 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н. Шаршембиева Ф.К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Асимптотические и аналитические методы занимают важное место в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Это объясняется тем, что задачи, рассматриваемые в теории дифференциальных уравнений, в подавляющем большинстве не имеют явного решения в виду сложной зависимости от числовых и функциональных параметров, входящих в эти задачи. Однако правильное описание решения или нахождение приближенного решения можно существенно упростить, если известно, что некоторые из переменных (параметров) очень малы, либо, наоборот, велики. Для решения таких задач привлекаются асимптотические и аналитические методы.

Обзор литературы показал, что методы преобразования решений широко применяются в аналитической и качественной теории дифференциальных и интегральных уравнений. Для доказательства существования и единственности дифференциальных уравнений в частных производных (ДУ в ЧП) часто применяются методы преобразования решений.

Из анализа имеющихся работ следует, что многие актуальные вопросы асимптотической и аналитической теории нелинейных интегральных уравнений Вольтерра (ИУВ) и ДУ в ЧП, все еще остаются до сих пор мало исследованными или вообще не исследованными. Среди различных задач, несомненно, актуальными, как для самой теории, так и для приложений, являются проблемы: асимптотической и аналитической структуры решений в ИУВ, ИДУВ вблизи регулярной и иррегулярной особых точек; разрешимость и структура решений задачи Коши ДУ в ЧП.

Связь работы с научно-исследовательскими проектами. Данная работа выполнена в рамках проектов по Институту математики НАН КР: «Развитие асимптотических, топологических и аналитических методов и компьютерного моделирования для изучения динамических и управляемых систем, обратных и оптимизационных экономических задач и геофизических процессов”. (2014-2017), № госрегистрации 0007125; «Развитие асимптотических, топологических и аналитических методов в теории равномерных топологических и кинематических пространств, динамических систем, оптимизационных экономических задач, математическом моделировании» (2018-2020), № госрегистрации 0007664. Результаты работы включены в заключительные и промежуточные отчеты по этим проектам.

Цель и задачи исследования. Настоящая диссертационная работа продолжает исследования В.Вольтерра, А.Пуанкаре, А.М.Ляпунова, Я.Горна, Э.И.Грудо, Я.В.Быкова, М.И.Иманалиева, П.С.Панкова, Т.М.Иманалиева, К.К.Какишева, А.Б.Байзакова, А.Асанова, А.К.Курманбаевой. Она посвящена дальнейшей разработке и исследованию разрешимости и структуры решений дифференциальных и интегральных уравнений методом преобразования решений.

Задачи исследования:

- Выявить достаточные условия разрешимости задачи Коши и построены структуры решений новых классов ДУ в ЧП и ИДУ в ЧП.
- Найти условия существования решений начальной задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с параметром
- Найти условия существования периодических решений краевой задачи квазилинейных интегральных уравнений Вольтерра.
- Определить влияния полюса свободного члена и особенностей ядра на решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра.
- Построить асимптотическую структуру решений системы интегральных уравнений Вольтерра с особенностью.

Методика исследований. В настоящей работе использованы метод преобразования решений дифференциальных и интегральных уравнений, методы аналитической и асимптотической теории дифференциальных уравнений, методы функционального анализа.

Научная новизна диссертации. На защиту выносятся следующие положения:

Найденные методом преобразования решений достаточные условия разрешимости задачи Коши и построенные структуры решений новых классов ДУ в ЧП и ИДУ в ЧП.

Выявленные методом преобразования решений условия существования решений начальной задачи для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с параметром.

Найденные условия существования периодических решений краевой задачи для квазилинейных интегральных уравнений типа Вольтерра.

Определение характера влияния полюсов свободного члена и особенностей ядра на решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра.

Построение асимптотической структуры решений системы интегральных уравнений Вольтерра с особенностью.

Теоретическая и практическая ценность. Настоящая работа носит в основном теоретический характер. Результаты ее могут быть использованы при дальнейших исследованиях по интегральным и интегро-дифференциальным уравнениям, уравнений математической физики и при разработке спецкурсов для студентов математических специальностей Вузов КР: КНУ им.Ж. Баласагына, КРСУ им. Б.Ельцина, БГУ им. К.Карасаева.

Личный вклад соискателя. В диссертационной работе постановка задачи принадлежит руководителю Байзакову А.Б, а соискателю – вывод основных соотношений, схема метода и их использование.

Апробация результатов. Результаты настоящей диссертации доложены и обсуждены на следующих семинарах: Института математики НАН КР (руководитель - академик А.А.Борубаев) и на следующих конференциях: Международной научно-практической конференции «Информационные технологии: инновации в науке и образовании», Казахстан, Актобе, 2015; Международной научной конференции “II Борубаевские чтения” ИМ НАН КР Бишкек, 2018, “III Борубаевские чтения”, посвященной 35-летию со дня образования ИМ НАН КР, Бишкек, 2019.

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. По результатам исследований соискателем опубликовано 9 статей: [1-9], в том числе две за рубежом. Также опубликованы 4 тезиса докладов [10-13]. В статьях, совместных с научным руководителем, постановка задач принадлежит научному руководителю, а полученные результаты - соискателю. В статье [1] соавтору принадлежит обсуждение результатов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, выводов, списка литературы, содержащего 97 наименований. Объем текста 90 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дано обоснование актуальности темы, общая характеристика работы, цель и задачи исследования, научная новизна, практическая значимость, основные положения, выносимые на защиту.

1 глава «ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ» содержит обзор литературы по теме диссертации. Приведены необходимые сведения и определения, обзор литературы по теме диссертации и вспомогательные результаты из аналитической и асимптотической теории дифференциальных уравнений.

2 глава «МАТЕРИАЛ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ» посвящена для описания объекта и предмета исследования, использованный метод для решения поставленных задач.

Объект исследования. Объектом исследования являются дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных (скалярные и системы уравнений) и интегральные уравнения Вольтерра. Рассматриваются проблемы разрешимости начальной задачи, существования периодических решений и влияния полюсов свободного члена и особенностей ядра на решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра.

Предмет исследования. Дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных (скалярные и системы уравнений) и интегральные уравнения Вольтерра.

Методы исследования. Метод преобразования решений.

Третья глава. Здесь приводятся результаты собственных исследований и их обсуждение.

В разделе 3.1 применяется метод преобразования решений к исследованию разрешимости начальной задачи для ИДУ в ЧП третьего порядка

$$u_{ttx}(t,x)+\alpha u_{tx}(t,x)+\beta u_{tt}(t,x)+\alpha\beta u_t(t,x)+(\alpha+1)u_x(t,x)+\beta(\alpha+1)u(t,x)=$$

$$= f(t,x,u(t,x)) + \int_0^t K(t,s,x,u(s,x))ds,\ (t,x)\in D=[0,T]\times R, \qquad (3.1.1)$$

с начальными данными

$$u(0,x)=\varphi(x), x\in R,\ u_t(0,x)=\psi(x), x\in R, \qquad (3.1.2)\text{-}(3.1.3)$$

где $\alpha,\ \beta\in R_+$ - положительные постоянные, $f(t,x,u)\in C([0,T]\times R\times R)$, $K(t,x,s,u)\in C([0,1]\times R\times(0\le s\le t)\times R)$ -заданные функции; $\varphi(x),\ \psi(x)\in \bar{C}^{1.}(R\to R)$.

Решение начальной задачи (3.1.1)-(3.1.3) будем искать в следующем интегральном виде

$$u(t,x)=c(t,x)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)}\sin(t-s)Q(s,\rho)d\rho ds \qquad (3.1.4)$$

где известная функция, $c(t,x)\in\bar{C}^{1,2}([0,T]\times R)$ - выбрана так, что $c(0,x)=\varphi(x)$, $c_t(0,x)=\psi(x)$, $Q(t,x)$ - вновь введенная функция, которую следует определить.

Доказана

ТЕОРЕМА 3.1.1. Предположим, что выполнены:

1) В области $\{t\ge 0,\ -\infty<x<\infty\}$ функция $H(t,c)$ является непрерывной и ограниченной $\|H(t,c)\|\le M_0=const$;
2) в областях $[0,T]\times R\times R, [0,1]\times R\times(0\le s\le t)\times R$ заданные функции $f(t,x,u)$, $K(t,s,x,u)$ ограничены: $\|f(t,x,u)\|\le M_1=const$; $\|K(t,s,x,u)\|\le M_2=const$

и удовлетворяют следующим условиям по аргументу u:

$\|f(t,x,u_2)-f(t,x,u_1)\|\le L\|u_2-u_1\|$, $\|K(t,s,x,u_2)-K(t,s,x,u_1)\|\le N\|u_2-u_1\|$

где L,N - константы Липшица.

3) $\dfrac{L+NT}{\alpha\beta}\le\dfrac{1}{2}$.

Тогда нелинейное ИДУВ (3.1.1) с начальными данными (3.1.2)-(3.1.3) имеет ограниченное решение.

В 3.2 разделе изучена разрешимость начальной задачи для ИДУВ четвертого порядка и построено интегральное представление найденных решений.

Рассмотрим начальную задачу для ИДУВ четвертого порядка

$$\begin{aligned}&u_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha u_{txy}(t,x,y)+\gamma u_{ttx}(t,x,y)+\beta u_{tty}(t,x,y)+2\alpha\beta\, u_{ty}(t,x,y)+\\&+\alpha^2u_{xy}(t,x,y)+\alpha^2\beta u_y(t,x,y)+2\gamma\alpha u_{tx}(t,x,y)+\gamma\beta u_{tt}(t,x,y)+\\&+2\alpha\beta\gamma u_t(t,x,y)+\alpha^2\gamma u_x(t,x,y)+\alpha^2\beta\gamma u(t,x,y)= \qquad (3.2.1)\\&f(t,x,y,u(t,x,y))+\int_0^t K(t,s,x,y,u(s,x,y))ds,\end{aligned}$$

$(t,x,y)\in D_2=[0,T]\times R^2$,

$$u(0,x,y)=\varphi(x,y),(x,y)\in R^2,\ u_t(0,x,y)=\psi(x,y),(x,y)\in R^2, \qquad (3.2.2)\text{-}(3.2.3)$$

где α,β,γ - положительные константы. Применяя метод преобразования решений решение задачи (3.2.1)-(3.2.3) ищем в виде

$$u(t,x,y)=c(t,x,y)+$$
$$+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}\sin(t-s)Q(s,\mu,\nu)\,d\nu\, d\mu\, ds, \qquad (3.2.4)$$

где $c(t,x,y)\in\bar{C}^{2,1,1}([0,T]\times R\times R)$ - причем выполняется нижеследующие условия

$c(0,x,y)=\varphi(x,y), c_t(0,x,y)=\psi(x,y)$, а $Q(t,x,y)$ - новая введенная функция.

ТЕОРЕМА 3.2.1. Если $f(t,x,y,u)\in\bar{C}([0,T]\times R\times R\times R)\cap Lip(L|_u)$, $K(t,s,x,y,u)\in\bar{C}((0\le s\le t\le T)\times R\times R\times R)\cap Lip(L_1|_u)$, $\frac{(L+L_1T_0)}{\alpha\beta\gamma}<1,\ T_0\le T$.

Тогда начальная задача (3.2.1)-(3.2.3) имеет решение $u(t,x,y)\in\bar{C}^{(2,1,1)}([0,T_0]\times R\times R)$, которое имеет интегральное представление (3.2.4).

В 3.3 изучим начальную задачу поставленной для системы ИДУ в ЧП с параметром на разрешимость:

$$\varepsilon\left[u_t(t,x,y)+u_x(t,x,y)+u_y(t,x,y)\right]+$$
$$+A(t,x,y,\varepsilon)u(t,x,y)=f\left(t,x,y,u(t,x,y),\varepsilon\right)+\int_0^t K\left(t,s,x,y,u(s,x,y),\varepsilon\right)ds, \qquad (3.3.1)$$

где $t\in[0,T],\ (x,y)\in R\times R,$ с заданным начальным условием

$$u(0,x,y)=\varphi(x,y). \qquad (3.3.2)$$

Решение начальной задачи (3.3.1)-(3.3.2) ищем в интегральном виде

$$u(t,x,y)=\varphi(x-t,y-t)+\int_0^t e^{-\frac{\alpha(t-s)}{\varepsilon}+\frac{\beta s}{\varepsilon}}\frac{1}{\varepsilon}Q(s,x-t+s,y-t+s)ds. \qquad (3.3.3)$$

$Q(t,x,y)$– новая неизвестная функция, которую следует определить; $\alpha,\beta\in R_+$.

ТЕОРЕМА 3.3.1. Пусть $A(t,x,y,\varepsilon)\in\bar{C}([0,T]\times R\times R)$, $f(t,x,y,u)\in\bar{C}([0,T]\times R\times R\times R)\cap Lip(L_1|_u)$,
$K(t,s,x,y,u,\varepsilon)\in\bar{C}((0\le s\le t\le T)\times R\times R\times R)\cap Lip(L_2|_u), \varphi(x,y)\in\bar{C}^1(R\times R)$.

Тогда существует значение $T_0>0$, такое, что начальная задача (3.3.1), (3.3.2) будет иметь решение $u(t,x,y)\in\bar{C}^{(1,1,1)}([0,T_0]\times R\times R)$, которое имеет интегральное представление в виде (3.3.3).

Далее, рассмотрена начальная задача для нелинейной ДУ в ЧП

$$\varepsilon^3u_{txy}+\varepsilon\left(u_t+u_x+u_y\right)+A(t,x,y)u=f(t,x,y,u),\ t\in[0,1],\ (x,y)\in R\times R \qquad (3.3.9)$$

с начальным условием (3.3.2). Ее решение ищем в виде

$$u(t,x,y)=\varphi(x,y)+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^3}Q(s,\mu,\nu)d\mu d\nu ds, \qquad (3.3.10)$$

где $Q(t,x,y)$ – неизвестная функция, α,β,γ - положительные постоянные.

ТЕОРЕМА 3.3.2**.** Пусть $f(t,x,y,u)\in\bar{C}\left(\left[0,T\right]\times R\times R\times R\right)\cap Lip\left(L\big|_u\right)$. Тогда существует значение $T_0>0$, такое, что задача Коши (3.3.9), (3.3.2) будет иметь единственное решение $u(t,x,y)\in\bar{C}^{(1,1,1)}\left(\left[0,T_0\right]\times R\times R\right)$, которое имеет интегральное представление в виде (3.3.10).

В 3.4 рассмотрено ИДУ в ЧП третьего порядка

$$\varepsilon^3u_{ttx}+\alpha\varepsilon^2u_{tx}+\beta\varepsilon^2u_{tt}+\alpha\beta\varepsilon u_t+\left(\alpha+1\right)\varepsilon u_x+\beta\left(\alpha+1\right)u=f(t,x,u(t,x))+ \\ +\int_0^t K(t,s,x,u(s,x))ds \qquad (3.4.1)$$

$(t,x)\in D,$с заданными условиями Коши (3.4.2)- (3.4.3), где $\alpha,\ \beta\in R_+$, $f(t,x,u)$, $K(t,x,s.u)$ - заданные непрерывные функции; $\varphi(x),\ \psi(x)$ - известные непрерывные функции. Решение начальной задачи (3.4.1)-(3.4.3) будем искать в виде

$$u(t,x)=c(t,x)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)}\frac{1}{\varepsilon^2}\sin\frac{1}{\varepsilon}(t-s)Q(s,\rho)d\rho ds \qquad (3.4.4)$$

где $c(t,x)$ - такая непрерывная функция, что имеет место $c(o,x)=\varphi(x)$, $c_t(o,x)=\psi(x)$, $Q(t,x)$ - вновь введенная функция, которую следует определить.

ТЕОРЕМА 3.4.1**.** Пусть 1) в области *D:* $c(t,x)$ - непрерывная функция, причем имеет место $c(0,x)=\varphi(x)$, $\quad c_t(0,x)=\psi(x).$

2) в соответствующих областях функции $f(t,x,u),K(t,s,x,u)$ непрерывны и ограничены

$\|f(t,x,u)\|\le M_1=const$; $\|K(t,s,x,u)\|\le M_2=const$

Кроме того, в этих областях функции $f(t,x,u),K(t,s,x,u)$ по аргументу u удовлетворяют условиям Липшица:

$$\|f(t,x,u_2)-f(t,x,u_1)\|\le L\|u_2-u_1\|,\ \|K(t,s,x,u_2)-K(t,s,x,u_1)\|\le L_1\|u_2-u_1\|,$$

3) $\dfrac{L+L_1T}{\alpha\beta}\le\dfrac{1}{2}$.

Тогда в области D сингулярно-возмущенное нелинейное ИДУВ (3.4.1) с данными Коши (3.4.2)-(3.4.3) имеет ограниченное решение.

В 3.5. рассмотрено ИДУВ четвертого порядка вида

$$\frac{\partial^2 L[u]}{\partial x^2}+2\alpha\frac{\partial L[u]}{\partial x}+(\alpha^2+1)L[u]=f\left(t,x,u,u_t,u_x\right)+\int_0^t K\left(t,s,u\left(s,x\right)\right)ds, \qquad (3.5.1)$$

где $L[u]=u_{tt}+2pu_t+(p^2+1)u, t\in\left[0,T\right],\ x\in R,\ \alpha, p\in R_+$ с начальными данными

$u(0,x)=\varphi\left(x\right),\ u_t(0,x)=\psi(x)$. (3.5.2) - (3.5.3)

Решение задачи Коши (3.5.1)-(3.5.3) ищем в виде

$$u\left(t,x\right)=c\left(t,x\right)+ +\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)}\sin(x-s)\sin(t-\nu)Q\left(\nu,s\right)dsd\nu \qquad (3.5.4)$$

ТЕОРЕМА 3.5.1. Пусть $f(t,x,u,u_t,u_x)\in\bar{C}\left([0,T]\times R\times R\times R\times R\right)\cap Lip\left(L_1\big|_u\right)$,
$K(t,s,x,u)\in\bar{C}\left((0\le s\le t\le T)\times R\times R\right)\cap Lip\left(L_2\big|_u\right),\varphi(x)\in\bar{C}^2\left(R\right),\psi(x)\in\bar{C}^2\left(R\right)$
Тогда существует $T_0>0$, такое, что начальная задача (3.5.1)-(3.5.2) будет иметь решение $u(t,x)\in\bar{C}^{(2,2)}\left([0,T_0]\times R\right)$, которое имеет интегральное представление в виде (3.5.4). Кроме того все частные производные, содержащие в уравнение (3.5.1), равномерно ограничены.

В 3.6. рассмотрено интегральное уравнение Вольтерра (ИУВ) второго рода

$$u(t)=\int_0^t K(t,s)u(s)ds+f\left(t\right), \qquad (3.6.1)$$

где $K(t,s)$ – квадратная матричная функция; а $f\left(t\right)$ – вектор-функция, определенные и непрерывные соответственно в областях ($-\infty<$ s, t $<\infty$), ($-\infty<t<\infty$), причем $K(t+\omega,s+\omega)=K(t,s),\quad f\left(t+\omega\right)=f\left(t\right)$, (3.6.2)

В силу непериодичности оператора Вольтерра, возникает проблема выделения такого класса ИУВ, для которых существуют периодические решения.

Доказана

ТЕОРЕМА 3.6.1. Наряду с *u(t)* будет решением ИУВ (3.6.1), (3.6.2) и функция *u(t+ω)* в том, и только в том случае, когда для *u(t)* выполняется тождество

$$\int_0^\omega K(t+\omega,s)u(s)ds=0 \qquad (3.6.4)$$

Пример 3.6.1. Для ИУВ второго рода

$$u(t)+\int_0^t \sin s\, u(s)ds = \cos t + 2\sin^2 t \qquad (3.6.10)$$

выполнены все условия (3.6.2), где $\omega = 2\pi$. Уравнение (3.6.10) имеет решение $u(t)=\cos t$, период которого $\omega = 2\pi$. Условие (3.6.4) в данном случае запишется в виде $\int_0^{2\pi} \cos s \sin s ds = 0$, и оно выполнено (ортогональность функций $\sin t, \quad \cos t$ *на* $[0,2\pi]$).

Пример 3.6.2. Для ИУВ первого рода

$$\int_0^t (t-s)u(s)ds = t - \sin t \qquad (3.6.11)$$

также выполнены условия (3.6.2), где $\omega = 2\pi$. Уравнение (3.6.11) имеет решение $u(t)=\sin t,$, период которого $\omega = 2\pi$. Проверено выполнение условия (3.6.4):

$$\int_0^{2\pi} (t-s)\cos ds = -(t-s)\sin s\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin s\, ds = \cos s\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Далее, рассмотрено векторно-матричное нелинейное ИУВ с периодическими коэффициентами

$$u(t)=\int_0^t K(t,s)u(s)ds + F(t,u), t\in(-\infty,\infty), \qquad (3.6.12)$$

где $K(t,s)$ - непрерывная $n\times n$-матричная функция, n-мерная вектор функция $F(t,u)$ определена и непрерывна в области $-\infty \le t \le \infty, \|u\| \le R,$ причём

$$K(t+\omega, s+\omega) = K(t,s), F(t+\omega,u) = F(t,u) \qquad (3.6.13)$$

Пусть $u = u_\omega(t), t\in[0,\omega]$ - решение периодической краевой задачи $u(0)=u(\omega)$ для интегрального уравнения (3.6.12), (3.6.13). Обозначим $u=\tilde{u}_\omega(t)$ - периодическое продолжение $u_\omega(t)$ на всю ось. Доказано, что эта функция будет решением интегрального уравнения (3.6.12), (3.6.13) тогда и только тогда, когда. $\int_0^\omega K(t+\omega,s)u(s)ds = 0$

В 3.7 рассмотрен вопрос о влиянии полюса свободного члена и ядра на решение интегрального уравнения Вольтерра (ИУВ).

Сначала рассмотрено линейное ИУВ первого рода

$$\int_0^t K(t,s)u(s)ds = f(t), t\in[0,T], \qquad (3.7.1)$$

ТЕОРЕМА 3.7.1. Пусть 1) в области $l=\{0\le s\le t\le T\}$ функция $K(t,s)$ непрерывна и имеет непрерывную производную по t.

2) $K(0,0)\neq 0$, и функция $f(t)$ имеет в начале координат особенность типа полюс порядка q, т.е. $f(t)=f_1(t)/t^q$, $f_1(t)\neq 0$. Тогда интегральное уравнение (3.7.1) имеет обобщенное решение вида $u(t)=2\delta(t)+x(t)$,где $\delta(t)$ - дельта-функция типа Дирака, α некоторая постоянная, а $x(t)$ определяется из уравнения вида $t^q x(t)+\int\limits_0^t N(t,s)x(s)ds=F(t)-N(t,0)F(0)/N(0,0)$,

Пример 3.7.1. Рассмотрим ИУВ

$$u(t)=-\int\limits_0^t \frac{\left(t^2-6s^2\right)}{s^3}u(s)ds$$

Обозначим $u(t)/t^3=v(t)$, имеем

$$t^3v(t)=-\int\limits_0^t\left(t^2-6s^2\right)v(s)ds \tag{3.7.12}$$

Уравнение (3.7.12) имеет двухпараметрическое семейство решений $v(t)=c_1t+c_2$, или $u(t)=c_1t^4+c_2t^3$, где c_1,c_2 - произвольные постоянные.

В 3.8 рассмотрена линейная система вида

$$t^q u(t)=\int_0^t K(t,s)u(s)ds, \tag{3.8.1}$$

$q>1-$ натуральное число, где $K(t,s)-n\times n$-матричная функция, которая является голоморфной в окрестности точки $t=s=0$. Пусть λ_j —собственные значения $K(0,0)$, $j=1..n$. Рассмотрен ранее не изученный случай, когда $\lambda_j, j=1..n$ принимают кратные значения и $Re\,\lambda_j>0$. Под областью S понимаем открытый сектор в комплексной плоскости t с вершиной в начале координат. Под решением данной системы понимается голоморфная в области S и удовлетворяющая (3.8.1) в S $n\times 1$ —матричная функция $u(t)$. Продифференцировав по t (3.8.1), получим интегро-дифференциальное уравнение вида

$$t^q \acute{u}_t(t)=A(t)u(t)+\int_0^t \acute{K}_t(t,s)u(s)ds, \tag{3.8.2}$$

где $A(t)=K(t,t)-qt^{q-1}I, I-$ единичная матрица,

$$A(t)\sim\sum_{j=0}^{\infty}A_jt^j\,, t\to 0, t\in S. \tag{3.8.3}$$

Предполагается, что собственные значения главной матрицы A_0 распадаются на две группы $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ и $\lambda_{p+1},\dots,\lambda_n$ так, что $\lambda_j\neq\lambda_k, j\le p, k>p$. Из линейной алгебры известно, что если собственные значения главной матрицы $A(t)$ подразделяется на две группы $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ и $\lambda_{p+1},\dots,\lambda_n$ так, что $\lambda_j\neq\lambda_k, j\le p, k>p,$ то матрица $A(t)$ подобна блочно-диагональной матрице

$diag\big(A^{11}(t), A^{22}(t)\big)$, где $A^{jj}(t) \sim \sum_{i=0}^{\infty} A_i^{jj} t^i, t \to 0$, причем главная матрица A_0^{11} имеет собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_{p,}$ а A_0^{22} –собственные значения $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$. На основании этого факта следует, что нахождение асимптотического решения (3.8.2) при $t \to 0$ сводится к решению уравнений такого же типа для двух блоков $A^{11}(t)$ и $A^{22}(t)$ более низкого порядка. Повторяя эту редукцию, можно в конце концов получить некоторое число уравнений типа (3.8.2), в которых все собственные значения A_0^{jj}одинаковы, т.е. получим конечную последовательность уравнений типа (3.8.2), в каждом из которых главная матрица A_0^{jj} имеет только одно собственные значение соответствующей кратности.

Предположим, что (3.8.2) является результатом такой редукции, и можно считать, что имеет место (3.8.3), и главная матрица A_0^{jj} имеет только одинаковые собственные значения. Тогда, не теряя общности, можно считать главную матрицу нильпотентной, т.е. ее единственное собственное значение соответствующей краткости считать нулевым. Действительно, если λ_{rj} является единственным собственным значением A_0^{jj}, тогда преобразование типа: $u(t) = zexp\frac{t^{-q+1}}{-q+1}\lambda_{rj}, j = \overline{1,r}, \sum_{j=1}^{r} r_j = n$, переводит (3.8.2) в уравнение вида

$$t^q \acute{z}_t e^{\lambda r_j \frac{t^{-q+1}}{-q+1}} = \big(A^{jj}(t) - \lambda_{rj} I_{rj}\big) z e^{\lambda_{rj}\frac{t^{-q+1}}{-q+1}} + \int_0^t \frac{\partial K^{jj}(t,s)}{\partial t} z(s) e^{\lambda_{r_j}\frac{s^{-q+1}}{-q+1}} ds,$$

где главный член матрицы $A(t) - \lambda_{rj} I_{rj}$, есть $A_0^{jj} - \lambda_{rj} I_{rj}$, т.е. нильпотентная матрица. Уравнение (3.8.2) преобразуется к виду

$$t^q \acute{Z}_t = B(t)Z + \int_0^t b^*(t,s) Z(s) e^{\lambda_{rj}\frac{s^{-q+1} - t^{-q+1}}{-q+1}} ds, \tag{3.8.4}$$

где $B(t) = B_1(t) \oplus \dots \oplus B_2(t)$, $b^*(t,s) = b_1^*(t,s) \oplus \dots \oplus b_2^*(t,s)$,

$$B_j(t) = S_j^{-1}(t) K^{jj}(t,t) S_j(t) - [t^q S_j(t)]'_t, b_j^*(t,s) = S_j^{-1}(t) \frac{\partial K^{jj}(t,s)}{\partial t} S_j(s).$$

$$S_j(t) = diag(1, t^{g_j}, t^{2g_j}, \dots, t^{(n-1)g_j}, j = \overline{1,r}.$$

Тогда уравнение (3.8.4) примет вид:

$$t^{q-g_{j0}} \acute{Z}_t = t^{-g_{j0}} B(t) Z + t^{-g_{j0}} \int_0^t b^*(t,s)\, Z(s) e^{\lambda_{rj}\frac{s^{-q+1} - t^{-q+1}}{-q+1}} ds. \tag{3.8.5}$$

Обозначим $h_j = q - g_{j0}$, тогда h_j может принимать как целые, так и рациональные значения. Сформулируем полученные для системы (3.8.1) в случае кратных собственных значений главной матрицы $K(0,0)$. Все преобразования, которые должны, в конечном счете привести к асимптотическому решению

(3.8.1) и применяются к системам более низкого порядка, можно представить как одну замену переменных в виде $u(t) = S(t)Zexp\frac{t^{-q+1}}{-q+1}\lambda_{rj}$,

Сформулируем полученное для системы (3.8.1) в случае кратных собственных значений главной матрицы $K(0{,}0)$. Все преобразования, которые должны, в конечном счете привести к асимптотическому решению (3.8.1) и применяются к системам более низкого порядка, можно представить как одну замену переменных в виде $u(t) = S(t)Zexp\frac{t^{-q+1}}{-q+1}\lambda_{rj}$, Тогда получим фундаментальное матричное решение уравнения (3.8.1) на случай кратных собственных значений в виде $u(t) = \hat{u}(t)e^{\tilde{A}(t)} \cdot C$, где $\hat{u}(t) -$ обладает асимптотическим разложением по степеням $\tilde{A}(t) -$ диагональная матрица, где диагональные элементы имеют разложение по степеням $t^{-1/P}, c -$ произвольный вектор столбец.

ТЕОРЕМА 3.8.1. Пусть $K(0{,}0)$ имеет кратные собственные значения λ_{rj} и выполняется условие $Re\lambda_{rj} > 0, j = 1..r$. Тогда уравнение (3.8.1) в каждом достаточно узком подсекторе $S^* \in S$ (сектор с вершиной в начале координат, содержащий вещественную полуось) имеет матричное решение вида $u(t) = \hat{u}(t)e^{\hat{A}(t)}$, где $\tilde{A}(t)$ −диагональная матрица, диагональные элементы которой являются диагональными матрицами порядка $r_j, j = \overline{1,r}, \sum_{j=1}^{r} r_j = n,$ с диагональными элементами, имеющими разложение относительно p −положительное целое, $\hat{u}(t)$ обладает асимптотическим свойством разложения по степеням $t^{1/P}$.

ВЫВОДЫ

1. Найдены достаточные условия разрешимости задачи Коши и построены структуры решений новых классов ДУ в ЧП и ИДУ в ЧП.
2. Найдены условия существования решений начальной задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с параметром.
3. Найдены достаточные условия существования периодических решений краевой задачи для квазилинейных интегральных уравнений Вольтерра.
4. Определены существенные влияния полюса свободного члена и особенностей ядра на решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра.
5. Найдена асимптотическая структура решений системы интегральных уравнений Вольтерра с особенностью.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н., профессору Байзакову Асан Байзаковичу за постановку проблемы исследования и постоянное внимание к работе.

Основное содержание диссертации полностью отражено в следующих публикациях:

1. **Джээнбаева Г.А.** О влиянии полюса свободного члена и особенностей ядра на решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра [Текст] / А.Б.Байзаков, Г.А.Джээнбаева, С.А. Керимбаева // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. – Бишкек, 2006. −Вып. №1. −Сер.№5. −С. 28-31.
2. **Джээнбаева Г.А.** О разрешимости начальной задачи сингулярно-возмущенной интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка [Текст] / А.Б. Байзаков, Г.А. Джээнбаева // Международная научно-практическая конференция «Информационные технологии: инновации в науке и образовании» Актюбинский региональный государственный университет им. К.Жубанова. −Актюбинск, 2015. –С.131-135.
3. **Джээнбаева Г.А.** О разрешимости начальной задачи интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка [Текст] / А.Б.Байзаков, Г.А.Джээнбаева // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2016. –Вып.№6. –С. 8-11.
4. **Джээнбаева Г.А.** Разрешимость и структура решений начальной задачи интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка [Текст] / А.Б.Байзаков, Г.А.Джээнбаева // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2017. – Вып.№5, –С.100-104.
5. **Джээнбаева Г.А.** О периодических решениях краевой задачи для квазилинейных интегральных уравнений Вольтерра [Текст] / Г.А.Джээнбаева // Международный научно-исследовательский журнал. 2018. –№8(74), –С.15-21. DOI: https//doi.org/10.23670/IRJ.2018.74.8.002. (РИНЦ РФ).
6. **Джээнбаева Г.А.** О разрешимости задачи Коши для систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с параметром [Текст] / Г.А.Джээнбаева // Международный научно-исследовательский журнал. – Екатеринбург, 2018. –№ 9 (75), часть I. – С.17-24. DOI:https//doi.org/10.23670/IRJ.2018.75.9.003. (РИНЦ РФ).
7. **Джээнбаева Г.А.** О асимптотической структуре решений системы интегральных уравнений Вольтерра с особенностью [Текст] / А.Б.Байзаков, Г.А.Джээнбаева // Известия ВУЗов Кыргызстана. – Бишкек, 2019. – Вып.№9. –С.3-8.
8. **Джээнбаева Г.А.** О разрешимости задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высшего порядка [Текст] / А.Б.Байзаков, Г.А.Джээнбаева // Вестник ИМ НАН КР. – Бишкек, 2019. –С.123-128.
9. **Джээнбаева Г.А.** О начальной задаче интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка [Текст] / Г.А.Джээнбаева // Известия ВУЗов Кыргызстана. – Бишкек, 2019. –Вып.№9. –С.9-14.
10. **Джээнбаева Г.А.** О разрешимости начальной задачи интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка

[Текст] / А.Б.Байзаков, Г.А.Джээнбаева // Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике: НАН КР. –Бишкек, 2013. –С.33.

11. **Джээнбаева Г.А.** Разрешимость задачи Коши систем интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [Текст] / А.Б.Байзаков, Г.А.Джээнбаева, М.М.Шаршенбеков // Международная науч. конф. «Актуальные проблемы математики и информатики. – Алматы, 2015. – С.31.
12. **Джээнбаева Г.А.** Условия существования периодических решений краевой задачи для квазилинейных интегральных уравнений Вольтерра [Текст] / А.Б.Байзаков, Г.А.Джээнбаева // Тезисы докладов Международная научная конференция «II Борубаевские чтения». – Бишкек, 2018. –С.39.
13. **Dzheenbaeva G.A.** On the solvability of the Cauchy problem for integro-differential equations in partial derivatives of the fourth order. [Text] / A.B.Baizakov, G.A.Dzheenbaeva, K.A. Aitbaev // Тезисы докладов Международной научной конференции "III Борубаевские чтения". – Бишкек, 2019. – С.40.

Джээнбаева Гулгаакы Абдыкааровнанын 01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистик боюнча физика-математикалык илимдердин кандидаты окумуштуулук даражасын алуу үчүн сунушталган **«Интегралдык жана жекече туундулуу интегро-дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштарынын асимптотикалык жана аналитикалык касиеттери»** аттуу диссертациялык ишинин

РЕЗЮМЕСИ

Негизги сөздөр: интегралдык теңдеме, өзгөчө чекит, мезгилдүү чыгарылыш, жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме, жекече туундулуу интегро-дифференциалдык теңдеме, бащтапкы маселе.

Изилдөөнүн объектиси: дифференциалдык жана интегралдык тендемелердин чыгарымдуулугу жана чыгарылыштарынын түзүлүшү, дифференциалдык жана интегралдык тендемелердин чыгарылыштарынын касиеттери, Вольтерра интегралдык теңдемелеринин мезгилдүү чыгарылыштары. Өзгөчө чекити бар Вольтерра интегралдык теңдемелеринин системасынын чыгарылыштары.

Иштин максаттары: жекече туундулуу дифференциалдык (интегро-дифференциалдык) теңдемелери үчүн баштапкы маселенин чыгарымдуулу-гунун жетиштүү шарттарын аныктоо жана чыгарылыштарынын түзүлүшүн табуу; параметрлүү жекече туундулуу интегро-дифференциалдык теңдемелер үчүн баштапкы маселенин чыгарылыштарынын жашоо шарттарын табуу; квази сызыктуу Вольтерра интегралдык теңдемелеринин чектик маселесинин мезгилдүү чыгарылыштарынын жашашынын шарттарын табуу; Вольтерра интегралдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелеринин чыгарылышта-рына бош мүчөнүн жана ядронун өзгөчөлүктөрүнүн таасирин аныктоо; өзгөчөлүктөрү бар Вольтерра интегралдык теңдемелеринин системасынын чыгарылыштарынын асимптотикалык түзүлүшүн табуу.

Изилдөөнүн ыкмалары: чыгарылыштарды өзгөртүп түзүү усулу, дифференциалдык теңдемелердин аналитикалык жана асимптотикалык теориясынын жана функционалдык анализдин ыкмалары колдонулган.

Илимий жыйынтыктар: жекече туундулуу дифференциалдык (интегро-дифференциалдык) теңдемелери үчүн баштапкы маселенин чыгарымдуу-лугунун жетиштүү шарттары аныкталды жана чыгарылыштарынын түзүлүшү табылды; параметрлүү жекече туундулуу интегро-дифференциалдык тендеме-лер үчүн баштапкы маселенин чыгарылыштарынын жашоо щарттары аныкталды; квази сызыктуу Вольтерра интегралдык теңдемелеринин чектик маселесинин мезгилдүү чыгарылыштарынын жашашынын шарттары табылды; Вольтерра интегралдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелеринин чыгарылыштарына бош мүчөнүн жана ядронун өзгөчөлүктөрүнүн таасири маанилүү экени аныкталды; өзгөчөлүктөрү бар Вольтерра интегралдык теңдемелеринин системасынын чыгарылыштарынын асимптотикалык түзүлүшүн тургузулду.

РЕЗЮМЕ

диссертации **Джээнбаевой Гулгаакы Абдыкааровны** «**Асимптотические и аналитические свойства решений интегральных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных**» представлена на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Ключевые слова: интегральное уравнение, особая точка, периодическое решение, дифференциальное уравнение в частных производных, интегро-дифференциальное уравнение в частных производных, начальная задача.

Объект исследования: разрешимость и структура решений дифференциальных и интегральных уравнений, аналитические и асимптотические свойства решений дифференциальных и интегральных уравнений, периодические решения краевой задачи квазилинейных интегральных уравнений Вольтерра, асимптотическая структура решений системы интегральных уравнений Вольтерра особенностью.

Цели работы: выявить достаточные условия разрешимости задачи Коши и построить структуры решений новых классов ДУ в ЧП и ИДУ в ЧП. Найти условия существования решений начальной задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с параметром. Определить влияния полюса свободного члена и особенностей ядра на решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра.

Методика исследования: Использованы методы преобразования решений дифференциальных и интегральных уравнений, методы аналитической и асимптотической теории дифференциальных уравнений и функционального анализа.

Научная новизна: Найдены достаточные условия разрешимости задачи Коши и построены структуры решений новых классов ДУ в ЧП и ИДУ в ЧП.
Найдены условия существования решений начальной задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с параметром.
Найдены достаточные условия существования периодических решений краевой задачи квазилинейных интегральных уравнений Вольтерра. Определены существенные влияния полюса свободного члена и особенностей ядра на решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра. Найдена асимптотическая структура решений системы интегральных уравнений Вольтерра с особенностью.

SUMMARY

Dzheenbaeva Gulgaaki Abdykaarovna

The dissertation "**Asymptotic and analytical properties of solutions of integral and integro-differential partial differential equations**" is presented for the degree of candidate of physical and mathematical sciences in 01.01.02 specialty - differential equations, dynamical systems and optimal control.

Keywords: integral equation, singular point, periodic solution, partial differential equation, partial differential integro-differential equation, initial value problem.

Object of study: solvability and structure of solutions of differential and integral equations, analytical and asymptotic properties of solutions of differential and integral equations, periodic solutions of the boundary value problem of quasilinear Volterra integral equations, asymptotic structure of solutions of a system of Volterra integral equations by a singularity.

Objectives: Find sufficient conditions for the solvability of the Cauchy problem and construct structures of solutions of new classes of partial differential equations and partial integro-differential equations. Find conditions for existence of solutions to the initial value problem for partial integro-differential equations with the parameter. Determine the influence of the pole of the free term and the features of the nucleus on the solutions of Volterra integral and integro-differential equations. Find asymptotic structure of the solutions of the system of Volterra integral equations with singularity is.

Research technique: methods of transforming solutions of differential and integral equations, methods of the analytical and asymptotic theory of differential equations and functional analysis.

Scientific novelty: Sufficient conditions for the solvability of the Cauchy problem are found and structures of solutions of new classes of integro-differential equations in partial derivatives and integro-differential equations are constructed. Conditions of the existence of solutions to the initial value problem for systems of partial differential integro-differential equations with a parameter are found. Sufficient conditions for the existence of periodic solutions of the boundary value problem of the quasilinear Volterra integral equations are found. The significant influence of the pole of the free term and the features of the nucleus on the solution of the integral and integro-differential Volterra equations are determined. The asymptotic structure of the solutions of the system of Volterra integral equations by a singularity is found.

Перечень условных обозначений и сокращений:

R^n – n-мерное вещественное евклидово пространство, а его точки $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ (по умолчанию – векторы-столбцы): $R_+ := (0;+\infty)$; $I_{t_0} = [t_0, +\infty)$, $D = I_0 \times R$;

$\|x\|$ – норма вектора $x=(x_1,\ldots x_n)$: $\|x\|_0 = \max\limits_k |x_k|$;

$\|x\|_2$ – евклидова норма вектора x: $\|x\|_2 = \sqrt{<x,x>} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$;

$\{x \in X : P(x)\}$ – или более кратко $\{x : P(x)\}$ – множество всех точек x, для которых выполнено логическое условие $P(x)$;

$C^{\alpha,\beta,\ldots}(\Omega \to \Lambda)$ – пространство функций, непрерывных вместе со своими

производными порядка α по первой переменной, β по второй переменной, …; где Ω и Λ – области в евклидовых пространствах R^n и R^k соответственно;

$\overline{C}^{\alpha,\beta,\ldots}(\Omega \to \Lambda)$ – пространство функций, ограниченных и непрерывных вместе с производными до соответствующего порядка;

M – верхняя грань класса ограниченных функций на неограниченных областях;

$Lip(L|_u, K|_v, \ldots)$ – класс функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменной u с коэффициентом L, по переменной v с коэффициентом $K, \ldots$; для функций одной переменной индекс будем опускать (коэффициенты могут быть и функциями других переменных);

Для заданных функций нескольких переменных нижний индекс будет обозначать частную производную по соответствующему аргументу: $\psi_{\xi_k}(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) = \dfrac{\partial\varphi(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)}{\partial\xi_k}$, $k=1,2,\ldots,n$;

ДУ – дифференциальное уравнение;

ИУВ – интегральное уравнение Вольтерра;

ИДУ – интегро-дифференциальное уравнение;

ИДУВ – интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра;

ДУ в ЧП – дифференциальное уравнение в частных производных;

ИДУ в ЧП – интегро-дифференциальное уравнение в частных производных;