МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им.Ж.БАЛАСАГЫНА

На правах рукописи
УДК 515.12

Чанбаева Айгуль Издибаевна

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ КОНУЛЬ ОТОБРАЖЕНИЙ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

специальность 01.01.04 – геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико – математических наук

Научный руководитель –
доктор физико-математических наук,
профессор Чекеев А.А.

Бишкек - 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы диссертации. Дж. Исбелл [41] впервые исследовал равномерные пространства категорными методами. Это категория ныне обозначается через $Unif$ (объектами ее являются равномерные пространства, а морфизмами - равномерно непрерывные отображения). З.Фроликом [34] установлены большое количество свойств и характеристик равномерных пространств в категории $Unif$. Построение проективных объектов в категории $Unif$ отражено в фундаментальной монографии А.А.Борубаева [2]. Ключевым моментом в этих построениях играют равномерно совершенные отображения смысле А.А.Борубаева, и именно эти отображения являются совершенными по подкатегории компактных пространств в категории $Unif$. Этот результат уточняет результат Э.Хейджера [36], утверждающий, что совершенными, по подкатегории компактов, отображениями являются равномерно непрерывные совершенные отображения. После определения категории $ZUnif$ (объектами являются равномерные пространства, а морфизмами - $coz-$морфизмы) З.Фроликом в 1974 году изучению этой категории посвящено малое количество работ. Хотя $ZUnif$ строго промежуточно располагается между, достаточно изученными, категориями $Unif$ и $Tych$ (тихоновских пространств и непрерывных отображений). Решение различных задач категории $ZUnif$, естественно, влечёт обобщение аналогичных задач в категории $Unif$ и усиление аналогичных задач в категории $Tych$. Особый интерес изучения и построения в теории категории $ZUnif$ возник после построения в работе [26] $\beta-$подобной компактификации равномерного пространства, где продолжаемыми отображениями оказались $coz-$морфизмы равномерных пространств, а построенная $\beta-$подобная компактификация оказалась эпирефлективной рефлексией в категории $ZUnif$. Таким образом, изучение и установление основных свойств категории $ZUnif$, в частности, изучение важнейших классов $coz-$морфизмов категории $ZUnif$, является актуальной задачей.

Связь темы диссертации с крупными научными программами, основными научно-исследовательскими работами, проведенными научными учреждениями. Диссертационная работа исполнена в рамках проекта “Об алгебраических объектах, порожденных равномерными пространствами и их приложениях в анализе структуры Вселенной” (УДК 515.12), номер госрегистрации 0007173, ИК (инвентарный номер 0005772).

Цель и задачи исследования. Установить основные свойства $coz-$ замкнутых, $coz-$совершенных, $\mathcal{R}-coz-$совершенных морфизмов категории $ZUnif$, их взаимноклассикацию с объектами категории $ZUnif$ и развить теорию $coz-$псевдокомпактных пространств.

Научная новизна полученных результатов. Впервые установлены свойства $coz-$морфизмов, $coz-$замкнутых, $coz-$совершенных и $\mathcal{R}-coz-$ совершенных морфизмов в категории $ZUnif$, впервые доказаны теоремы, указывающие взаимную классификацию объектов $ZUnif$ при заданных морфизмах и развита теория $coz-$псевдокомпактных пространств.

Практическая значимость полученных результатов. Диссертация носит теоретический характер, и её результаты могут быть использованы научными работниками, докторантами, аспирантами и магистрантами по направлению «математика» (специализация – геометрия и топология), а также при составлении новых теоретических курсов по равномерной топологии.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

- установить основные свойства различных классов $coz-$морфизмов для развития теории в категории $ZUnif$;
- доказать, что $coz-$морфизм со всюду плотного подпространства в компакт категории $ZUnif$ имеет $coz-$продолжение;
- доказать, что $coz-$морфизм со всюду плотного подпространства в реалкомпакт категории $ZUnif$ имеет $coz-$продолжение;
- доказать, что $coz-$совершенность выдерживает произведения в категории $ZUnif$;

- установить в категории $ZUnif$ категорные характеристики $coz-$совершенных и $\mathcal{R}-coz-$совершенных отображений;
- установить, что реалкомпактность в категории $ZUnif$ сохраняется в сторону прообраза $coz-$совершенными, а сторону образа - сильно $coz-$совершенными отображениями;
- доказать, что реалкомпактность в категории $ZUnif$ не сохраняется в сторону образа открытыми $coz-$совершенными отображениями;
- построить C_u^*- и C_u-вложения в категории $ZUnif$;
- получить характеристику реалкомпактности в категории $ZUnif$ при помощи надлежащих семейств $coz-$функций.
- развить теорию $coz-$псевдокомпактных пространств, а именно: установить основные свойства и характеристики $coz-$псевдокомпактных пространств.

Личный вклад соискателя. Все научные результаты диссертации получены соискателем лично и опубликованы периодических научных журналах [8 - 12, 19, 20, 22]. В работах [10 - 12, 22] постановка задачи принадлежит научному руководителю, а все полученные результаты – соискателю. В работах [19, 20] полученные результаты принадлежат соискателю, а соавторам – постановка задач и обсуждение полученных результатов. Работа [23] опубликована в электронном журнале ВАК КР и научные результаты работы принадлежат соискателю, а соавторам – постановка задач и обсуждение полученных результатов.

Апробация результатов диссертации. Все научные результаты диссертации были доложены:

- на V Всемирном Конгрессе Математиков Тюркского мира (2014),
- на Международном Иссык – Кульском Математическом Форуме (2015),
- на научном семинаре кафедры «Алгебры, геометрии и топологии» под руководством профессора Чекеева А.А (2013-2016).

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Основные научные результаты диссертации опубликованы в научных статьях [8 - 12, 19, 20, 22, 23] в научных изданиях, вошедших в Перечень рецензируемых научных изданий, утвержденные Президиумом ВАК Кыргызской Республики и строго соответствуют теме диссертации.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключений к ним, выводов и списка использованных библиографических источников из 56 наименований. Полный объем диссертации - 85 страниц.

Краткая содержание диссертации. Первая глава состоит из четырёх разделов, в которых оговаривается символика понятий, основные известные свойства замкнутых, открытых и совершенных отображений топологических пространств, перечислено ряд известных, ставших классическими, результатов о реалкомпактных пространствах и перечислены известные свойтства и характеристики $\beta-$подобной компактификации и Волмэновской реалкомпактификации равномерных пространств. В заключении первой главы сформулированы основные проблемы, которые необходимо решить в данной диссертации.

Вторая глава диссертации состоит из *четырёх* разделов. В *первом* разделе установлены основные свойства и характеристики $coz-$замкнутых отображений и построен пример, демонстрирующий, что $coz-$ непрерывность является строго промежуточным свойством между равномерной непрерывностью и непрерывностью. Во *втором* разделе решена проблема о продолжении $coz-$морфизмов со всюду плотных подпространств на компактные и реалкомпактные пространства, т.е. доказаны аналоги теорем Тайманова и Вулиха – Энгелькинга. В *третьем* разделе установлены основные свойства $coz-$совершенных отображений, в частности, категорная характеристика $coz-$совершенных отображений. В *четвертом* разделе установлены основные свойства $\mathcal{R}-coz-$совершенных отображений. Доказана категорная характеристика этих отображений.

Показано, что при $coz-$совершенных отображениях реалкомпактность в категории $ZUnif$ сохраняется сторону прообраза, а при сильно $coz-$совершенных отображениях сохраняется сторону образа. Построен пример, демонстрирующий, что при $coz-$совершенных открытых отображениях реалкомпактность в категории $ZUnif$ не сохряняется в сторону образа, т.е. в категории $ZUnif$ теорема Пономарёва – Фролика не имеет места. В конце второй главы сформулировано заключение о решенных в ней задачах.

Третья глава состоит из *трёх* разделов. В *первом* разделе доказан аналог теормы Урысона о необходимом и достаточном условии продолжения ограниченных $u-$непрерывных функций с подпространств на всё пространство. Во *втором* разделе с помощью полных систем $u-$непрерывных функций охарактеризована реалкомпактность в категории $ZUnif$. В *третьем* разделе развита теория $coz-$псевдокомпактных равномерных пространств, установлены их основные свойства и характеристики. В конце третьей главы сформулировано заключение о решенных в ней задачах.

Диссертационная работа завершается выводами о научных результатах, полученных в диссертации.

ГЛАВА 1

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

1.0 Символика понятий

$\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел.

$\mathbb{Z}$ - множество целых чисел.

$\mathbb{R}$ - множество вещественных чисел, $\mathbb{R}^+ = [0;+\infty)$.

$I = [0,1]$ - единичный отрезок.

Если α - семейство множеств, то $\cup\alpha = \bigcup\limits_{A\in\alpha} A$.

Если $\alpha = \{U_s\}_{s\in S}$ - индексированное семейство множеств, то $\cup\alpha = \bigcup\limits_{s\in S} U_s$.

Семейство α - покрытие множества X, если $\cup\alpha = X$ и, если $\alpha = \{U_s\}_{s\in S}$, то $\cup\alpha = \bigcup\limits_{s\in S} U_s = X$.

Для семейств множеств α и β символ $\alpha \wedge \beta$ обозначает семейство $\{A \cap B : A \in \alpha, B \in \beta\}$, т.е. $\alpha \wedge \beta = \{A \cap B : A \in \alpha, B \in \beta\}$.

Если $\beta = \{X\}$, то $\alpha \wedge X = \{A \cap X : A \in \alpha\}$.

Для семейства α $St(B,\alpha) = \{A \in \alpha : A \cap B \neq \varnothing\}$ называется *звёздой* B относительно α и $\alpha(B) = \cup St(\beta,\alpha)$. Если $B = \{x\}$, то пишут просто $\alpha(x) = \cup St(x,\alpha) = \cup\{A \in \alpha : x \in A\}$.

Если для любого элемента $B \in \beta$ покрытия β найдется элемент $A \in \alpha$ покрытия α такой, что $B \subset A$, то покрытие β *вписано* в покрытие α и пишется $\beta \succ \alpha$.

Если покрытие $\{\beta(B) : B \in \beta\}$ вписано в покрытие α, то говорят, что покрытие β *сильно звёздно вписано* в покрытие α и пишется $\beta^* \succ \alpha$.

Если покрытие $\{\beta(x) : x \in X\}$ вписано в покрытие α, то говорят, что покрытие *звёздно вписано* в покрытие α и пишется $\beta^{\vartriangle} \succ \alpha$

Для отображения $f : X \to Y$ через $f|_A : A \to Y$ обозначается *сужение* f на подмножество $A \subset X$.

Если X - топологическое пространство и $Y \subset X$, то $[Y]_X$ - *замыкание* пространства Y в X.

$\prod_{s\in S} X_s$ - *Декартово произведение* семейства $\{X_s\}_{s\in S}$.

$\prod_{s\in S} f_s$ - Декартово произведение семейства отображений $\{f_s : X_s \to Y_s\}_{s\in X}$, сопоставляющее $(x_s : s\in S)\in \prod_{s\in S} X_s$ точку $(f_s(x_s) : s\in S)\in \prod_{s\in S} Y_s$.

$\underset{s\in S}{\Delta} f_s$ - *диагональное произведение или диагональ* семейства отображений $\{f_s : X \to Y_s\}_{s\in S}$, сопоставляющее каждой точке $x\in X$, точку $(f_s(x) : s\in S)\in \prod_{s\in S} Y_s$.

Если uX равномерное пространство и $Y \subset X$, то $u|_Y$ - сужение равномерности u на Y.

coz – отображение означает конуль отображение.

$\mathbb{R}^{\mathscr{F}}$ - Декартово произведение $\mathbb{R}$ $\mathscr{F}$ - раз, если $|\mathscr{F}| = \mathfrak{m}$, то $\mathbb{R}^{\mathscr{F}} = \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$.

□ – завершение доказательства.

1.1. Замкнутые и открытые отображения топологических пространств

Замкнутые отображения введены Гуревичем [40] и Александровым [15], а специальные открытые отображения введены Г.Вейлем [56], Стоиловым [53], а открытые отображения топологических пространств введены Аронщайном [17] и Серпинским [51]. Ниже остановимся на основных свойствах замкнутых и открытых отображений, взятых из книг Энгелькинг [13] и Архангельский – Пономарёв [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.1. Непрерывное отображения $f: X \to Y$ называется *замкнутым (открытым) отображением*, если для каждого замкнутого (открытого) множества $A \subset X$ образ $f(A)$ замкнут (открыт) в Y.

ТЕОРЕМА 1.1.2. *Отображение $f: X \to Y$ замкнуто (открыто) тогда и только тогда, когда для каждого $B \subset X$ и каждого открытого (замкнутого) множества $A \subset X$, содержащего $f^{-1}(B)$ существует открытое (замкнутое) множество $C \subset Y$, содержащее B и такое, что $f^{-1}(C) \subset A$.*

ТЕОРЕМА 1.1.3. *Отображение $f: X \to Y$ замкнуто в том и только том случае, когда для каждой точки $y \in Y$ и каждого открытого множества $V \subset X$, содержащего $f^{-1}(y)$, в Y существует такая окрестность V точки y, что $f^{-1}(V) \subset U$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1.4. *Если композиция $g \circ f$ непрерывных отображений $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ является замкнутым (открытым) отображением, то сужение $g|_{f(X)}: f(X) \to Z$ замкнуто (открыто).*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1.5. Если $f: X \to Y$ - *замкнутое (открытое) отображение, то для каждого $L \subset Y$ сужение $f|_{f^{-1}(L)}: f^{-1}(L) \to L$ замкнуто (открыто).*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1.6. *Пусть произведение $f = \prod_{s\in S} f_s : \prod_{s\in S} X_s \to \prod_{s\in S} Y_s$, где $X_s \neq \varnothing, s \in S$, замкнуто, то все отображения $f_s : X_s \to Y_s$ замкнуты.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1.7. *Пусть* $f_i : X \to Y_i$ $(i = 1, 2, ,.., n)$ *замкнуты и* Y - T_1- *пространство, а* $Y_2, Y_3, ..., Y_n$ *суть* T_3-*пространства; тогда диагональ* $f = \underset{i=1}{\overset{n}{\Delta}} f_i$ *замкнута.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1.8. *Если диагональ* $f = \prod_{s \in S} f_s : X \to \prod_{s \in S} Y_s$ *семейства отображений* $\{f_s : X$ *и* $Y_s\}_{s \in S}$ *является открытым отображением, то* f_s *открыт.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1.9. *Пусть* $f : X \to Y$ *непрерывное отображение. Тогда график* $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ *отображения* f *как подпространства* $X \times Y$ *гомеоморфно* X *и, если* Y *хаусдорфово, то* Γ_f *замкнуто в* $X \times Y$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1.10. *Отображение* $f : X \to Y$ *хаусдорфова пространства* X *в хаусдорфово пространство* Y *является замкнутым, если и только, если замкнутыми являются проекции* $\pi'_X : \Gamma_f \to X$ *и* $\pi'_Y : \Gamma_f \to Y$, *где* $\pi'_X = \pi_X |_{\Gamma_f}$ *и* $\pi'_Y = \pi_Y |_{\Gamma_f}$.

1.2. Совершенные отображения топологических пространств

Совершенные отображения в классе метрических пространств введены Вайнштейном [4]. В классе локально компактных хаусдорфовых пространств совершенные отображения исследованы Лере [44] и Бурбаки [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.1. Непрерывное отображение $f: X \to Y$ называется *совершенным*, если X - хаусдорфово пространство, f - замкнутое отображение и все прообразы $f^{-1}(y)$ являются компактами в X .

ТЕОРЕМА 1.2.2. *Если* X *компакт, а* Y *- хаусдофово пространсвто, что проекция* $\pi: X \times Y \to Y$ *является совершенным отображением.*

ТЕОРЕМА 1.2.3. *Если* $f: X \to Y$ *- совершенное отображение, то для каждого компактного подпространства* $Z \subset Y$ *его прообраз* $f^{-1}(Z)$ *является компактом.*

СЛЕДСТВИЕ 1.2.4. *Композиция совершенных отображений является совершенным отображением.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2.5. *Если* $f: X \to Y$ *- совершенное отображение, то для каждого замкнутого* $A \subset X$ *и любого* $B \subset X$ *сужения* $f|_A: A \to Y$ *и* $f|_{f^{-1}(B)}: f^{-1}(B) \to B$ *являются совершенными отображениями.*

ТЕОРЕМА 1.2.6. *Декартово произведение* $f = \prod_{s \in S} f_s : \prod_{s \in S} X_s \to \prod_{s \in S} Y_s$, *где* $f_s : X_s \to Y_s$, $X_s \neq \varnothing$ *при* $s \in S$, *является совершенным отображением в том и только том случае, когда совершенны все отображения* f_s.

ТЕОРЕМА 1.2.7. *Диоганальное произведение любого семейства совершенных отображений является совершенным отображением.*

ТЕОРЕМА 1.2.8. *Пусть дано семейство* $\{f_s : X \to Y_s\}_{s \in S}$ *непрерывных отображений* f_s. *Если существует* $s_0 \in S$, *такое, что* f_{s_0} *совершенно и* Y_s *- хаусдорфово пространство при всех* $s \in S \setminus \{s_0\}$, *то диоганальное произведение* $\Delta_{s \in S} f_s$ *является совершенным.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2.9. *Если композиция* $g \circ f$ *непрерывных отображений* $f : X \to Y$ *и* $g : Y \to Z$ *является совершенным отображением и* Y *- хаусдорфово пространство, то отображения* $g|_{f(X)}$ *и* f также *совершенны.*

ТЕОРЕМА 1.2.10. *Для произвольного непрерывного отображения* $f : X \to Y$, *где* X *и* Y *- тихоновские пространства, следующие условия равносильны:*

(i) *Отображение* f *совершенно.*

(ii) *Продолжение* $\beta f : \beta X \to \beta Y$ *отображения* f *на Стоун – Чеховские компактификации* βX *и* βY *удовлетворяет условию* $\beta f(\beta X \setminus X) \subseteq \beta Y \setminus Y$.

ТЕОРЕМА 1.2.11. *Пусть* βX *и* βY *- Стоун – Чеховские компактификации* X *и* Y *и* $\tilde{f} : \beta X \to \beta Y$ *- такое непрерывное отображение, что* $\tilde{f}(X) = Y$. *Тогда сужение* $f = \tilde{f}|_X$, $f : X \to Y$ *отображения* $\tilde{f}$ *на* X *совершенно в том и только том случае, если* $X = \tilde{f}^{-1}(Y)$ *или, что равносильно* $\tilde{f}(\beta X \setminus X) \subset \beta Y \setminus Y$.

ТЕОРЕМА 1.2.12. *Пусть* $f : X \to Y$ *- совершенное сюрьективное отображение,* X *и* Y *- тихоновские пространства и* βX *- Стоун – Чеховская компактификация* X. *Тогда* X *гомеоморфно замкнутому подпространству* Γ_f *произведения* $\beta X \times Y$, *где* $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ *- график отображения* f.

1.3. Реалкомпактные пространства

Реалкомпактные пространства определены Хьюиттом [38]. Дальнейшее развитие теория реалкомпактных пространств получила в работах Катетова [43], Нахбина [47], Широты [50], Мрувки [45], Исиватой [41] и др. В данном разделе информация взята из книг Энгелькинг [13] и Гиллман – Джерисон [35].

ТЕОРЕМА 1.3.1. *Тихоновское пространства реалкомпактного в том и только том случае, если оно гомеоморфно замкнутому подпространству произведения некоторого множества копий вещественной прямой.*

ТЕОРЕМА 1.3.2. *Тихоновское пространства X реалкомпактного в том и только том случае, каждый счётноцентрированный функцинально замкнутый ультрафильтр из $\mathcal{Z}(X)$ иммет непустое пересечение.*

ТЕОРЕМА 1.3.3. *Если $f : X \to Y$ - сюрьективное совершенное отображение на реалкомпактное пространство Y, то X также реалкомпактно.*

Следующая теорема доказана Пономарёвым [6] и Фроликом [32].

ТЕОРЕМА 1.3.4. *Если $f : X \to Y$ - сюрьективное открытое совершенное отображение реалкомпактного пространства X на Y, то Y реалкомпактно.*

ТЕОРЕМА 1.3.5. *Для тихоновского пространства X существует ровно одно (с точностью до гомеоморфизма) реалкомпактное пространство υX, обладающие следующими свойствами:*

(i) *Существует гомеоморфное вложение $\upsilon : X \to \upsilon X$, для которого $[\upsilon(X)] = \upsilon X$.*

(ii) *Какова бы ни была непрерывная вещественная функция $f : X \to \mathbb{R}$, найдется непрерывная функция $\upsilon f : \upsilon X \to \mathbb{R}$, такая, что $\upsilon f \circ \upsilon = f$. Пространство υX удовлетворяет тоже условию:*

(iii) *Для каждого непрерывного отображения $f : X \to Y$ в реалкомпактное пространство Y найдется непрерывное отображение $\hat{f} : \upsilon X \to Y$, такое, что $\hat{f} \circ \upsilon = f$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.6. Тихоновское пространство X называется *реалкомпактным*, если $X = \upsilon X$.

ТЕОРЕМА 1.3.7. *Пусть* $f : X \to Y$ *- такое сюръективное отображение, что образ любого функционально замкнутого множества в* X *функционально замкнут* Y *и* $f^{-1}(y)$ *относительно псевдокомпактно для любой точки* $y \in Y$. *Тогда из реалкомпактности* X *следует реалкомпактность* Y.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.8. Подпространства P тихоновского пространства X называется *относительно псевдокомпактным,* если для любой последовательности $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ функционально замкнутых в X множеств такой, что последовательность $\{P \cap Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ центрирована, то $P \cap \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} Z_n \neq \varnothing$.

1.4. $\beta-$ подобные компактификации и Волмэновские реалкомпактификации равномерных пространств

Для равномерных пространств будем придерживаться обозначений из книги Исбелл [41]. Многие свойства и факты в разделе взяты из книг Исбелла [41] и Борубаева [2]. Ниже приводится информация о равномерно замкнутых и равномерно открытых множествах из статей Хараламбуса [24, 25]. Компактификации Волмэновского типа по нормальным базам взяты из статьи Фринк [31] и книги Аартса [14] и книги Ало - Шапиро [16]. $\beta-$подобные компактификации и Волмэновские реалкомпактификации взяты из статьей Мрувки [45] и Штайнер – Штайнер [52]. $\beta-$подобные компактификации и Волмэновские реалкомпактификации равномерных пространств и их свойства взяты из статьей Чекеева [26, 27, 28]. Сделаем краткую выборку из этих библиографических источников.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.1. Пусть X - тихоновское пространство. Система u покрытий X называется *равномерностью* на X, если выполнены следующие свойства:

1^0. Если $\alpha,\beta\in u$, то существует $\gamma\in u$ такое, что γ вписано $\alpha\wedge\beta$;

2^0. Если $\alpha\in u$ и α вписано в покрытие β, то $\beta\in u$;

3^0. Для любого $\alpha\in u$ существует $\beta\in u$, сильно звёздное вписаное в α;

4^0. $\cap\{\alpha(x):\alpha\in u\}=\{x\}$ для любой точки $x\in X$.

Равномерное пространство обозначается, как uX и каждое покрытие $\alpha\in u$ называется *равномерным покрытием*. Система $\mathcal{B}\subset u$ равномерных покрытий называется *базой равномерности* u, если выполнены свойства 1^0, 3^0, 4^0 определения 1.4.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.2. Отображение $f:uX\to vY$ называется *равномерно непрерывным*, если для $\alpha\in V$ существует $\beta\in u$ такое, что $f(\beta)$ вписано в α.

Если отображение $f:uX\to vY$ биективно, равномерно непрерывно и обратное отображение $f^{-1}:uX\to vY$ равномерно непрерывно, то f называется *равномерным гомеоморфизмом*, а равномерные пространства uX и vY - *равномерно гомеоморфными*.

Если равномерное пространство uX имеет базу, состоящую из счётных равномерных покрытий, то uX $\aleph_0$ - *ограниченное* равномерное пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.3. Пусть uX - равномерное пространство. Подмножество $F \subset X$ называется *равномерно замкнутым*, если существуют метрическое пространство (X, ρ) и равномерно непрерывное отображение $f : uX \to v_\rho Y$, где v_ρ - метрическая равномерность метрического пространства (Y, ρ), и такое замкнутое множество $N \subset Y$, что $F = f^{-1}(N)$. Дополнение равномерно замкнутого множества называется *равномерно открытым*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4.4. *Подмножество* $F \subset X$ *равномерно замкнуто, если и только, если существует равномерно непрерывная функция* $f : uX \to \mathbb{R}$ *такая, что* $F = f^{-1}(0)$ *и подмножество* $U \subset X$ *равномерно открыто, если существует равномерно непрерывная функция* $g : uX \to \mathbb{R}$ *такая, что* $U = \{x \in X : g(x) \neq 0\} = X \setminus g^{-1}(0)$.

На основании предложения 1.4.4. Хараламбус [24, 25] называл равномерно замкнутые множества в uX $u-$*замкнутыми*, а равномерно открытые множества в uX $u-$*открытыми* множествами.

Обозначим через $U(uX)$ $(U^*(uX))$ - множество всех (ограниченных) равномерно непрерывных функций на uX. Тогда $\mathcal{Z}_u = \{f^{-1}(0) : f \in U(uX)\} = \{g^{-1}(0) : g \in U^*(uX)\}$ - множество всех $u-$замкнутых множеств, а $C\mathcal{Z}_u = \{X \setminus Z : \mathcal{Z} \in \mathcal{Z}_u\}$ - множество всех $u-$открытых множеств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4.5. *Множество* $\mathcal{Z}_u (C\mathcal{Z}_u)$ *замкнуто относительно конечных (счётных) объединений и счётных (конечных) пересечений.*

СЛЕДСТВИЕ 1.4.6. *Семейство* $\mathcal{Z}_u$ *образует нормальную базу, а семейство* $C\mathcal{Z}_u$ *- базу открытых множеств топологии равномерного пространства* uX.

ТЕОРЕМА 1.4.7. *Волмэновская компактификация* $\omega(X,\mathcal{Z}_u)$ *равномерного пространства* uX *единственна, с точностью до гомеоморфизма, оставляющего точки* X *неподвижными, и обладает следующими равносильными свойствами:*

(I) $\omega(X,\mathcal{Z}_u)$ *есть пополнение* X *относительно равномерности* u_p^z, *база которой все конечные* $u-$*открытые покрытия.*

(II) Всякая функция $f:uX\to I$, *такая, что* $f^{-1}(U)\in C\mathcal{Z}_u$ *для любого открытого* $U\subset I$, *продолжается до непрерывного отображения* $\omega(f):\omega(X,\mathcal{Z}_u)\to I$.

(III) Для любых $Z_1,Z_2\in\mathcal{Z}_u$ *таких, что* $Z_1\cap Z_2=\varnothing$ *их замыкание* $[Z_i]$, $(i=1,2)$ $\omega(X,\mathcal{Z}_u)$ *не пересекаются, т.е.* $[Z_1]\cap[Z_2]=\varnothing$.

(IV) Для любых $Z_1,Z_2\in\mathcal{Z}_u$, $[Z_1\cap Z_2]=[Z_1]\cap[Z_2]$, *где замыкание берется в компакте* $\omega(X,\mathcal{Z}_u)$.

(V) Всякая точка компакта $\omega(X,\mathcal{Z}_u)$ *есть предел единственного* z_u-*ультрафильтра на* uX, *где* z_u-*ультрафильтр - это максимальная центрированная система из* $u-$*замкнутых множеств.*

Мрувкой [46] введены $\beta-$подобные компактификации. Для некоторой компактификации cX тихоновского пространства X через $F(X)$ обозначим множество всех непрерывных функций на X, которое непрерывно продолжаются на cX и $\mathcal{F}=\{f^{-1}(0):f\in F(x)\}$ - нормальная база. Тогда для Волмэновской компактификации $\omega(X,\mathcal{F})$, вообще говоря, $\omega(X,\mathcal{F})\geq cX$ и, если $\omega(X,\mathcal{F})=cX$, то cX называется $\beta-$подобной компактификацией.

Оказалось, что Волмэновская компактификация $\omega(X,\mathcal{Z}_u)$ обладает свойством Мрувки [46], т.е. является $\beta-$подобной компактификацией и множество всех функций, которые непрерывно продолжаются с равномерного пространства uX на $\omega(X,\mathcal{Z}_u)$. Это $C_u(X)$ - *множество всех* $u-$*непрерывных функций на* uX (функция $f:uX\to\mathbb{R}$ называется $u-$*непрерывной*, если

$f^{-1}(U) \in C\mathcal{Z}_u$ для любого открытого множества $U \subset \mathbb{R}$). Через $C_u^*(X)$ обозначается *множество всех ограниченных* $u-$*непрерывных функций на* uX .

Волмэновская компактификация $\omega(X, \mathcal{Z}_u)$ обозначается как $\beta_u X$.

СЛЕДСТВИЕ 1.4.8. *Всякое отображение* $f : uX \to vY$ *такое, что* $f^{-1}(\mathcal{Z}_v) \subseteq \mathcal{Z}_v$, *продолжается до непрерывного отображения* $\beta_u f : \beta_u X \to \beta_v Y$.

Отметим, что $\mathcal{Z}_u$ является специальной нормальной базой, в смысле, Штайнер – Штайнер [52].

В случае, когда $\mathcal{Z}_u$ - нормальная база в смысле [52], то часть $\beta_u X = \omega(X, \mathcal{Z}_u)$, состоящая из счётноцентрированных ультрафильтров, называется Волмэновской реалкомпактификацией и обозначается как $\upsilon_u X = \upsilon(X, \mathcal{Z}_u)$. Относительно Волмэновской топологии $\upsilon_u X$ является подпространством компакта $\beta_u X$.

ТЕОРЕМА 1.4.9. *Волмэновская реалкомпактификация* $\upsilon_u X = \upsilon(X, \mathcal{Z}_u)$ *равномерного пространства* uX *единственна, с точностью до конуль – гомеоморфизма, оставляющего точки* X *неподвижными, и обладает следующими равносильными свойствами:*

(I) $\upsilon_u X$ *есть пополнение* X *относительно равномерности* u_c^z, *слабой относительно семейства функций* $C_u(X)$.

(II) Всякая функция из $C_u(X)$ *продолжается до равномерно непрерывной функции на* $\upsilon_u X$.

(III) Для любой последовательности $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{Z}_u$ *такой, что* $\bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n = \varnothing$ *следует, что* $\bigcap_{n=1}^{\infty} [Z_n] = \varnothing$, *где* $[Z_n]$ *замыкание* Z_n *в* $\upsilon_u X$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$.

(IV) Для любой последовательности $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{Z}_u$, *выполнено равенство* $[\bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n] = \cap [\bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n]$, *где замыкания взяты в* $\upsilon_u X$.

(V) $\upsilon_u X$ *есть пополнение* X *относительно равномерности* u_ω^z, *базой которой служат все счётные* $u-$*открытые покрытия на* uX .

(VI) Всякая точка $\upsilon_u X$ есть предел единственного счётноцентрированного z_u – ультрафильтра.

СЛЕДСТВИЕ 1.4.10. *Всякое отображение $f : uX \to vY$ такое, что $f^{-1}(\mathcal{Z}_v) \subseteq \mathcal{Z}_u$, продолжается до равномерно непрерывного отображения $\upsilon_u f : \upsilon_u X \to \upsilon_v Y$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.11. Равномерное пространство uX называется z_u – *полным*, если в нем сходится всякий z_u – ультрафильтр.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.12. Равномерное пространство uX называется $\mathbb{R} - z_u$ – *полным*, если в нем сходится всякий счётноцентрированный z_u – ультрафильтр.

ТЕОРЕМА 1.4.13. *Равномерное пространство uX $\mathbb{R} - z_u$ – полно тогда и только тогда, когда $X = \upsilon_u X$.*

С основными понятиями теории категорий можно ознакомится в [41].

Через $ZUnif$ обозначим категорию, объектами которой являются равномерные пространства, а морфизмы – это конуль – морфизмы (coz – морфизмы). Согласно Фролику [33, 34], отображение $f : uX \to vY$ - coz – морфизм, если $f^{-1}(\mathcal{Z}_v) \subset \mathcal{Z}_u$ или $f^{-1}(C\mathcal{Z}_v) \subset C\mathcal{Z}_u$.

Рассмотрим в категории $ZUnif$ следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} uX & \xrightarrow{g} & u_1X_1 \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_1} \\ vY & \xrightarrow{g_1} & v_1Y_1 \end{array} \qquad (*)$$

Диаграмма $(*)$ называется *Декартовым квадратом* в категории $ZUnif$, если: $(*)$ – коммутативна и для всякой пары coz – морфизмов $\varphi : wZ \to vY$ и $\psi : wZ \to u_1X_1$ такой, что $g_1 \circ f = f_1 \circ \psi$ существует единственный морфизм $h : wZ \to uX$, удовлетворящий условиям $\varphi = f \circ h$ и $\psi = g \circ h$.

Изоморфизмами категории $ZUnif$ является coz – *гомеоморфизмы*, где отображение $f : uX \to vY$ называется coz – *гомеоморфизмом*, если f - биективный coz – морфизм и обратное отображение $f^{-1} : uX \to vY$ также coz –

морфизм, при этом равномерные пространства uX и vY называют coz – *гомеоморфными*.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В главе 1 приведены известные результаты в категориях $Unif$ (равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений) и $Tych$ (тихоновских пространств и непрерывных отображений). Следовательно, возникают актуальные задачи, требующие своего решения в категории $ZUnif$. А именно:

- установить основные свойства различных классов $coz-$морфизмов для развития теории категории $ZUnif$;
- доказать, что $coz-$морфизм со всюду плотного подпространства в компакт категории $ZUnif$ имеет $coz-$продолжение;
- доказать, что $coz-$морфизм со всюду плотного подпространства в реалкомпакт категории $ZUnif$ имеет $coz-$продолжение;
- доказать, что $coz-$совершенность выдерживает произведения в $ZUnif$;
- установить в $ZUnif$ категорные характеристики $coz-$совершенных и $\mathbb{R}-coz-$совершенных отображений;
- установить, что реалкомпактность в $ZUnif$ сохраняется в сторону прообраза $coz-$совершенными, а сторону образа сильно $coz-$совершенными отображениями;
- доказать, что реалкомпактность в $ZUnif$ не сохраняется в сторону образа открытыми $coz-$совершенными отображениями;
- построить C_u^*- и C_u-вложения в $ZUnif$;
- получить характеристику реалкомпактности в $ZUnif$ при помощи надлежащих семейств $coz-$функций.
- развить теорию $coz-$псевдокомпактных пространств, а именно установить основные свойства и характеристики $coz-$псевдокомпактных пространств.

ГЛАВА 2

КЛАССЫ КОНУЛЬ МОРФИЗМОВ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

2.1. Конуль замкнутые отображения равномерных пространств

Следующее определение введено З. Фроликом [33, 34].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.1. Отображение $f: uX \to vY$ называется *конуль-морфизмом*, или $coz-$*морфизмом,* если $f^{-1}(C\mathcal{Z}_v) \subseteq C\mathcal{Z}_u$ или $f^{-1}(\mathcal{Z}_v) \subseteq \mathcal{Z}_u$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.2. Всякое равномерное непрерывное отображение является $coz-$морфизмом [24, 25], и всякий $coz-$морфизм, очевидно, является непрерывным отображением.

Обратное, вообще говоря, неверно. Это демонстрирует следующий пример.

ПРИМЕР 2.1.3. Пусть (X, ρ) - сепарабельное метрическое пространство несчетной мощности. Метрическая равномерность u_ρ имеет базу, состоящую из покрытий вида $\alpha_\varepsilon = \{O_\varepsilon(x): x \in X\}$, где $O_\varepsilon(x) = \{y \in X: \rho(x, y) < \varepsilon\}$ - открытый шар радиуса $< \varepsilon$. Через ообозначим $\mathcal{P}(X)$ - множество всех конечных подмножеств X. Для произвольных $\varepsilon > 0$ и $A \in \mathcal{P}(X)$ положим

$$\alpha_{\varepsilon,A} = \{O_\varepsilon(x) \setminus A: x \in X\} \cup \{\{a\}: a \in A\}.$$

Ясно, что $\alpha_{\varepsilon,A}$ является покрытием X.

Для семейства $\mathcal{B} = \{\alpha_{\varepsilon,A}: \varepsilon \in [0, +\infty), A \in \mathcal{P}(X)\}$ выполнены следующие свойства:

1°. Для покрытий $\alpha_{\varepsilon_1,A_1}, \alpha_{\varepsilon_2,A_2} \in \mathcal{B}$ покрытие $\alpha_{\varepsilon_1,A_1} \wedge \alpha_{\varepsilon_2,A_2}$ вписано в покрытие $\alpha_{\varepsilon,A_1 \cup A_2}$, где $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$;

2°. Покрытие $\alpha_{\delta,A}$ звездно вписано в покрытие $\alpha_{\varepsilon,A}$, где $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\xi}$.

Таким образом, семейство $\mathcal{B}$ образует базу некоторой равномерности u на X. По определению равномерность u индуцирует на X дискретную топологию. В силу сепарабельности (X, ρ), существует счетное плотное подпространство Y, которое не является u - замкнутым множеством в uX.

Предположим противное. Пусть $f: uX \to \mathbb{R}$ - такая равномерно непрерывная функция, что $f^{-1}(0) = Y$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $\varepsilon_n > 0$ и $A_n \in \mathcal{P}(X)$ такие, что $f(\alpha_{\varepsilon_n, A_n})$ вписано в покрытие $\alpha_{1/n}$, т.е. для любых пар (x, y) таких, что $\rho(x, y) < \varepsilon_n$ выполнено $|f(x) - f(y)| < 1/n$. Пусть $x \notin A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Так как Y плотно в X, то существует такое $y \in Y \setminus A$, что $\rho(x, y) < \varepsilon_n$. Тогда $|f(x)| < 1/n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, т.е. $f(x) = 0$. В силу произвольности $x \in X \setminus A$ имеем $X \setminus A = f^{-1}(0)$, т.е. $X = A \cup Y$ - противоречие, т.е. $A \cup Y$ - счетное множество, X несчетно.

Функция $h: uX \to \mathbb{R}$, определенная как $h(x) = 0$, если $x \in Y$ и $h(x) = 1$, если $x \in X \setminus Y$ является непрерывной, но не является $coz-$морфизмом относительно равномерности u на X и равномерности $u_{\mathbb{R}}$ на $\mathbb{R}$. Так как $h^{-1}(0) = Y \notin \mathcal{Z}_u$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.4. Отображение $f: uX \to vY$ называется $coz-$ *замкнутым*, если оно является $coz-$морфизмом и для любого замкнутого множества N в X образ $f(N)$ замкнут в Y.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.5. $Coz-$замкнутое отображение - аналог замкнутых отображений топологических пространств, введенных Гуревичем [40] и Александровым [15].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.6. Отображение $f: uX \to vY$ называется $coz - z_u$ *замкнутым*, если оно является $coz-$морфизмом и для любого $u-$замкнутого множества Z в uX образ $f(Z)$ замкнут в Y.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.7. $Coz - z_u -$замкнутое отображение аналог $z-$замкнутых отображений, впервые введённых Тамано [54], как z замкнутые проекции, а затем З.Фроликом [32].

Очевидно, что всякое $coz-$замкнутое отображение $coz - z_u$ замкнуто. Имеет место следующее простое предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.8. *Каждое* $coz-$*замкнутое отображение* $f: uX \to vY$ *является* $coz - z_u$ *замкнутым.*

Следующее утверждение является критерием $coz-z_u$ замкнутых отображений, аналогичным критерию замкнутости отображений топологических пространств.

ТЕОРЕМА 2.1.9. *Отображение* $f:uX\to vY$ *является* $coz-z_u$ *−замкнутым тогда и только тогда, когда для любой точки* $y\in Y$ *и любого* $u-$*открытого множества* $U\in C\mathcal{Z}_u$*, содержащего прообраз* $f^{-1}(y)$*, т.е.* $f^{-1}(y)\subset U$*, существует такая открытая окрестность* V *точки* y*, что* $f^{-1}(V)\subset U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть $f:uX\to vY$ - $coz-z_u$ замкнутое отображение, $y\in Y$ - произвольная точка и $U\in C\mathcal{Z}_u$ - произвольное $u-$открытое множество, содержащее прообраз $f^{-1}(y)$, т.е. $f^{-1}(y)\subset U$. Тогда $X\setminus U$ $u-$замкнуто, т.е. $X\setminus U\in\mathcal{Z}_u$ и $f(X\setminus U)$ замкнуто в Y. Множество $V=Y\setminus f(X\setminus U)$ - открытая окрестность точки y, т.е. $y\in V$. Тогда $f^{-1}(V)=f^{-1}(Y\setminus f(X/U))=X\setminus f^{-1}(f(X\setminus U))\subset X\setminus(X\setminus U)=U$, т.е. $f^{-1}(V)\subset U$.

Достаточность. Пусть $N\in\mathcal{Z}_u$ - произвольное $u-$замкнутое множество. Множество $U=X\setminus N\in C\mathcal{Z}_u$ $u-$открыто и для любого $y\in Y\setminus f(N)$ имеем $f^{-1}(y)\subset X\setminus f^{-1}(f(N))\subset X\setminus N=U$. Тогда найдется открытая окрестность V_y точки y такая, что $f^{-1}(V_y)\subset U$. Положим $V=\bigcup\{V_y: y\in Y\setminus f(N)\}$. Тогда V открыто в Y, $Y\setminus f(N)\subset V$ и $f^{-1}(V)\subset U$, т.е. $f^{-1}(V)\cap N=\varnothing$. Следовательно, $V\cap f(N)=\varnothing$, т.е. $V\subset Y\setminus f(N)$. Итак, $f(N)=Y\setminus V$, т.е. $f(N)$ замкнуто в Y. □

Естественно возникает вопрос об условиях, влекущих из $coz-z_u$ замкнутости $coz-$замкнутость.

ТЕОРЕМА 2.1.10. *Пусть* $f:uX\to vY$ - $coz-z_u$ *−замкнутое отображение и* $f^{-1}(y)$ *является Линделёфовым для каждой точки* $y\in Y$*. Тогда отображение* f $coz-$*замкнуто.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y\in Y$ - произвольная точка и U - произвольное открытое множество, содержащее Линделёфово пространство $f^{-1}(y)$, т.е. $f^{-1}(y)\subset U$. Так как семейство $C\mathcal{Z}_u$ - база топологии равномерного пространства uX [24, 25], то для каждой точки $x \in f^{-1}(y)$ существует $u-$ открытое множество $V_x \in C\mathcal{Z}_u$ такое, что $x \in V_x \subset U$. Семейство $\alpha = \{V_x : x \in f^{-1}(y)\}$ является открытым покрытием $f^{-1}(y)$. В силу Линделефовости $f^{-1}(y)$ из α можно выделить счетное подпокрытие $\alpha' = \{V_{x_n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \alpha$. Так как V_{x_n} $u-$ открыто для всех $n \in \mathbb{N}$, то $V' = \cup\alpha'$ также $u-$открыто и $f^{-1}(y) \subset V' \subset U$. В силу $coz - z_u -$замкнутости f, по теореме 1.9. найдется открытая окрестность V точки y такая, что $f^{-1}(V) \subset V' \subset U$. Тогда из критерия замкнутости отображений [13, Теорема 1.4.13], следует, что f $coz -$замкнуто. □

СЛЕДСТВИЕ 2.1.11. *Пусть* $f : uX \to vY$ - $coz -$*морфизм и* $f^{-1}(y)$ *компактно для любой точки* $y \in Y$. *Тогда следующие условия равносильны:*

(1) $f : uX \to vY$ *является* $coz - z_u -$*замкнутым.*

(2) $f : uX \to vY$ *является* $coz -$*замкнутым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1)$\Rightarrow$(2). Непосредственно следует из Теоремы 2.1.10.

(2)$\Rightarrow$(1). Следует из Предложения 2.1.8. □

Отметим следующее свойство $coz -$морфизмов, $coz -$замкнутых и $coz - z_u -$замкнутых отображений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.12. *Композиция* $g \circ f : uX \to wZ$ $coz -$*морфизмов* $f : uX \to vY$ *и* $g : vY \to wZ$ *является* $coz -$*морфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно следует из Определения 2.1.1., т.е. $(g \circ f)^{-1}(\mathcal{Z}_w) = f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{Z}_w)) \subseteq f^{-1}(\mathcal{Z}_v) \subseteq \mathcal{Z}_u$. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.13. *Композиция* $g \circ f : uX \to wZ$ *по* $coz -$*замкнутым отображениям* $f : uX \to vY$ *и* $g : vY \to wZ$, *является* $coz -$*замкнутым отображением. Обратно, если композиция* $g \circ f$ *является* $coz -$*замкнутым отображением, тогда отображение* $g|_{f(X)} : v'f(x) \to wZ$, *где* $v' = v|_{f(X)}$, *является* $coz -$*замкнутым отображением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть предложения очевидна.

Любое замкнутое подпространство $f(X)$ имеет вид $F \cap f(X)$, где F замкнуто в Y. Отображение f - $coz-$морфизм, следовательно, оно непрерывно. Тогда $f^{-1}(F)$ замкнуто в X. Так как по условию, $g \circ f$ - $coz-$замкнутое отображение, то множество $g|_{f(X)}(F \cap f(x)) = g(F \cap f(x)) = (g \circ f)(f^{-1}(F))$ замкнуто в Z. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.14. *Пусть* $f: uX \to vY$ - $coz-$*морфизм и* $u'X'$ - *равномерное подпространство* uX. *Тогда* $f|_{X'}: u'X' \to v'f(X')$, $v' = v|_{f(X')}$, - $coz-$*морфизм.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F - произвольное $v'-$замкнутое в $f(X')$ множество, т.е. существует такая равномерно непрерывная функция $g: v'f(X') \to I$, что $F = g^{-1}(0)$. По теореме Катетова [43], существует такая ограниченная равномерно непрерывная функция $h: vY \to I$, что $h|_{f(X')} = g$. Тогда функция $h \circ f: uX \to I$ - $coz-$морфизм и $(h \circ f)|_{X'} = g \circ f|_{X'}$. Следовательно, $(g \circ f|_{X'})^{-1}(0) = (h \circ f)^{-1}|_{X'} = f^{-1}(h^{-1}(0)) \cap X' = f^{-1}(g^{-1}(0))$ и $f^{-1}|_{X'}(F)$ $u'-$замкнутое множество. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.15. *Пусть* $f: uX \to vY$ - $coz-z_u-$*замкнутое* ($coz-$*замкнутое*) *отображение и* $v'Y'$ - *подпространство* vY, *где* $v' = v|_{Y'}$. *Тогда отображение* $f|_{f^{-1}(Y')}; u'f^{-1}(Y') \to v'Y'$, *где* $u' = u|_{f^{-1}(Y')}$, *является* $coz-z_u-$*замкнутым* ($coz-$*замкнутым*) *отображением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из равенства $f|_{f^{-1}(Y')}(N \cap f^{-1}(Y')) = f(N) \cap Y'$ для любого $u-$замкнутого (замкнутого) множества N из X. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.16. *Пусть* $f: uX \to vY$ - $coz-$*замкнутое отображение и* $u'X'$ - *замкнутое подпространства* uX, *где* $u' = u|_{X'}$. *Тогда отображение* $f|_{X^{-1}}; u'X' \to v'f(X')$, *где* $v' = v|_{f(X')}$, - $coz-$*замкнутое отображение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно □

ТЕОРЕМА 2.1.17. *Пусть* $f:uX\to vY$ *и* $g:vY\to wZ$ *- сюрьективные* $coz-$*морфизмы и* f $coz-$*замкнуто. Тогда диагональное произведение* $f\vartriangle g:uX\to v\times w\ Y\times Z$*, где* $v\times w$ *- произведение равномерностей* v *и* w*, является* $coz-$*замкнутым отображением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению диагонального произведения $(f\vartriangle g)(x)=(f(x),g(x))$, $x\in X$. Пусть $i_x:uX\to uX$ и $i_x:wZ\to wZ$ - тождественные равномерные гомеоморфизмы. Положим $f\times i_z:u\times w\ X\times Z\to v\times w Y\times Z$, $i_X\vartriangle g:uX\to u\times w\ X\times Z$, где $(f\times i_z)(x,z)=(f(x),Z)$ и $(i_X\vartriangle g)(x)=(x,g(x))$ для всех $x\in X$ и $z\in Z$. Если $F\subset X$ и $M\subset Z$ - замкнутые множества, тогда $f(F)\times M$ - замкнутое подмножество $Y\times Z$ и $(f\times i_z)(F\times M)=f(F)\times M$ и $f\times i_z$ $coz-$замкнутое отображение. Отображение $i_X\vartriangle g:uX\to u\times w\ X\times Z$ является равномерным гомеоморфизмом uX на график $\Gamma_g=\{(x,g(x)):x\in X\}$ отображения g с равномерностью $u\times w|_{\Gamma_g}$. Отметим, что Γ_g - замкнутое подпространство $X\times Z$. Отображение $f\vartriangle g$ является композицией отображений $i_x\vartriangle g$ и $f\times i_z|_{\Gamma_g}$ Отображения $f\times i_Z|_{\Gamma_g}$ является $coz-$замкнутым как сужение отображения $f\times i_z$ на замкнутое подпространство Γ_g. Тогда в силу Предложения 2.1.13, отображение $f\vartriangle g=(f\times i_z)|_{\Gamma_g}\circ(i_X\vartriangle g)$ является $coz-$замкнутым отображением и имеет место диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_X\Delta g} & \Gamma_g \\ {\scriptstyle f\Delta g}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle (f\circ i_Z)|_{\Gamma_g}} \\ & Y\times Z & \end{array}$$

ТЕОРЕМА 2.1.18. *Пусть* $f:uX\to vY$ *и* $g:vY\to wZ$ *- сюрьективные* $coz-$*морфизмы. Если композиция* $g\circ f:uX\to wZ$ *является* $coz-$*замкнутым отображением, то отображение* $f:uX\to vY$ *также* $coz-$*замкнуто.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2.1.17, отображение $f\vartriangle(g\circ f):uX\to u\times w$ $X\times Z$ $coz-$замкнуто. Тогда имеем

$$(f\vartriangle(g\circ f))(X)=\{(f(x),g(f(x))):x\in X\}=\{(g,g(y)):y\in Y\}=\Gamma_g.$$

Ясно, что Γ_g как график отображения g, замкнуто в $Y \times Z$ и отображение $\pi_Y |_{\Gamma_g} : v'\Gamma_g \to vY$, где $v' = v \times w|_{\Gamma_g}$ и $\pi_Y : Y \times Z \to Y$, является равномерным гомеоморфизмом. Тогда $f = \pi_Y |_{\Gamma_g} \circ (f \triangle (g \circ f)) : uX \to vY$ - $coz-$замкнутое отображение. Имеет место следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f\triangle(g\circ f)"'] \arrow[dr, dashed] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, leftrightarrow] & Z \\ Y\times Z \arrow[r, "\pi_Y"] & Y \end{tikzcd}$$

Дальнейшее обобщение $coz - z_u -$замкнутых отображений связано с $\beta-$подобной компактификацией $\beta_u X$ равномерного пространства uX [26].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.19. Пусть $f : uX \to vY$ - $coz-$морфизм и $\beta_u f : \beta_u X \to \beta_v Y$ - продолжение f на $\beta-$подобные компактификации $\beta_u X$ и $\beta_u Y$. Отображение f называется $coz - wz_u -$*отображением*, если $\beta_u f^{-1}(y) = [f^{-1}(y)]_{\beta_u X}$ для каждой точки $y \in Y$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.20. *Всякое* $coz - z_u -$*замкнутое отображение* $f : uX \to vY$ *является* $coz - wz_u -$*отображением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует точка $z \in \beta_u f^{-1}(y) \setminus [f^{-1}(y)]_{\beta_u X}$. Тогда существует такая непрерывная функция $\varphi : \beta_u X \to I$, что $\varphi(z) = 0$ и $\varphi([f^{-1}(y)]_{\beta_u X}) = 1$. Множество $N = X \cap \{x \in \beta_u X : \varphi(x) \le 1/2\}$ $u-$замкнуто в uX, т.е. $N \in \mathcal{Z}_u$ [26]. Поскольку f является $coz - z_u -$замкнутым отображением и $N \cap f^{-1}(y) = \varnothing$, то замкнутое множество $f(N)$ не содержит точку y. С другой стороны $\varphi(z) = 0$, следовательно, $z \in [N]_{\beta_u X}$. Это означает, что

$$y = \beta_u f(z) \in \beta_u f([N]_{\beta_u X}) \subset [\beta_u f(N)]_{\beta_u X} = [f(N)]_{\beta_u X}.$$

Поскольку $f(N)$ замкнуто в Y, то $[\beta_u f(N)]_{\beta_u X} \cap Y = f(N)$. Следовательно, $y \in Y$ влечет $y \in f(N)$ - противоречие. □

Следующая теорема показывает условие, влекущее $coz-$замкнутость $coz - wz_u -$отображений.

СЛЕДСТВИЕ 2.1.21. Всякое $coz-$замкнутое отображение $f:uX\to vY$ является $coz-wz_u$ - отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из предложения 2.1.8 □

ТЕОРЕМА 2.1.22. *Пусть* $f:uX\to vY$ - $coz-wz_u-$*отображение и граница* $Fr(f^{-1}(y))$ *компактна для любой точки* $y\in Y$. *Тогда* f - $coz-$*замкнутое отображение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F замкнуто в X и $y\notin f(F)$. Тогда $\varphi^{-1}(y)\cap F=\varnothing$ и граница $Fr(f^{-1}(0))$ и F равномерно отделимы, т.е. существует такая $u-$функция $f:uX\to I$, что $f(Fr(f^{-1}(y)))=\{0\}$ и $f(F)=\{1\}$ [24,25], [41]. Так как f - $coz-wz_u-$отображение, то $[f^{-1}(y)]_{\beta_u X}=\beta_u f^{-1}(y)$ и $\beta_u f(Fr(\beta_u f^{-1}(y)))=\{0\}$. Множество $N=\beta_u f(\{z\in\beta_u X:\beta_u f(z)\geq 1/2\})$ замкнуто и $Y\setminus N$ - открытое множество, содержащее точку y и $f(F)\subset N$. Это означает, что $y\notin[f(F)]_Y$, т.е. f $coz-$замкнуто □

СЛЕДСТВИЕ 2.1.23. *Пусть* $f:uX\to vY$ - *компактное отображение, т.е.* $f^{-1}(y)$ *компактно для любой точки* $y\in Y$. *Тогда следующие условия равносильны:*

(1) f *является* $coz-$*замкнутым.*

(2) f *является* $coz-z_u-$*замкнутым.*

(3) f *является* $coz-wz_u-$*отображением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1)$\Leftrightarrow$(2) следует из следствия 2.1.11.
(2)$\Leftrightarrow$(3) следует из предложения 2.1.20 и теоремы 2.1.22 □

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.24. В случае, когда $u=u_v$ - максимальная равномерность $coz-wz_{u_f}-$отображения совпадают с $wz-$отображениями, введенными Исиватой [42].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.25. *Отображение* $f:uX\to vY$ *является* $coz-wz_u$ *замкнутым, если и только, если* $f(U\cap X)=\beta_u f(U)\cap Y$ *для каждого открытого множества* U *в* $\beta_u X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Ясно, что

$$\beta_u f(U\cap X)=f(U\cap X)\subseteq \beta_u f(U)\cap Y$$

для любого открытого $U\subset \beta_u X$. Пусть $y\in \beta_u f(U\cap X)$, покажем, что $y\in f(U\cap X)$, откуда будет следовать включение $\beta_u f(U\cap X)\subseteq f(U\cap X)$. Тогда

$$f^{-1}(y)\cap (U\cap X)\neq\varnothing$$

если и только, если $\beta_u f^{-1}(y)\cap U\neq\varnothing$ для любого открытого U в $\beta_u X$, т.к. f $coz-wz_u-$замкнуто. Ясно, что $y\in f(U\cap X)$.

Достаточность. Если существует $x\in \beta_u f^{-1}(y)\setminus [f^{-1}(y)]_{\beta_u X}$, тогда существует открытое множество $U\subset \beta_u X$ такое, что $x\in U$ и $U\cap [f^{-1}(y)]_{\beta_u X}=\varnothing$. Это означает, что $y\notin f(U\cap X)$. Это противоречит тому, что $y\in \beta_u f(U)$. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.26. *Пусть произведение* $f\in\prod_{s\in S} f_s:\prod_{s\in S} u_s X_s\to \prod_{s\in S} v_s Y_s$, *где* $X_s\neq\varnothing$, $coz-z_u-$*замкнуто. Тогда все отображения* $f_s:u_s X_s\to\prod_{s\in S} v_s Y_s$ $coz-z_u-$*замкнуты.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксирует $s_0\in S$ и пусть $F\in\mathcal{Z}_{u_{s_0}}$ - $u_{s_0}-$замкнуто в $u_{s_0}X_{s_0}$. Так как естественная проекция $\pi_{s_0}:\prod_{s\in S} u_s X_s\to u_{s_0}X_{s_0}$ является равномерно непрерывным отображением, то $\pi_{s_0}^{-1}(F)$ - $\prod_{s\in S} u_s-$замкнуто в $\prod_{s\in S} X_s$, где $\prod_{s\in S} u_s$ - произведение равномерностей $\{u_s\}_{s\in S}$. Поэтому замкнут его образ при отображении $f=\prod_{s\in S} f_s$ в $\prod_{s\in S} v_s Y_s$. Так как $f(\pi_{s_0}^{-1}(F))=\prod_{s\in S} N_s$, где $N_{s_0}=f_{s_0}(F)$ и $N_s=f(X_s)$ при $s\neq s_0$, т.е. $f_{s_0}(F)$ замкнуто в Y_{s_0}. В силу произвольности следует $s_0\in S$, следует доказательство. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.27. *Отображение* $f:uX\to vY$ *является* $coz-$*замкнутым, если и только, если* $coz-$*замкнутыми являются проекции* $\pi'_X:\Gamma_f\to uX$ *и* $\pi'_Y:\Gamma_f\to vY$, *где* $\Gamma_f=\{(x,f(x)):x\in X\}$ - *график отображения* f, *в силу наделённой равномерностии* $u\times v|_{\Gamma_f}$, $\pi'_X=\pi_X|_{\Gamma_f}$, $\pi'_Y=\pi_Y|_{\Gamma_f}$ - *сужения проекций* $\pi_X:X\times Y\to X$ *и* $\pi_Y:X\times Y\to Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО является простым следствием предложения 1.1.10.□

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.28. *Если* $f: uX \to vY$ *является* $coz-$*морфизмом и проекция* $\pi'_Y : \Gamma_f \to vY$ *является* $coz - z_u -$*замкнутым отображением, что* $coz-$*морфизм* f *является* $coz - z_u -$*замкнутым отображением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $f \circ \pi'_X = \pi'_Y$. Пусть $F \in \mathcal{Z}_u$ - $u-$замкнуто в X. Так отображение $\pi'_X : \Gamma_f \to uX$ равномерно непрерывно, то $\pi'^{-1}_X(F)$ равномерно замкнуто в Γ_f. Так как $\pi'_Y : \Gamma_f \to vY$ $coz - z_u -$замкнуто, что $\pi'_Y(\pi'^{-1}_X(F))$ замкнуто в Y. По условию $f(F) = \pi'_Y(\pi'^{-1}_X(F))$, следовательно, $f(F)$ замкнуто в Y. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.29. *Пусть* $f: uX \to vY$ - $coz-$*морфизм. Тогда график* $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ *отображения* f *как равномерное подпространство произведения равномерных пространств* uX *и* vY *замкнут в этом произведении и* $coz-$*гомеоморфен* uX.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Замкнутость график Γ_f в произведении равномерных пространств uX и vY легко следует из предложения 1.1.9.

Отображение, сопоставляющее каждой точке $x \in X$ точку $(x, f(x)) \in \Gamma_f$ графика Γ_f является биективным отображением X на Γ_f, которое является топологическим гомеоморфизмом. Обозначим этот гомеоморфизм через $h: X \to \Gamma_f$. Ясно, что $h^{-1} = \pi'_X : \Gamma_f \to uX$ и является равномерно непрерывным отображением, тем более, является $coz-$морфизмом. Данное отображение является равномерно непрерывным относительно Волмэновской предкомпактной рефлексии u^z_p на X и Волмэновской предкомпактной рефлексии v^z_p на Y, т.е. отображение $f: u^z_p X \to v^z_p Y$ равномерно непрерывно и $u^z_p X$ равномерно гомеоморфно графику Γ_f как равномерному подпространству произведения предкомпактных пространств $u^z_p X$ и $v^z_p Y$, т.е. h также является $coz-$морфизмом, т.е. h - $coz-$гомеоморфизм. □

2.2. Продолжения конуль морфизмов равномерных пространств

А. Таймановым [7] [13, Теорема 3.2.1] установлены необходимое и достаточное условие, когда непрерывное отображение со всюду плотного подпространства топологического пространства в некоторый компакт непрерывно продолжается на всё пространство. Деликатность этого результата состоит в том, что на прообраз не налагаются никакие аксиомы отделимости. Аналог теоремы А.Д.Тайманова, в более слабой форме, имеет место для $coz-$ морфизмов.

ТЕОРЕМА 2.2.1. *Пусть* uX *и* vY *- такие равномерные пространства, что* X *плотно в* Y, $Z_u = \mathcal{Z}_v \wedge X$ *и* $f: uX \to K$ *-* $coz-$*морфизм в компакт* K. *Отображение* f *можно продолжить до* $coz-$*морфизма на* vY *в том и только том случае, если для каждой пары* Z_1, Z_2 *непересекающихся функционально замкнутых в* K *множеств замыкания их прообразов* $f^{-1}(Z_1)$ *и* $f^{-1}(Z_2)$ *не пересекаются пространства* vY.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{f}: uX \to K$ - $coz-$продолжение f. Если Z_1, Z_2 функционально замкнуты в K и $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$, то $\hat{f}^{-1}(Z_i) = [\hat{f}^{-1}(Z_i)]_Y$, $\hat{f}^{-1}(Z_i) \in Z_v$ при $i = 1, 2$ и $\hat{f}^{-1}(Z_1) \cap \hat{f}^{-1}(Z_2) = \varnothing$, тогда

$$[f^{-1}(Z_1)]_Y \cap [f^{-1}(Z_2)]_Y \subset \hat{f}^{-1}(Z_1) \cap \hat{f}^{-1}(Z_2) = \varnothing .$$

Таким образом, условие теоремы *необходимо* для того, чтобы f можно было $coz-$продолжить.

Покажем *достаточность* этого условия. Пусть $x \in Y$ - произвольная точка и $\mathcal{B}(x)$ семейство всех окрестностей точки x в равномерном пространстве vY. Семейство $\mathcal{F}(x) = \{[f(X \cap U)]_K\}_{U \in \mathcal{B}(x)}$ замкнутых в K множеств центрировано, так как для любого $U_1, U_2, ..., U_k \in \mathcal{B}(x)$ выполнено.

$$[f(X \cap U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_k)]_K \subset \bigcap_{i=1}^{k} [f(X \cap U_i)]_K .$$

В силу компактности K $\cap \mathcal{F}(x) = \hat{f}(x) \neq \varnothing$ для любой точки $x \in Y$. Ясно, что $\hat{f}(x) = \{f(x)\}$ для всех $x \in X$. Покажем, что $\hat{f}(x)$ состоит из одной точки. Пусть

$y_1, y_2 \in \hat{f}(x)$ и $y_1 \neq y_2$, следовательно, существует такая непрерывная функция $g: K \to I$, что $g(y_1) = 0$ $g(y_2) = 1$. Тогда $V_1 = \{x : g(x) \leq 1/3\}$ и $V_2 = \{x : g(x) \geq 2/3\}$ функционально замкнутые окрестности y_1, y_2 соответственно, и $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. По условию теоремы $f^{-1}(V_i) \in \mathcal{Z}_u$, $i = 1,2$ и

$$[f^{-1}(V_1)]_Y \cap [f^{-1}(V_2)]_Y = \varnothing .$$

Пусть $W_i = Y \setminus [f^{-1}(V_i)]_Y$, $i = 1,2$. Тогда $Y = W_1 \cup W_2$ и, если $x \in W_{i_0}$ для $i_0 = 1$ или для $i_0 = 2$. То, так как $V_{i_0} \cap f(X \setminus [f^{-1}(V_{i_0})]_K = \varnothing$ и множество, V_{i_0} открыто, выполнено $V_{i_0} \cap [f(X \setminus [f^{-1}(V_{i_0})]_K]_K = \varnothing$, откуда следует, что

$$y_{i_0} \notin [f(X \setminus [f^{-1}(V_{i_0})]_K]_K = [f(X \cap W_{i_0})]_K \in \mathcal{F}(x),$$

что является противоречием. Сопоставляя каждой точке $x \in Y$ точку $\hat{f}(x)$, мы определим отображение $\hat{f}$ равномерного пространства vY в компакт K. Покажем, что $\hat{f}$ является $coz-$морфизмом. Для этого докажем вспомогательную лемму.

ЛЕММА 2.2.2. *Пусть* uX *и* vY *- такие равномерные пространства, что* X *плотно в* Y *и* $\mathcal{Z}_u = \mathcal{Z}_v \wedge X$. *Тогда*

(i) Если $Z \in \mathcal{Z}_u$ $u-$*замкнуто и* $x \in [Z]_Y$, *тогда хотя бы один* z_u-*ультрафильтр содержит* Z *и сходится к* x, *т.е.* $\{x\} \in \cap \{Z \in \mathcal{Z}_u : x \in [Z]_Y]$

(ii) Если $Z \in \mathcal{Z}_u$ $u-$*замкнуто, тогда множество* $\overline{Z} = \{x \in Y : Z \in p_x\}$ *замкнуто в* Y, *где* p_x - z_u-*ультрафильтр на* uX, *сходящийся к* x, *и* $\overline{Z_1 \cup Z_2} = \overline{Z_1} \cup \overline{Z_2}$ (1), $\overline{Z_1 \cap Z_2} = \overline{Z_1} \cap \overline{Z_2}$ (2).

(iii) На Y *существует такая предкомпактная равномерность* v'_p, что $v'_p|_X = u^z_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *(i)* Пусть $\mathcal{F}(x)$ - z_v-фильтр на vY всех $v-$замкнутых окрестностей точки x и $\mathcal{F}' = \mathcal{F}(x) \wedge X$. Так как $x \in [Z]_Y$, то $\mathcal{F}' \cup \{Z\} \subset \mathcal{Z}_u$ центрированная система и содержится в некотором z_u-ультрафильтре p_x. Ясно, что p_x сходится к x.

(ii) Равенство $\overline{Z}=[Z]_Y$ следует из *(i)*. Включение $\overline{Z_1}\cup\overline{Z_2}\subseteq\overline{Z_1\cup Z_2}$ очевидно. Пусть $x\in\overline{Z_1\cup Z_2}$. Тогда $Z_1\cup Z_2\in p_x$. Так как p_x - простой фильтр, то $Z_1\in p_x$ или $Z_2\in p_x$, т.е. $x\in\overline{Z_1}\cup\overline{Z_2}$. Тогда $\overline{Z_1\cup Z_2}\subseteq\overline{Z_1}\cup\overline{Z_2}$. Включение $\overline{Z_1\cap Z_2}\subseteq\overline{Z_1}\cap\overline{Z_2}$ очевидно. Если $x\in\overline{Z_1}\cap\overline{Z_2}$, то $Z_1\in p_x$ и $Z_2\in p_x$, т.е. $Z_1\cap Z_2\in p_x$ и $x\in\overline{Z_1}\cap\overline{Z_2}$, т.е. $\overline{Z_1\cap Z_2}\subseteq\overline{Z_1}\cap\overline{Z_2}$.

(iii) $\mathcal{B}_p^z$ - база равномерности u_p^z, состоящая из всех конечных $u-$открытых покрытий. Пусть $\alpha=\{U_i:i=1,2,...,n\}$ - базовое равномерное покрытие. Положим $\mathrm{Ex}_Y\alpha=\{\mathrm{Ex}_YU_i:i=1,2,...,n\}$, где $\mathrm{Ex}_YU_i=Y\setminus\overline{X\setminus U_i}$. Тогда $\mathrm{Ex}_Y\alpha$ - конечное открытое покрытие Y. Легко показать, что семейство $\overline{\mathcal{B}_p^z}=\{\mathrm{Ex}_Y\alpha:\alpha\in\mathcal{B}_p^z\}$ - база некоторой предкомпактной равномерности v_p' на Y. По построению $\mathrm{Ex}_Y\alpha\wedge X=\alpha$, следовательно $v_p'|_X=u_p^z$.

Продолжение доказательства теоремы 2.2.1. Для любого функционально замкнутого множества F в компакте K для построенного отображения $\hat{f}:Y\to K$ имеем $\overline{f^{-1}(F)}=\hat{f}^{-1}(F)$, где $\overline{f^{-1}(F)}=\{x\in Y:f^{-1}(F)\in p_x\}$ и p_x - z_u-ультрафильтр на uX как в пункте *(i)* леммы 2.2.2. Тогда для любого конечного функционального открытого покрытия $\beta=\{V_i:i=1,2,...,n\}$ компакта K семейство $\hat{f}^{-1}(\beta)=\{\hat{f}^{-1}(V_i):i=1,2,...,n\}$ открытое покрытие Y. Так как $\hat{f}^{-1}(V_i)=Y\setminus\overline{f^{-1}(K\setminus V_i)}$ $(i=1,2,...,n)$, то $\hat{f}^{-1}(\beta)\in v_p'$. Следовательно, $\hat{f}:v_p'Y\to K$ - равномерно непрерывное отображение. Ясно, что $\mathcal{Z}_{v_p'}\wedge X=\mathcal{Z}_{u_p^z}=\mathcal{Z}_u$. Отметим, что $\hat{f}^{-1}(F)\in\mathcal{Z}_{v_p'}$ для каждого функционально замкнутого F в K. Очевидно, что $\hat{f}^{-1}(F)\cap X=\overline{f^{-1}(F)}\cap X=f^{-1}(F)$ и $f^{-1}(F)\in\mathcal{Z}_v\wedge X$. Тогда существует последовательность $\{Z_n:n\in\mathbb{N}\}\subset\mathcal{Z}_v$ $v-$замкнутых множеств Z_n такая, что $\operatorname{int}Z_n\neq\varnothing$ для каждого $n\in\mathbb{N}$ и $f^{-1}(F)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{Z_n\cap X\}$. Так как $\hat{f}^{-1}(F)=\overline{f^{-1}(F)}=\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty}\{Z_n\cap X\}}=\bigcap_{n=1}^{\infty}Z_n$, то $\hat{f}^{-1}(F)$ $v-$замкнуто, т.е. отображение $f:vY\to K$ *является* $coz-$морфизмом. □

СЛЕДСТВИЕ 2.2.3. *Пусть* X *- плотное подпространство тихоновского пространства* Y *и* $f: X \to K$ *- непрерывное отображение* X *в компакт* K. *Отображение* f *можно непрерывно продолжить на* Y *в том и только том случае, если для каждой пары* Z_1, Z_2 *непересекающихся функционально замкнутых в* K *множеств замыкания их прообразов* $f^{-1}(Z_1)$ *и* $f^{-1}(Z_2)$ *в пространстве* Y *не пересекаются.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Всякое непрерывное отображение Тихоновских пространств является $coz-$морфизмом относительно максимальных равномерностей на них и, в силу плотности X в Y, имеем $\beta X = \beta Y$ и следы всех функционально замкнутых множеств в Y совпадают со всеми функционально замкнутыми множествами на X, поэтому следствие 2.2.3. непосредственно вытекает из теоремы 2.2.1. □

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.4. Каждый компакт K является нормальным пространством, следовательно для любого двухнепересекающихся замкнутых множеств B_1 и B_2 в K, существует непрерывная функция $f: K \to I$ такая, что $f(B_1)=\{0\}$, $f(B_2)=\{1\}$. Тогда множества $Z_1=\{x: f(x)\le 1/3\}$ и $Z_2=\{x: f(x)\ge 2/3\}$ функционально замкнуты в K, $B_i \subset Z_i$ $(i=1,2)$ и $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$. Следовательно, следствие 2.2.3 является слабым вариантом теоремы А.Д. Тайманова.

Вулихом [5] и Энгелькингом [29] установлено необходимое и достаточное условие, когда всякое непрерывное отображение плотного подпространства в реалкомпактное пространство непрывно продолжается на всё пространство. Для $coz-$морфизмов имеет место аналог этого утверждения.

ТЕОРЕМА 2.2.5. *Пусть* uX *и* vY *- такие равномерные пространства, что* X *плотно в* Y, $Z_u = \mathcal{Z}_v \wedge X$ *и* $f: uX \to wR$ *-* $coz-$*морфизм в* $\mathbb{R}-z_w-$*полное равномерное пространство* wR. *Тогда отображение* f *можно продолжить до* $coz-$*морфизма на* vY *в том и только том случае, если для каждой дизъюнктной последовательности* $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $w-$*замкнутых в* wR *множеств* *последовательность замыканий прообразов* $\{f^{-1}(Z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *в пространстве* vY *дизъюнктна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{f}: vY \to wR$ - $coz-$продолжение f. Если $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{Z}_w$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n = \varnothing$, то имеем $\hat{f}^{-1}(Z_n) = [\hat{f}^{-1}(Z_n)]_Y$, $\hat{f}^{-1}(Z_n) \in \mathcal{Z}_w$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{f}^{-1}(Z_n) = \varnothing$, тогда

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[f^{-1}(Z_n)]_Y \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{f}^{-1}(Z_n).$$

Таким образом, условие теоремы *необходимо* для того, чтобы f можно было $coz-$продолжить.

Покажем *достаточность* этого условия. Пусть $x \in Y$ - произвольная точка. Тогда на uX существует единственный счётноцентрированный z_u- ультрафильтр p_x такой, что $\{x\} = \cap\{Z \in p_x : x \in [Z]_Y\}$. Пусть $f^{\#}\{p_x\} = \{\mathrm{E} \in Z_w : f^{-1}(\mathrm{E}) \in p_x\}$. Так как z_u-ультрафильтр p_x является простым, то $f^{\#}\{p_x\}$ является простым $w-$фильртом на wR. Следовательно существует единственный z_w-ультрафильтр q на wR, содержащий $f^{\#}\{p_x\}$. Покажем, что z_u- ультрафильтр q является счётноцентрированным.

Предположим, что это не так. Тогда существует такая последовательность $\{Q_n : n \in \mathbb{N}\} \subset q$, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n = \varnothing$. Тогда по условию теоремы имеем $\bigcap_{n=1}^{\infty}[f^{-1}(Q_n)]_Y = \varnothing$. Пусть $W_n = Y \setminus [f^{-1}(Q_n)]_Y$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда W_n открыто в Y для всех $n \in \mathbb{N}$ и семейство $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ является покрытием Y, т.е. $\bigcup_{n=1}^{\infty} W_n = Y$. Пусть $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $x \in W_{n_0}$. Тогда $x \notin [f^{-1}(Q_{n_0})]$, т.е. $f^{-1}(Q_{n_0}) \notin p_x$ и $Q_{n_0} \notin f^{\#}(p_x)$. Следовательно, существует такое $Q \in f^{\#}(p_x)$, что $Q_{n_0} \cap Q = \varnothing$. Так как, $f^{\#}(p_x) \subset q$, то $Q_{n_0} \notin q$ - противоречие. Итак, q - счётноцентрированный z_u-ультрафильтр. В силу того, что wR $\mathbb{R}-z_w-$полно, то $\{y\} = \cap q = \cap f^{\#}\{p_x\}$ для некоторой точки $y \in R$. Положим $\hat{f}(x) = y$. Тем самым определено отображение $\hat{f}: Y \to R$. Ясно, что $\hat{f}|_X = f$.

Так как $f^{-1}(F) \in \mathcal{Z}_u$ для всех $F \in \mathcal{Z}_w$, то для отображения $\hat{f}: Y \to wR$ имеет место равенство $\overline{f^{-1}(F)} = \hat{f}^{-1}(F)$ для всех $F \in \mathcal{Z}_w$ и множество $\overline{f^{-1}(F)}$ замкнуто в Y и $\overline{f^{-1}(F)} = \{x \in Y : f^{-1}(F) \in p_x\}$ (как в доказательстве теоремы 2.2.1.). Тогда для каждого $w-$открытого покрытия $\beta = \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in w_p^z$ $\mathbb{R} - z_w -$полного равномерного пространства wR семейство $\hat{f}^{-1}(\beta) = \{\hat{f}^{-1}(U_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ - открытое покрытие Y, где $\hat{f}^{-1}(U_n) = Y \setminus \overline{f^{-1}(R \setminus U_n)}$ ($n \in \mathbb{N}$).

Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 2.2.6. *Пусть uX и vY - такие равномерные пространства, что X плотно в Y, $\mathcal{Z}_u = \mathcal{Z}_v \wedge X$. Тогда на Y существует такая $\aleph_0-$ограниченная равномерность v'_ω, что $v'_\omega|_X = u_\omega^z$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha = \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{B}_\omega^z$ - базовое счётное $u-$открытое покрытие равномерности u_ω^z. Тогда $\mathrm{Ex}_Y \alpha = \{\mathrm{Ex}_Y U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ - открытое покрытие Y, где $\mathrm{Ex}_Y U_n = Y \setminus \overline{X \setminus U_n}$ (как в доказательстве теоремы 2.2.1.) для каждого $n \in \mathbb{N}$. Семейство $\overline{\mathcal{B}_\omega^z} = \{\mathrm{Ex}_Y \alpha : \alpha \in \mathcal{B}_\omega^z\}$, состоящее из счётных покрытий, образует базу некоторой равномерности v'_ω на Y и по построению $v'_\omega|_X = u_\omega^z$. □

Продолжение доказательства теоремы 2.2.5. Ясно, что $\hat{f}^{-1}(\beta) \in v'_\omega$. Тогда $\hat{f}: v'_\omega Y \to wR$ - равномерно непрерывное отображение. Ясно, что $\mathcal{Z}_{v'_\omega} \wedge X = \mathcal{Z}_{u_\omega^z} = \mathcal{Z}_u$. Отметим, что $\hat{f}^{-1}(F) \in \mathcal{Z}_{v'_\omega}$ для каждого $F \in \mathcal{Z}_v$. Очевидно, что $\hat{f}^{-1}(F) \cap X = \overline{f^{-1}(F)} \cap X = f^{-1}(F)$ и $f^{-1}(F) \in \mathcal{Z}_v \wedge X$. Тогда существует последовательность $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{Z}_v$, такая, что $\operatorname{int} Z_n \neq \varnothing$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $f^{-1}(F) \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\{Z_n \cap X\}$. Имеем

$$\hat{f}^{-1}(F) = \overline{f^{-1}(F)} = \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty}\{Z_n \cap X\}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n .$$

Таким образом, $\hat{f}^{-1}(F)$ $v-$замкнуто для любого $F \in Z_v$, т.е. $f: vY \to wR$ - $coz-$морфизм. □

СЛЕДСТВИЕ 2.2.7. *Пусть* X *- плотное подпространвтсво тихоновского пространства* Y *и* $f : X \to R$ *- непрерывное отображение в реалкомпактное пространство* R*. Отображение* f *можно непрерывно продолжить на* Y *в том и только том случае, если для каждой дизъюнктной последовательности* $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *функционально* замкнутых в R *множеств последовательность замыканий прообразов* $\{f^{-1}(Z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *в пространстве* Y *также дизъюнктна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Всякое непрерывное отображения Тихоновских пространств является $coz-$морфизмом относительно максимальных равномерностей на них и, в силу плотности X в Y, имеем $\upsilon X = \upsilon Y$ и следы всех функционально замкнутых множеств в Y совпадают со всеми функционально замкнутыми множествами на X, поэтому следствие 2.2.7. непосредственно вытекает из теоремы 2.2.6. □

2.3. Конуль совершенные отображения равномерных пространств

Из результатов предыдущего параграфа следует, что в категории $ZUnif$ естественным образом определяются морфизмы, аналогичные совершенным отображениям в категории $Tych$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3.1. Отображение $f : uX \to vY$ называется $coz-$*совершенным,* если: 1) f $coz-$замкнуто; 2) f компактно, т.е. $f^{-1}(y)$ - компакт для любой точки $y \in Y$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3.2. Всякий $coz-$морфизм является непрерывным отображением, следовательно, $coz-$совершенное отображение является топологически совершенным отображением Энгелькинг [13], Вайнштейн [4], Лере [44], Бурбаки [3].

ТЕОРЕМА 2.3.3. *Равномерное пространство uX компактно тогда и только тогда, когда каждый z_u-ультрафильтр сходится в uX.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если равномерное пространство uX компактно, то все ультрафильтры сходятся в нем [13], в частности, сходятся все z_u- ультрафильтры.

С другой стороны, пусть $\mathcal{F}$ - произвольная центрированная система замкнутых множеств в равномерном пространстве uX. Поскольку $\mathcal{Z}_u$ - база замкнутых множеств на uX, то для любого $F \in \mathcal{F}$ найдется такое семейство $\xi_F \subset \mathcal{Z}_u$, что $F = \cap \xi_F$. Семейство $\xi = \{\xi_F : F \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{Z}_u$ центрировано. Пусть p_ξ - такой z_u-ультрафильтр, что $\xi \subset p_\xi$. Тогда $\cap p_\xi = \{x\}$ для некоторой точки $x \in X$ и $\{x\} = \cap p_\xi \subset \cap \xi \subset \cap \mathcal{F}$, т.е. $\cap \mathcal{F} \neq \varnothing$. Итак, равномерное пространство uX компактно. □

Важным свойствам $coz-$совершенных отображений является следующее предложение, которое показывает, что полнота по равномерно замкнутым ультрафильтром сохраняется $coz-$совершенными отображениями в сторону прообраза.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.4. *Пусть* $f: uX \to vY$ - *сюрьективное* $coz-$ *совершенное отображение. Если равномерное пространство* vY z_v- *полно, то равномерное пространство* uX z_u- *полно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть p - произвольный z_u-ультрафильтр на uX. Тогда $f(p)=\{f(Z): Z \in p\}$ - предфильтр на Y, состоящий из замкнутых множеств. Пусть $\xi=\{K \in \mathcal{Z}_v : f^{-1}(K) \in p\}$. Тогда ξ - простой z_v-фильтр на vY [23], следовательно, существует единственный z_v-ультрафильтр q такой, что $\xi \subset q$. Так как vY z_v-полно, то $\{y\}=\cap q \subset \cap \xi$. Ясно, что $\xi \subset f(p)$. Тогда $y \in f(Z)$ для любого $Z \in p$. Это означает, что $Z \cap f^{-1}(y) \neq \varnothing$ для любого $Z \in p$. Так как $f^{-1}(y)$ компакт, то $\cap\{Z \cap f^{-1}(y): Z \in p\} \neq \varnothing$, т.е. $\cap p=\{x\}$ для некоторой точки $x \in f^{-1}(y)$ тем самым равномерное пространства uX z_u-полно. □

Известно, Франклин [30], Хагер [36] и Херлих [37] установили характеристику совершенных отображений посредством Стоун-Чеховской компактификации в категории $Tych$ - тихоновских пространств и их непрерывных отображений. Борубаев [2] установил характеристику равномерно совершенных отображений посредством Самюэлевской компактификации в категории $Unif$ - равномерных пространств и их равномерно непрерывных отображений.

В категории $ZUnif$ в терминах декартовых квадратов с помощью $\beta-$ подобной компактификации $\beta_u X$ [12], [22] равномерного пространства uX ниже охарактеризуем $coz-$совершенные отображения равномерных пространств.

ТЕОРЕМА 2.3.5. *Пусть* uX *и* vY - *равномерные пространства. Тогда для* $coz-$*отображения* $f: uX \to vY$ *следующие условия равносильны:*

(1) f *является* $coz-$*совершенным.*

(2) *Если* p - z_u-*ультрафильтр на* uX *и предфильтр* $f(p)=\{f(Z): Z \in p\}$ *сходятся к точке* $y \in Y$, *то* p *сходится к точке* $x \in f^{-1}(y)$.

(3) *Для отображения расширения* $\beta_u f:\beta_u X\to\beta_v Y$ *нарост* $\beta_u X\setminus X$ *переходит в нарост* $\beta_v Y\setminus Y$ *, т.е.* $\beta_u f(\beta_u X\setminus X)\subset\beta_v Y\setminus Y$.

(4) *Квадрат*
$$\begin{array}{ccc} uX & \xrightarrow{i_X} & \beta_u X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta_u f} \\ vY & \xrightarrow[i_Y]{} & \beta_v Y \end{array} \qquad (*)$$

является декартовым в категории $ZUnif$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $(1)\Rightarrow(2)$. Пусть отображение f $coz-$совершенно и p - такой z_u-ультрафильтр на uX , что предфильтр $f(p)$ сходится к точке $y\in Y$. Совокупность всех равномерно замкнутых множеств $Q\in\mathcal{Z}_v$, являющихся окрестностями точки y или содержащих эту точку, образует z_v-ультрафильтр q на равномерном пространстве vY . Отображение $f:uX\to vY$ является $coz-$морфизмом, значит $f^{-1}(Q)\in p$ для любого $Q\in q$. Ясно, что

$$f^{-1}(y)=\cap\{f^{-1}(Q):Q\in q\}=f^{-1}(\cap q).$$

Если z_u-ультрафильтр p сходится, то он сходится к некоторой точке $f^{-1}(y)$ прообраза. Предположим, что z_u-ультрафильтр p не сходится. Тогда для любой точки $x\in f^{-1}(y)$ найдется такое $V_x\in C\mathcal{Z}_u$ и $Z_x\in\mathcal{Z}_u$, что $x\in V_x\subset[V_i]_X\subset Z_x$ и $Z_x\notin p$ [24, 25]. Семейство $\{V_x:x\in f^{-1}(y)\}$ является открытым покрытием компакта $f^{-1}(y)$. Пусть $\{V_{x_i}:i=1,2,...,n\}$ - конечное подпокрытие. Тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{n}Z_i\notin p,$

$V=\bigcup\limits_{i=1}^{n}V_{x_i}\in C\mathcal{Z}_u$, отсюда $X\setminus V\in\mathcal{Z}_u$. Так как $X\setminus V\cup\bigcap\limits_{i=1}^{n}Z_i=X$, то $X\setminus V\in p$. Тогда $f(X\setminus V)$ замкнуто и $f(X\setminus V)\in f(p)$. Множество $Y\setminus f(X\setminus V)$ - открытая в окрестность точки y, поэтому найдется такое $Q'\in q$, что $y\in Q'\subset Y\setminus f(X\setminus V)$. Тогда $Q'\cap f(X\setminus V)=\varnothing,$ значит $f^{-1}(Q')\cap X\setminus V=\varnothing$. Противоречие. Так как $f^{-1}(Q')\in p$ и $X\setminus V\in p.$

$(2)\Rightarrow(1)$. Пусть ξ - произвольная центрированная система замкнутых множеств в $f^{-1}(y)$. В силу замкнутости $f^{-1}(y)$ в X система ξ состоит из замкнутых множеств в X . $\mathcal{Z}_u$ - база замкнутых множеств равномерного пространства uX [24, 25], следовательно, для любой $K \in \xi$ найдется $\eta_K \subset \mathcal{Z}_u$ такое, что $K = \cap\eta_K$. Семейство $\eta = \{\eta_K : K \in \xi\}$ центрировано и $\eta \subset \mathcal{Z}_u$. Пусть p - такой z_u – ультрафильтр, что $\eta \subset p$. Тогда предфильтр $f(p)$ сходится к точке y и в силу (2), p сходится к некоторой точке $x \in f^{-1}(y)$. По построению $\cap p = \{x\} \subset \cap Z \subset \xi \neq \varnothing$. Следовательно, $f^{-1}(y)$ - компакт.

Покажем замкнутость отображения f. Пусть $F \subset X$, F замкнуто в X и $y \in [f(F)]_Y$. Пусть $\eta(y) = \{Q \in \mathcal{Z}_v : Q$ - окрестность $y\}$ и

$$\eta = \eta(y) \cap [f(F)] = \{Q \wedge [f(F)] : Q \in Z(y)\}.$$

Положим $\xi = \{F \cap f^{-1}(A) : A \in \eta\}$ Ясно, что η - предфильтр на $[f(F)]_Y$, а ξ - предфильтр на F. Так как $A \subset f(F)$, то $f(F \cap f^{-1}(A)) = A$ для всех $A \in Z$. Значит $f(\xi) = \eta$. Пусть p - такой z_u – ультрафильтр на uX, что $f^{-1}(A) \in p$ для всех $A \in Z$. Тогда $f(p) \supset \eta$ и $\cap f(p) \subset \cap\eta = \{y\}$, т.е. предфильтр $f(p)$ сходится к точке y. Тогда, в силу (2), z_u-ультрафильтр p сходится к некоторой точке x из X. Так как $f^{-1}(A) \in p$, то $x \in f^{-1}(A)$ для любого $A \in Z$, т.е. $x \in f^{-1}(y)$ и $x \in [F]_X = F$. Следовательно, $y = f(x) \in f(F)$, т.е. $[f(F)]_Y \subset f(F)$ и множество $f(F)$ замкнуто.

$(2) \Rightarrow (3)$. Пусть $x \in \beta_u X \setminus X$ - произвольная точка. Тогда существует единственный z_u – ультрафильтр p на uX такой, что $\{x\} = \cap\{[Z]_{\beta_u X} : Z \in p\}$. Для отображения расширения $\beta_u f : \beta_u X \to \beta_v Y$ равенство $\beta_u f([Z]_{\beta_u X}) = [f(Z)]_{\beta_v Y}$ выполнено для любого $Z \in p$. Тогда

$$\beta_u f(x) = \cap\{[f(Z)]_{\beta_u X} : Z \in p\} = \{y\}$$

для некоторой точки $y \in \beta_v Y$. Предположим, что $y \in Y$. Тогда предфильтр $f(p) = \{f(Z) : Z \in p\}$ сходится к y и по условию теоремы z_u – ультрафильтр p сходится к некоторой точке $x' \in f^{-1}(y)$. Очевидно, что $\{x'\} = \cap\{[Z]_{\beta_u X} : Z \in p\}$, т.е. $x = x'$. Противоречие. Итак, $y = f(x) \in \beta_v Y \setminus Y$.

$(3) \Rightarrow (2)$. Пусть p - произвольный z_u – ультрафильтр на uX и предфильтр $f(p) = \{f(Z) : Z \in p\}$ сходится к точке $y \in Y$. По свойству (4) теоремы 2.4. [26]

имеем $\{x\}=\cap\{[Z]_{\beta_u X}:Z\in p\}\in\beta_u X$ и точка x единственна, тогда $\beta_u f([Z]_{\beta_u X})=[f(Z)]_{\beta_v Y}$ для любого $Z\in p$ и

$\beta_u f(x)=\beta_u f(\cap\{[Z]_{\beta_u X}:Z\in p\})=\cap\{[f(Z)]_{\beta_v Y}:Z\in p\}=y$, т.е. $x\in(\beta_u f)^{-1}(y)$.

Так как $\beta_u f(\beta_u X\setminus X)\subset\beta_v Y\setminus Y$. Это означает, что $x\in X$, т.е. $x\in f^{-1}(y)$.

$(3)\Rightarrow(4)$. Предположим, что для некоторого объекта wZ категории $ZUnif$ определены $h:wZ\to\beta_u X$ и $g:wZ\to vY$ - такие $coz-$морфизмы, что $\beta_u f\circ h=i_Y\circ g$. Так как $(i_Y\circ g)(Z)$ содержится в $\beta_v Y$ и $\beta_u f(\beta_u X\setminus X)\subset\beta_v Y\setminus Y$, то $h(Z)\subset X$. Определим отображение $h':wZ\to uX$ по правилу $h'(z)=h(z)$ для любого $z\in Z$. Таким образом, квадрат ($*$) декартов.

$(4)\Rightarrow(3)$ Пусть $x\in\beta_u X$ и $\beta_u X(x)=y\in Y$. Положим $Z=\{x\}$ и определим отображение $h:wZ\to\beta_u X$ по правилу $h(x)=x,$ и отображение $g:wZ\to vY$ по правилу $g(x)=y=\beta_u f(x)\in Y$, где w - тривиальная равномерность на $Z=\{x\}$. Тогда $\beta_u f\circ h=i_Y\circ g$ и существует такой $coz-$морфизм $h':wZ\to uX$, что $h=i_X\circ h'$. Таким образом, $x\in X,$ т.е. $\beta_u f(\beta_u X\setminus X)\subset\beta_v Y\setminus Y$. □

Из свойства (3) теоремы 2.3.5. вытекает, что $coz-$совершенные отображения совпадают с $\mathcal{K}$-совершенными морфизмами в категории $ZUnif$, где $\mathcal{K}$ - эпирефлективная подкатегория $ZUnif$, состоящая из компактов. Таким образом, имеет место следующее

СЛЕДСТВИЕ 2.3.6. *Отображение $f:uX\to vY$ $coz-$совершенно тогда и только тогда, когда f $\mathcal{K}$ - совершенно в категории $ZUnif$, т.е.* $\beta_u f(\beta_u X\setminus X)\subseteq\beta_v Y\setminus Y$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.7. *Если $f:uX\to vY$ и $g:vY\to wZ$ - $coz-$совершенные отображения, то композиция $g\circ f:uX\to uZ$ также является $coz-$ совершенным отображением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\beta_u(g\circ f)=\beta_u g\circ\beta_u f$, где $\beta_u f:\beta_u X\to\beta_v Y$, $\beta_v g:\beta_v Y\to\beta_u Z$ являются продолжениями $coz-$отображений $f:uX\to vY$ *и*

$g: vY \to wZ$, соответственно. Тогда имеем следующее включение, которое следует из теоремы 2.3.5.

$$\beta_u(g \circ f)(\beta_u X \setminus X) = (\beta_v g \circ \beta_u f)(\beta_u X \setminus X) \subseteq \beta_v g(\beta_u f(\beta_u X \setminus X)) \subseteq \beta_v g(\beta_v Y \setminus Y) \subseteq \beta_{uv} Z \setminus Z. \ \square$$

В замечании 2.3.2 отмечалось, что всякое $coz-$совершенное отображение является совершенным, поэтому для $coz-$совершенных отображений имеют место некоторые утверждения для совершенных отображений.

ТЕОРЕМА 2.3.8. *Если $f: uX \to vY$ - $coz-$совершенное отображение, то для каждого компактного подпространства $K \subset Y$, его прообраз $f^{-1}(K)$ является компактом.*

СЛЕДСТВИЕ 2.3.9. *Композиция $coz-$совершенных отображений является $coz-$совершенным отображением.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.10. *Если $f: uX \to vY$ - $coz-$совершенное отображение, то каждого замкнутого $A \subset X$ и любого $B \subset Y$ сужения* $f|_A: u'A \to vY$ и $f|_{f^{-1}(B)}: u''(B) \to v'B$ *является $coz-$совершенными, где $u' = x|_A$ и $u'' = u|_{f^{-1}(B)}$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.11. *Если композиция $g \circ f$ $coz-$морфизмов $f: uX \to vY$ и $g: vY \to wZ$ является $coz-$совершенным отображением, то $coz-$морфизмы $g|_{f(X)}$ и f тоже $coz-$совершенны.*

Произведение произвольного числа совершенных отображений является совершенным отображением [13, Теорема 3.2.7]. Эта теорема является аналогом теоремы Тихонова о компактности произведения компактных пространств [13, Теорема 3.2.4]. В категории $ZUnif$ имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.3.12. *Декартово произведение $f = \prod_{s \in S} f_s$, где $f_s: u_s X_s \to v_s Y_s$ и $X_s \neq \varnothing$ при $s \in S$, является $coz-$совершенным отображением в том и только в том случае, если $coz-$совершенны все отображение f_s.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 2.3.10 следует, что если декартово произведение f $coz-$совершенно, то и все отображения f_s $coz-$совершенны.

Предположим, что все отображение f_s $coz-$совершенны. Тогда из замечания 2.3.2 следует, что все отображения f_s совершенны, следовательно, из теоремы 3.7.7 [13] следует, что декартово произведение f совершенно. Покажем, что декартово произведения f является $coz-$морфизмом. Для этого используем следующую лемму.

ЛЕММА 2.3.13. *Пусть* $\{u_s X_s : s \in S\}$ - *семейство равномерных пространств и* $u = \prod_{s\in S} u_s$ *равномерность на произведении* $X = \prod_{s\in S} X_s$ *и* $u' = \prod_{s\in S} (u_s)_p^z$ - *произведение Волмэновских предкомпактных рефлексий* $(u_s)_p^z$ *каждой равномерности* u_s *для каждого* $s \in S$. *Тогда* $\mathcal{Z}_u = \mathcal{Z}_{u'}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для Волмэновской предкомпактной рефлексии u_p^z равномерности u имеем $\mathcal{Z}_u = \mathcal{Z}_{u_p^z}$ [26]. Так как $u' \subseteq u_p^z$, то $\mathcal{Z}_{u'} \subseteq \mathcal{Z}_{u_p^z}$. С другой стороны uX $coz-$гомеоморфно $u'X$, т.е. $\mathcal{Z}_u \subseteq \mathcal{Z}_{u'}$. Тогда $\mathcal{Z}_u = \mathcal{Z}_{u'} = \mathcal{Z}_{u_p^z}$ Следовательно, $\mathcal{Z}_u = \mathcal{Z}_{u'}$. □

Продолжение доказательства теоремы 2.3.12. Для семейства равномерностей $\{u_s : s \in S\}$ и $\{v_s : s \in S\}$ положим $u' = \prod_{s\in S} (u_s)_p^z$ и $v' = \prod_{s\in S} (v_s)_p^z$, где $(u_s)_p^z$ и $((v_s)_p^z)$ - Волмэновские предкомпактные рефлексии каждой равномерности u_s (v_s), $s \in S$. Тогда отображение $f : u'X \to v'Y$ равномерно непрерывно, где $Y = \prod_{s\in S} Y_s$ [26]. А так $\mathcal{Z}_u = \mathcal{Z}_{u'}$ и $\mathcal{Z}_v = \mathcal{Z}_{v'}$, где $u = \prod_{s\in S} u_s$, $v = \prod_{s\in S} v_s$, то отображение является $coz-$морфизмом. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.14. *Отображение* f *равномерного пространства* uX *в произведение* $\prod_{s\in S} v_s Y_s$ - $coz-$*морфизм тогда и только тогда, когда композиция* $\pi_s \circ f$ *является* $coz-$*морфизмом для каждого* $s \in S$, *где* $\pi_s : \prod_{s\in S} v_s Y_s \to v_s Y$ - *естественная проекция.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. π_s - равномерно непрерывна для каждого $s \in S$, следовательно является $coz-$морфизмам. Тогда $\pi_s \circ f$ - $coz-$морфизм тогда и только тогда, когда f - $coz-$морфизм. □

СЛЕДСТВИЕ 2.3.15. *Диагональное произведение любого семейства $coz-$совершенных отображений является $coz-$совершенным отображением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задано семейство $coz-$морфизмов $\{f_s : uX \to v_sY_s : s \in S\}$. Тогда диагональное отображение $f = \underset{s\in S}{\Delta} f_s$, переводящее точку $x \in X$ в точку $\{f_s(x) : s \in S\}$ произведения $\prod\limits_{s\in S} v_sY_s$, - $coz-$морфизм, в силу предложения 2.3.14, и представляется как композиция диагонали $i = \underset{s\in S}{\Delta} id_{X_s} : uX \to \prod\limits_{s\in S} u_sX_s$, где $u_sX_s = uX$, для $s \in S$ и произведения $\prod\limits_{s\in S} f : \prod\limits_{s\in S} u_sX_s \to \prod\limits_{s\in S} v_sY_s$. Образ $\Delta = i(X) \subset X^{|s|} = \prod\limits_{s\in S} X_s$ замкнут в $\prod\limits_{s\in S} u_sX_s$, следовательно, в силу теоремы 2.3.12, диагональ $f = \underset{s\in S}{\Delta} f_s$ представляется как сужение $coz-$совершенного отображения $\prod\limits_{s\in S} f_s$ на замкнутое подпространство $i(X)$ и, следовательно, по предложению 2.3.10, является $coz-$совершенным. □

СЛЕДСТВИЕ 2.3.16. *Пусть дано семейство $\{f_s : uX \to v_sY_s : s \in S\}$ $coz-$морфизмов. Если существует $s_0 \in S$ такое, что f_{s_0} $coz-$совершенно, то диагональное отображение $\underset{s\in S}{\Delta} f_s$ является $coz-$совершенным отображением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $f = f_{s_0}$ и $g = \underset{s\neq s_0}{\Delta} f_s$. Тогда $f : uX \to v_{s_0}Y_0$ - $coz-$совершенно и $g : uX \to wZ$ - $coz-$морфизм, где $wZ = \prod\limits_{s\neq s_0} v_sY_s$. Диагональное отображение $h = f\Delta g$ есть композиция $coz-$совершенных морфизмов $i_X\Delta g : uX \to u\times wX \times Z$ *и* $f \times i_Z : u\times wX\times Z \to v_{s_0} \times wY \times Z$*, где* $u\times w$, $v_{s_0}\times w$ произведение равномерностей u, w и v_{s_0}, w, соответственно, следовательно, является $coz-$совершенным отображением. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.17. *Если $X \subseteq Y \subseteq \beta_u X$. Тогда $\beta_v Y = \beta_u X$, где v - равномерность на Y, индуцированная из компакта $\beta_u X$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: vY \to K$ - произвольный $coz-$морфизм в компакт K. Тогда имеем естественное продолжение $\beta_u f: \beta_u X \to K$ и $\beta_u f = i_X = f|_{i_X(X)} = f|_X$, где $i_X: uX \to \beta_u X$ - естественное вложение. Используя плотность Y в $\beta_u X$ следует, что $\beta_u f|_Y = f$ и $\beta_u f|_X = f|_X$ и $\beta_u f$ естественно, т.е. $\beta_v Y = \beta_u X$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.18. *Если* $f: uX \to vY$ $coz-$*совершенно, то* $\beta_u f|_{(\beta_u f)^{-1}(Y)}: w(\beta_u f)^{-1}(Y) \to vY$ *также* $coz-$*совершенно, где* w - *равномерность на* $(\beta_u f)^{-1}(Y)$, *индуцированная из компакта* $\beta_u X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 2.3.17 следует, что $\beta_w(\beta_u f)^{-1}(Y) = \beta_u X$ и $\beta_w(\beta_u f|_{(\beta_u f|)^{-1}|Y}) = \beta_u f$. Следовательно, выполнен пункт (3) теоремы 2.3.5, и $\beta_u f|_{(\beta_u f)^{-1}(Y)}$ $coz-$совершенно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.19. *Если* $h: uX \to K$ - $coz-$*гомеоморфизм в компакт* K, *что* $\beta_u h: (\beta_u X \setminus X) \subseteq K \setminus h(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО является частным случаем теоремы 6.11 из [35]. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.20. *Пусть* $f: uX \to vY$ - $coz-$*гомеоморфизм в* vY *и* $f(X)$ *замкнуто в* Y. *Тогда* f *является* $coz-$*совершенным отображением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу непрерывности продолжения $\beta_u f: \beta_u X \to \beta_v Y$ имеем $\beta_u f(\beta_u X) \subseteq [\beta_u f(X)]_{\beta_v Y}$. Композиция $\beta_u f \circ i_X = i_Y \circ f$ является $coz-$гомеоморфизмом, где $i_X: uX \to \beta_u X$, $i_Y: vY \to \beta_u Y$ - $coz-$гомеоморфные тождественные вложения, и $\beta_u f(X) = f(X)$ замкнуто в $\beta_v Y$. Следовательно, из предложения 2.3.19, имеем

$$\beta_u f(\beta_u X \setminus X) \subseteq [\beta_u f(X)]_{\beta_v Y} \setminus \beta_u f(X) \subseteq \beta_v Y \setminus Y,$$

т.е. f - $coz-$совершенное отображение. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.21. *Проекция* $\pi_X: v \times uK \times X \to uX$ *является* $coz-$*совершенным отображением, для любого компактного равномерного пространства* vK, *где* $v \times u$ *произведение равномерностей* $v \times u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi : K\times\beta_u X \to \beta_u X$ - естественная проекция. Очевидно, что $\pi(K\times\beta_u X\setminus K\times X)\subseteq\beta_u X\setminus X$. Пусть $g : K\times X \to K\times\beta_u X$ определено как $g(y,x)=(y,x)$. По предложению 2.3.19 имеем

$$\beta_{v\times u} g(\beta_{v\times u}(K\times X)\setminus K\times X)\subseteq K\times\beta_u X\setminus g(K\times X)$$

далее имеем $\beta_{v\times u}\pi_X : \beta_{v\times u}(K\times X)\to\beta_u X$ и $\beta_{v\times u}\pi_X = \pi\circ\beta_{v\times u} g$. Так как $\beta_{v\times u}\pi_X(\beta_{v\times u}(K\times X)\setminus K\times X)\subseteq\beta_u X\setminus X$, то π_X - $coz-$совершенное отображение. □

ТЕОРЕМА 2.3.22. *Пусть $\beta_u X$ и $\beta_v Y$ β - подобные компактификации uX и vY и $\hat{f} : \beta_u X \to \beta_v Y$ - такое непрерывное отображение, что $\hat{f}(X)=Y$ и $f=\hat{f}|_X$ - $coz-$морфизм. Тогда f $coz-$совершенно в том и только в том случае, если $X=\hat{f}^{-1}(Y)$ или, что равносильно, $\tilde{f}(\beta_u X\setminus X)\subset\beta_u Y\setminus Y$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Из $\hat{f}(X)=Y$ следует, что $X\subset\hat{f}^{-1}(Y)$. Предположим, что существуют $z\in\beta_u X\setminus X$ и $y\in Y$ такие, что $\hat{f}(z)=y$. Множество $F=f^{-1}(y)$ компактно и $F\subset X$. Тогда $z\notin F$. В силу компактности F, F - замкнуто в $\beta_u X$, следовательно, существует такая окрестность V точки z в $\beta_u X$ такая, что $[V]_{\beta_u X}\cap F=\varnothing$. Множество $P=[V]_{\beta_u X}\cap X$ замкнуто в X и $P\cap F=\varnothing$, т.е. $y\notin f(P)$. Имеем, $[P]_{\beta_u X}=[V]_{\beta_u X}$, следовательно, $z\in[P]_{\beta_u X}$. Так как отображение $\hat{f} : \beta_u X\to\beta_v Y$ непрерывно, то $y=\hat{f}(z)\in[\hat{f}(P)]_{\beta_u X}=[\hat{f}(V)]_{\beta_u X}$, Таким образом, множество $f(P)$ не замкнуто в Y - противоречие, т.к. f - замкнутое отображение.

Достаточность. Из предложения 2.3.18 вытекает, что $f=\hat{f}|_{\hat{f}^{-1}(Y)}=\hat{f}|_X$ - $coz-$совершенное отображение. □

ТЕОРЕМА 2.3.23. *Пусть $f : uX\to vY$ $coz-$морфизм, $f(X)=Y$ и $\beta_u X$ - β-подобная компактификация uX. Тогда f $coz-$совершенно, если и только, если uX $coz-$гомеоморфно замкнутому подпространству Γ_f произведения $\beta_u X\times vY$ как равномерных пространств $\beta_u X$ и vY, где $\Gamma_f=\{(x,f(x)) : x\in X\}$ график отображения f.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: uX \to vY$ $coz-$совершенно. Тогда относительно Волмэновских предкомпактных равномерностей u_p^z и v_p^z на X и Y отображение f равномерно непрерывно, т.е. $f: u_p^z X \to v_p^z Y$ равномерно непрерывно. Тогда пополнение X относительно равномерности u_p^z является Самюэлевской компактификацией X, которая совпадает с $\beta_u X$ [26] и $f: u_p^z X \to v_p^z Y$ - предкомпактное отображение в смысле Борубаева [2], следовательно $u_p^z X$ равномерно гомеоморфно Γ_f относительно равномерности произведения $\beta_u X \times v_p^z Y$, т.е. является $coz-$гомеоморфизмом.

Пусть теперь выполнено условие теоремы. Тогда имеем $coz-$гомеоморфизм $i: uX \to \Gamma_f \subset \beta_u X \times v_p^z Y$ и естественную проекцию $\pi = \pi_Y |_{\Gamma_f} : \Gamma_f \to v_p^z Y$, где $\pi_Y : \beta_u X \times v_p^z Y \to v_p^z Y$. Тогда $f = \pi \circ i$. Отображение π $coz-$совершенно, по предложениям 2.3.10, 2.3.21, i - $coz-$гомеоморфизм, следовательно, f - $coz-$совершенное отображение. □

2.4. $\mathcal{R}$ - конуль совершенные отображения равномерных пространств

Класс $\mathcal{R}$ - реалкомпактных пространств образует эпирефлективную подкатегорию $ZUnif$ и Волмэновская реалкомпактификация $\upsilon_u X$ [26] равномерного пространства uX служит эпирефлексией $\upsilon_u : uX \to \upsilon_u X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4.1. Отображение $f : uX \to vY$ называется $\mathcal{R} - coz -$ *совершенным*, если: 1) f $coz -$ замкнуто; 2) $f^{-1}(y)$ - Линделёфово для любой точки $y \in Y$.

Напомним [26], что $z_u -$ ультрафильтр называется *счётноцентрированным*, если в нем каждое счетное подсемейство имеет непустое пересечение. Отметим, что всякий счётноцентрированный $z_u -$ ульрафильтр замкнут относительно счётных пересечений [23].

ТЕОРЕМА 2.4.2. *Пусть uX и vY - равномерные пространства. Тогда для $coz -$ морфизма $f : uX \to vY$ следующие условия равносильны:*

(5) f *является* $\mathcal{R} - coz -$ *совершенным.*

(6) *Если счётноцентрированный $z_u -$ ультрафильтр p на uX и предфильтр $f(p) = \{f(Z) : Z \in p\}$ сходятся к точке $y \in Y$, то p сходится к точке $x \in f^{-1}(y)$.*

(7) *Для отображения расширения $\upsilon_u f : \upsilon_u X \to \upsilon_v Y$ нарост $\upsilon_u X \setminus X$ переходит в нарост $\upsilon_v Y \setminus Y$, т.е. $\upsilon_u f(\upsilon_u X \setminus X) \subset \upsilon_v Y \setminus Y$.*

(8) *Квадрат*

$$\begin{tikzcd} uX \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "f"'] & \upsilon_u X \arrow[d, "\upsilon_u f"] \\ vY \arrow[r, "i_Y"'] & \upsilon_v Y \end{tikzcd} \qquad (*)$$

является декартовым в категории $ZUnif$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $(1) \Rightarrow (2)$. Пусть отображение f $\mathcal{R} - coz -$ совершенно и p - такой счётноцентрированный $z_u -$ ультрафильтр на uX , что предфильтр $f(p)$ сходится к точке $y \in Y$. Совокупность всех равномерно замкнутых множеств $Q \in \mathcal{Z}_v$, являющихся окрестностями точки y или содержащих эту точку, образует счётноцентрированный z_v-ультрафильтр q на равномерном пространстве vY. Отображение $f:uX\to vY$ является $coz-$ морфизмом, значит $f^{-1}(Q)\in p$ для любого $Q\in q$. Ясно, что $f^{-1}(y)=\cap\{f^{-1}(Q):Q\in q\}=f^{-1}(\cap q)$.

Если счётноцентрированный z_u-ультрафильтр p сходится, то он сходится к некоторой точке $f^{-1}(y)$ прообраза. Предположим, что счётноцентрированный z_u-ультрафильтр p не сходится. Тогда для любой точки $x\in f^{-1}(y)$ найдется такое $V_x\in C\mathcal{Z}_u$ и $Z_x\in\mathcal{Z}_u$, что $x\in V_x\subset[V_i]_X\subset Z_x$ и $Z_x\notin p$ [24, 25]. Семейство $\{V_x:x\in f^{-1}(y)\}$ является открытым покрытием Линделёфово подпространства $f^{-1}(y)$. Пусть $\{V_{x_i}:i\in\mathbb{N}\}$ - счётное подпокрытие. Тогда $\bigcap_{i=1}^{\infty}Z_i\notin p$, $V=\bigcup_{i=1}^{\infty}V_{x_i}\in C\mathcal{Z}_u$, отсюда $X\setminus V\in\mathcal{Z}_u$. Так как $X\setminus V\cup\bigcap_{i=1}^{\infty}Z_i=X$, то $X\setminus V\in p$. Тогда $f(X\setminus V)$ замкнуто и $f(X\setminus V)\in f(p)$. Множество $Y\setminus f(X\setminus V)$ - открытая в окрестность точки y, поэтому найдется такое $Q'\in q$, что $y\in Q'\subset Y\setminus f(X\setminus V)$. Тогда $Q'\cap f(X\setminus V)=\varnothing$, значит $f^{-1}(Q')\cap X\setminus V=\varnothing$. Противоречие. Так как $f^{-1}(Q')\in p$ и $X\setminus V\in p$.

$(2)\Rightarrow(1)$. Пусть ξ - произвольная счётноцентрированная система замкнутых множеств в $f^{-1}(y)$. В силу замкнутости $f^{-1}(y)$ в X система ξ состоит из замкнутых множеств в X. $\mathcal{Z}_u$ - база замкнутых множеств равномерного пространства uX [24, 25], следовательно, для любой $K\in\xi$ найдется $\eta_K\subset\mathcal{Z}_u$ такое, что $K=\cap\eta_K$. Семейство $\eta=\{\eta_K:K\in\xi\}$ счётноцентрировано и $\eta\subset\mathcal{Z}_u$. Пусть p - такой счётноцентрированный z_u- ультрафильтр, что $\eta\subset p$. Тогда предфильтр $f(p)$ сходится к точке y и в силу (2), p сходится к некоторой точке $x\in f^{-1}(y)$. По построению $\cap p=\{x\}\subset\cap\eta\subset\cap\xi\neq\varnothing$. Следовательно, $f^{-1}(y)$ - Линделёфово подпространство.

Покажем замкнутость отображения f. Пусть $F\subset X$, F замкнуто в X и $y\in[f(F)]_Y$. Пусть $\eta(y)=\{Q\in\mathcal{Z}_v:Q$ - окрестность $y\}$ и

$$\eta = \eta(y) \cap [f(F)] = \{Q \wedge [f(F)] : Q \in Z(y)\}.$$

Ясно, что η счётноцентрировано. Положим $\xi = \{F \cap f^{-1}(A) : A \in \eta\}$. Ясно, что η - счётноцентрированный предфильтр на $[f(F)]_Y$, а ξ - счётноцентрированный предфильтр на F. Так как $A \subset f(F)$, то $f(F \cap f^{-1}(A)) = A$ для всех $A \in \eta$. Значит $f(\xi) = \eta$. Пусть p - такой счётноцентрированный z_u – ультрафильтр на uX, что $f^{-1}(A) \in p$ для всех $A \in \eta$. Тогда $f(p) \supset \eta$ и $\cap f(p) \subset \cap \eta = \{y\}$, т.е. предфильтр $f(p)$ сходится к точке y. Тогда, в силу (2), счётноцентрирванный z_u – ультрафильтр p сходится к некоторой точке x из X. Так как $f^{-1}(A) \in p$, то $x \in f^{-1}(A)$ для любого $A \in \eta$, т.е. $x \in f^{-1}(y)$ и $x \in [F]_X = F$. Следовательно, $y = f(x) \in f(F)$, т.е. $[f(F)]_Y \subset f(F)$ и множество $f(F)$ замкнуто.

$(2) \Rightarrow (3)$. Пусть $x \in \upsilon_u X \setminus X$ - произвольная точка. Тогда существует единственный счетноцентрированный z_u – ультрафильтр p на uX такой, что $\{x\} = \cap\{[Z]_{\upsilon_u X} : Z \in p\}$. Для отображения расширения $\upsilon_u f : \upsilon_u X \to \upsilon_v Y$ равенство $\upsilon_u f([Z]_{\upsilon_u X}) = [f(Z)]_{\upsilon_v Y}$ выполняется для любого $Z \in p$. Тогда

$$\upsilon_u f(x) = \cap\{[f(Z)]_{\upsilon_u X} : Z \in p\} = \{y\}$$

для некоторой точки $y \in \upsilon_v Y$. Предположим, что $y \in Y$. Тогда предфильтр $f(p) = \{f(Z) : Z \in p\}$ сходится к y и, по условию теоремы, счетноцентированный z_u – ультрафильтр p сходится к некоторой точке $x' \in f^{-1}(y)$. Очевидно, что $\{x'\} = \cap\{[Z]_{\upsilon_u X} : Z \in p\}$, т.е. $x = x'$ - противоречие. Следовательно $y = f(x) \in \upsilon_v Y \setminus Y$.

$(3) \Rightarrow (2)$. Пусть p - произвольный счетноцентрированный z_u – ультрафильтр на uX и предфильтр $f(p) = \{f(Z) : Z \in p\}$ сходится к точке $y \in Y$. Из свойства (3) теоремы 2.4.2 имеем $\{x\} = \cap\{[Z]_{\upsilon_u X} : Z \in p\} \in \upsilon_u X$ и точка x единственная, тогда $\upsilon_u f([Z]_{\upsilon_u X}) = [f(Z)]_{\upsilon_v Y}$ для любого $Z \in p$ и

$$\upsilon_u f(x) = \upsilon_u f(\cap\{[Z]_{\upsilon_u X} : Z \in p\}) = \cap\{[f(Z)]_{\upsilon_v Y} : Z \in p\} = y, \text{ т.е. } x \in (\upsilon_u f)^{-1}(y).$$

Так как имеет место $\upsilon_u f(\upsilon_u X \setminus X) \subseteq \upsilon_v Y \setminus Y$. Итак, $x \in X$, т.е. $x \in f^{-1}(y)$.

$(3) \Rightarrow (4)$. Мы предполагаем, что для некоторого объекта wZ категории $ZUnif$, $h: wZ \to \upsilon_u X$ и $g: wZ \to vY$ - существуют такие $coz-$морфизмы, что $\upsilon_u f \circ h = i_Y \circ g$. Так как $(i_Y \circ g)(Z)$ содержится в $\upsilon_v Y$ и $\upsilon_u f(\upsilon_u X \setminus X) \subseteq \upsilon_v Y \setminus Y$, значит $h(Z) \subset X$. Определим отображение $h': wZ \to uX$ по правилу $h'(z) = h(z)$ для любого $z \in Z$. Таким образом, квадрат $(*)$ декартов.

$(4) \Rightarrow (3)$ Пусть $x \in \upsilon_u X$ и предполагаем, что $\upsilon_u X(x) = y \in Y$. Положим $Z = \{x\}$ и определим отображения $h: wZ \to \beta_u X$ по правилу $h(x) = x$ и $g: wZ \to vY$ по правилу $g(x) = y = \upsilon_u f(x) \in Y$, где w - тривиальная равномерность на $Z = \{x\}$. Тогда $\upsilon_u f \circ h = i_Y \circ g$. Существует такой $coz-$морфизм $h': wZ \to uX$, что $h = i_X \circ h'$. Таким образом, $x \in X$, т.е. $\upsilon_u f(\upsilon_u X \setminus X) \subseteq \upsilon_v Y \setminus Y$. □

Из свойства (4) теоремы 2.4.2. вытекает, что $\mathcal{R}-coz-$совершенные отображения совпадают с $\mathcal{R}$ - совершенными морфизмами в категории $ZUnif$, где $\mathcal{R}$ - эпирефлективная подкатегория $ZUnif$, состоящая из реалкомпактных пространств. Таким образом, имеем место следующее

СЛЕДСТВИЕ 2.4.3. *Отображение* $f: uX \to vY$ $\mathcal{R}-coz-$*совершенно тогда и только тогда, когда* f $\mathcal{R}$ - *совершенно в категории* $ZUnif$, *т.е.* $\upsilon_u f(\upsilon_u X \setminus X) \subseteq \upsilon_v Y \setminus Y$.

Известно, что для тихоновских пространств реалкомпактность сохраняется в сторону прообраза совершенными отображениями. Следующий результат показывает, что реалкомпактность сохраняется в сторону прообраза более широким классом отображений, чем совершенные отображения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4.4. Равномерное пространство uX называется $\mathbb{R}-z_u-$*полным*, если сходится всякий счётноцентрированный z_u-ультрафильтр.

ТЕОРЕМА 2.4.5. *Пусть* $f: uX \to vY$ - $coz-$*замкнутое отображение и* $f^{-1}(y)$ *Линделёфово для любой точки* $y \in Y$. *Тогда, если* vY $\mathbb{R}-z_v-$*полное равномерное пространство, то* uX $\mathbb{R}-z_u-$*полное равномерное пространство.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть p - произвольный счётноцентрированный $z_u -$ ультрафильтр на uX. Тогда $f(p)=\{f(Z):Z\in p\}$ - счётноцентрированный предфильтр на vY, состоящий из замкнутых в Y множеств. Пусть $\xi=\{Q\in \mathcal{Z}_v : f^{-1}(Q)\in p\}$. Тогда ξ - счётноцентрированный простой $z_v -$ фильтр на vY. Следовательно, существует единственный счётноцентрированный $z_v -$ ультрафильтр q такой, что $\xi \subset q$. По условию теоремы 2.4.5, $\{y\}=\cap q\subset \cap \xi$. Следовательно, так как, $\xi\subset f(p)$, то $Z\cap f^{-1}(y)\neq\varnothing$ для любого $Z\in p$. Система $\{Z\cap f^{-1}(y):Z\in p\}$ счётноцентрирована. Так как $f^{-1}(y)$ Линделёфово, то $\cap\{Z\cap f^{-1}(y):Z\in p\}\neq\varnothing$, т.е. $\cap p\neq\varnothing$ и $\cap p=\{x\}$ силу того, что p - $z_u -$ ультрафильтр. Это доказывает, что равномерное пространство uX является $\mathbb{R}-z_u -$ полным равномерным пространством. □

СЛЕДСТВИЕ 2.4.6. *Пусть $f:uX\to vY$ $coz-$ совершенное отображение. Если vY $\mathbb{R}-z_v -$ полное равномерное пространство, то uX - $\mathbb{R}-z_u -$ полное равномерное пространство.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из теоремы 2.4.5. □

СЛЕДСТВИЕ 2.4.7. *Пусть $f:X\to Y$ - замкнутое отображение тихоновского пространства X на тихоновское пространство Y и $f^{-1}(y)$ Линделёфово для любой точки $y\in Y$. Тогда из реалкомпактности Y следует реалкомпактность X.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует, из того факта, что реалкомпактность тихоновских пространств равносильна полноте по счётноцентрированным ультрафильтрам из функционально замкнутых подмножеств данного пространства [13, Теорема 3.11.11]. □

3. Фроликом [32] построены примеры, показывающие не сохранение реалкомпактности в сторону образа открытыми и открытыми компактными отображениями. Оказалось, что при открытых совершенных отображениях реалкомпактность сохраняется в сторону образа. Этот факт доказан Пономарёвым [6] и Фроликом [32]. Следующий пример показывает, что для

$coz-$совершенных отображений, являющихся открытыми отображениями $\mathbb{R}-z_u-$полнота не сохраняется в сторону образа.

ПРИМЕР 2.4.8. Пусть X - дискретное пространство, мощность которого несчётна и является неизмеримым кардиналом. Тогда X не является Линделёфовым пространством, т.к. из открытого покрытия $\{\{x\}: x\in X\}$ нельзя выделить счётное подпокрытие. Из критерия Линделёфовости пространств [13,Теорема 3.8.3] следует, что на X существует X существует счётноцентрированное семейство $\mathcal{F}$ замкнутых множеств с пустым пересечением, т.е. $\cap\mathcal{F}=\varnothing$. Пусть $\mathcal{B}=\{Z\subset X: Z\in\mathcal{F}$ или $Z\cap F=\varnothing$ для некоторого $F\in\mathcal{F}\}$. Тогда $\mathcal{B}$ является нормальной базой в смысле Штайнеров [52]. Семейство $\mathcal{F}$ счётно центрированный ультрафильтр на $\mathcal{B}$ и $\mathcal{F}$ пpинадлежит Волмэновской реалкомпактификации $v(X,\mathcal{B})$. Из работы Чекеева [26], следует что все счётные покрытия, состоящие из множеств семейства $\{X\setminus Z: Z\in\mathcal{B}\}$ образует равномерность u на X и $\upsilon(X,\mathcal{B})=\upsilon_u X$ [26]. Так как X имеет неизмеримую мощность, то по теореме Широта [50], uX полно и X реалкомпактно. Тогда относительно максимальной равномерности u_f на X равномерное пространство $u_f X$ $\mathbb{R}-z_{u_f}-$полно [13, Теорема 3.11.11], Хьюитт [38]. Тождественное отображение $i_X: u_f X\to uX$ является равномерно непрырывным гомеоморфизмом, т.е. является открытым $coz-$совершенным отображением, но uX не является $\mathbb{R}-z_u-$полным, т.к. $X=\upsilon X\neq\upsilon_u X$.

Покажем, что в категории $ZUnif$ имеет место аналог теоремы З.Фролика, а сохранение реалкомпактности в сторону образа непрерывными отображениями, переводящими функционально замкнутые множества в функционально замкнутые множества и прообраза точек, является относительно псевдокомпактным [32].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4.9. Равномерное подпространства Y равномерного пространсва uX называется *относительно* $coz-u-$*псевдокомпактным*, если для последовательности $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $u-$замкнутых множеств такой, что $\{Z_n \cap Y\}_{n\in\mathbb{N}}$ центрированная система следует $Y \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n \neq \varnothing$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4.10. Если $u = u_f$ - максимальная равномерность в определении 2.4.9., то *относительная* u_f-*псевдокомпактность совпадает* с *относительной псевдокомпактностью* в смысле З.Фролика [32].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4.11. Отображение $f: uX \to vY$ называется *сильно* z_u-*замкнутым*, если для любого $u-$замкнутого множества $Z \in \mathcal{Z}_u$ его образ $f(Z)$ $v-$замкнут в vY, т.е. $f(Z) \in \mathcal{Z}_v$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4.12. Если $u = u_f$, $v = v_f$ - максимальные равномерности на тихоновских пространствах X, Y соответственно, то сильно $z_{u_f}-$замкнутое непрерывное отображение $f: u_f X \to v_s Y$ переводит функционально замкнутое множество в X в функционально замкнутое множество в Y [32].

ТЕОРЕМА 2.4.13. *Пусть* $f: uX \to vY$ - *сюръективный сильно* z_u-*замкнутый* $coz-$*морфизм и* $f^{-1}(y)$ *относительно* $u-$*псевдокомпактно для любой точки* $y \in Y$. *Тогда, если* uX $\mathbb{R}-z_u-$*полно, то* vY *также* $\mathbb{R}-z_v-$*полно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть q - произвольный счётноцентрированный z_v-ультрафильтр на vY и $\xi = \{f^{-1}(Q): Q \in q\}$. Ясно, что ξ - центрированная система $u-$замкнутых множеств. Пусть p - z_u-ультрафильтр, содержащий ξ, т.е. $\xi \subset p$. Покажем, что p является счётноцентрированным. Пусть $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset p$ - произвольная последовательность $u-$замкнутых множеств из p. Тогда $Q_n = f(Z_n)$ $v-$замкнуты в vY и $Q_n \in q$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n \neq \varnothing$. Пусть $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n$. Тогда $\{f^{-1}(y) \cap Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ - центрированная система множеств и $f^{-1}(y) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n \neq \varnothing$. Так как uX $\mathbb{R}-z_u-$полно, то $\cap p = \cap\{Z: Z \in p\} = \{x\}$. Ясно, что $y = f(x) \in \bigcap_{n=1}\{Q: Q \in q\} = \bigcap q_0$, т.е. vY $\mathbb{R}-z_v-$полно. □

СЛЕДСТВИЕ 2.4.14. [32] *Пусть* $f: X \to Y$ - *такое непрерывное сюръективное отображение тихоновского пространства* X *на тихоновское пространства* Y, *что* f *сильно* u_f *–замкнуто и* $f^{-1}(y)$ *относительно псевдокомпактно для любой точки* $y \in Y$. *Тогда, если* X *реалкомпактно, то* Y *также реалкомпакт.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, с учетом замечаний 2.4.10 и 2.4.12, непосредственно следует из теоремы 2.4.13. □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4.15. Отображение $f: uX \to vY$ называется *сильно* $coz-$*совершенным*, если f сильно z_u- замкнутый $coz-$морфизм и $f^{-1}(y)$ компактно для любой точки $y \in Y$.

ТЕОРЕМА 2.4.16. *Если* $f: uX \to vY$ - *сильно* $coz-$*совершенное сюрьективное отображение, то образ любой базы топологии* uX, *состоящей из* $u-$*открытых множеств, если база топологии* vY, *состоящая из* $v-$ *открытых множеств.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: uX \to vY$ - сильно $coz-$совершенное сюръективное отображение и $\{V_s\}_{s \in S} \subset C\mathcal{Z}_u$ - база топологии uX из $u-$ открытых множеств. Пусть $\mathcal{P}(S)$ - множество всех конечных подмножеств S. Положим $W_A = Y \setminus f(X \setminus \underset{s \in A}{\cup} V_s)$, где $A \in \mathcal{P}(S)$. Тогда семейство $\{W_A\}_{A \in \mathcal{P}(S)} \subset C\mathcal{Z}_v$ - база топологии равномерного пространства vY. Пусть $W \subset Y$ открыто в Y и $y \in W$. Прообраз $f^{-1}(y)$ компакт в X и $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(W)$. Тогда найдется такое $A \in \mathcal{P}(S)$, что $f^{-1}(y) \subset \underset{s \in A}{\cup} V_s \subset f^{-1}(W)$. Ясно, что $y \in W_A$ и

$$Y \setminus W = f(X \setminus f^{-1}(W)) \subset f(X \setminus \underset{s \in A}{\cup} V_s),$$

т.е. $y \in W_A \subset W_A$. □

ТЕОРЕМА 2.4.17. *Пусть* $f: uX \to vY$ - *сильно* $coz-$*совершенное сюръектитвное отображение и* uX *метризуемое равномерное пространство. Тогда на* Y *существует метризуемая равномерность* w.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: uX \to vY$ - сильно $coz-$совершенное отображение uX на vY. Пусть ρ - метрика на X такая, что $u = u_\rho$. Для произвольного $y \in Y$ и всех $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим следующие $u-$открытые множества

$U_n(y) = O(f^{-1}(y), 1/n)$, $W_n(y) = Y \setminus f(X \setminus U_n(y))$ и $V_n(y) = f^{-1}(W_n(y)) \subset U_n(y)$,

где $O(f^{-1}(y), 1/n)$ - $u-$открытая окрестность компакта $f^{-1}(y)$ радиуса $< 1/n$. Тогда ясно, что $V_k(y) \subseteq V_n(y)$, при $k \geq n$ и семейство $\alpha_n = \{W_n(y) : y \in Y\}$ есть $v-$открытое покрытие Y. Заметим, что покрытие $\alpha_{3n} = \{W_{3n}(y) : y \in Y\}$ сильно звёздно вписано в покрытие α_n и покрытие α_m вписано в покрытие $\alpha_k \wedge \alpha_n$, где $m > k$ и $m > n$. Это означает, что семейство $\mathscr{B} = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ есть база некоторой псевдоравномерности. Покажем, что $\mathscr{B}$ является базой равномерности. Для этого достаточно показать, что $\{W_n(y)_{n \in \mathbb{N}}\}$ - база в точке y для любой точки $y \in Y$.

Действительно, пусть V - произвольная $v-$открытая окрестность точки $y \in Y$. Тогда $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V)$. Тогда существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $O(f^{-1}(y), 1/n) \subset f^{-1}(V)$, т.е. $V_n(y) \subset f^{-1}(V)$. Тогда $W_n(y) \subset V$. Покажем, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется $k \in \mathbb{N}$ такое, что $W_k(z) \subset W_n(y)$, где $y \in W_k(z)$. Тогда найдется такое $m \geq 2n$, что $V_m(y) \subset V_{2n}(y)$. Расмотрим такое $z \in Y$, что $y \in W_m(z)$. Тогда $f^{-1}(y) \subset V_m(z) \subset V_m(z)$, т.е. существуют такие $x \in f^{-1}(z)$ и $x' \in f^{-1}(y)$, что $\rho(x, x') < 1/m$. Отсюда следует, что $V_m(y) \cap f^{-1}(z) = \varnothing$ и $f^{-1}(z) \subset V_{2n}(y)$, так как последнее множество вместе с любой точкой x содержит также множество $f^{-1}(f(x))$.

Пусть $t \in W_m(z)$. Тогда $f^{-1}(t) \subset V_m(z)$ и для любой точки $x \in f^{-1}(t)$ существует такая точка $x' \in f^{-1}(z)$, что $\rho(x, x') < 1/m \leq 1/2n$. Тогда $f^{-1}(z) \subset V_{2n}(y) \subset V_{2n}(y)$ и, следовательно, существует такая точка что $x'' \in f^{-1}(y)$, что $\rho(x', x'') < 1/2n$. Тогда $\rho(x, x'') \leq \rho(x, x') + \rho(x', x'') < 1/2n + 1/2n = 1/n$, т.е. $\rho(x, x'') < 1/n$. Следовательно, $f^{-1}(t) \subset V_n(y)$, т.е. $t \in W_n(y)$.

Итак, $\mathscr{B}$ - база некоторой равномерности w на Y. Так как w счётна, то w - метризуемая равномерность. □

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В категории $ZUnif$ установлены свойства некоторых важнейших классов $coz-$морфизмов и доказаны в этой категории аналоги, ставших классическими в категории $Tych$, теоремы о продолжении непрерывных отображений со всюду плотных подпространств в компактные и реалкомпактные пространства. В категории $ZUnif$ категорно обоснованы и категорно доказаны характеристики $coz-$совершенных и $\mathcal{R}$ - $coz-$совершенных отображений.

В частности, доказано сохранение $coz-$совершенности отображений при любых произведениях.

Построен пример, показывающий не сохранение $\mathcal{R}$ - z_u - полноты при открытых $coz-$совершенных отображениях, хотя в категории $Tych$ образ реалкомпактного пространства является реалкомпактным пространством при открытых совершенных отображениях. Доказано, также, что $\mathcal{R}$ - z_u - полнота сохраняется в сторону прообраза $coz-$совершенными отображениями.

Доказано, что $\mathcal{R}$ - z_u - полнота сохраняется в сторону образа сильно $coz-$совершенными отображениями. Также при сильно $coz-$совершенных отображениях в сторону образа сохраняется равномерная метризуемость и базы из равномерно открытых множеств.

ГЛАВА 3
КОНУЛЬ ФУНКЦИИ НА РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ
3.1. C_u^*- и C_u-вложенные равномерные пространства

Для $coz-$морфизма, если $Y=\mathbb{R}$, то $coz-$морфизм $f:uX\to\mathbb{R}$ называется $u-$ *непрерывной функцией* и $coz-$морфизм $f:uX\to I$ называется $u-$ *функцией.*

Обозначим через $C_u(X)\,(C_u^*(X))$ - множество всех (ограниченных) u - непрерывных функции на равномерном пространстве uX .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.1. Подмножества A и B называются $u-$ *отделимыми* в uX , если существует такая $u-$функция $f:uX\to I$, что $f(x)=\{0\}$ для всех $x\in A$ и $f(x)=\{1\}$ для всех $x\in B$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1.2. Если $Z_1,Z_2\in\mathcal{Z}_u$ и $Z_1\cap Z_2=\varnothing$, то функция

$$f(x)=g_1(x)/(g_1(x)+g_2(x))$$

является $u-$ *функцией* [24, 25], где $g_i:uX\to vY$ - равномерно непрерывные функции, $Z_i=g^{-1}(0),(i=1,2)$ и $f(Z_1)=\{0\},f(Z_1)=\{1\}$. Каждый сегмент $[-r,r]$ равномерно гомеоморфен I. Пусть $h:I\to[-r,r]$ - такой равномерный гомеоморфизм, что $h(0)=\{-r\}$, $h(1)=\{r\}$. Тогда функция $F:uX\to[-r,r]$, где $F=h\circ f$, является $u-$ непрерывной функцией и $F(Z_1)=\{-r\}$, $F(Z_2)=\{r\}$.

ТЕОРЕМА 3.1.3. *Два множества в uX $u-$отделимы, если и только, если они содержатся в непересекающихся $u-$замкнутых множествах. Более того, два $u-$отделимых множества содержатся в непересекающихся $u-$ замкнутых окрестностях.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A и B $u-$отделимы в uX. Тогда существует такая $u-$функция $f:uX\to I$, что $f(x)=\{0\}$ для всех $x\in A$ и $f(x)=\{1\}$ для всех $x\in B$. Множества

$$Z_1=\{x: f(x)\le 1/3\} \text{ и } Z_2=\{x: f(x)\ge 2/3\}$$

$u-$замкнутые окрестности A и B соответственно, и $Z_1\cap Z_2=\varnothing$. Если $A\subset Z_1$, $B\subset Z_2$, $Z_1\in\mathcal{Z}_u(i=1,2)$, и $Z_1\cap Z_2=\varnothing$, то, согласно замечанию 3.1.2, существует

$u-$функция $f: uX \to vY$ такая, что $f(x)=\{0\}$ для всех $x \in Z_1$ и $f(x)=\{1\}$ для всех $x \in Z_2$. Следовательно, A и B $u-$ отделимы в uX. □

СЛЕДСТВИЕ 3.1.4. *Если A и B $u-$отделимы в uX, то существуют $u-$замкнутые множества F и Z такие, что $A \subset X \setminus Z \subset F \subset X \setminus B$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: uX \to I$ - такая $u-$функция, что $f(x)=\{0\}$ для всех $x \in A$ и $f(x)=\{1\}$ для всех $x \in B$. Положим

$$F=\{x: f(x) \le 1/3\} \text{ и } Z=\{x: f(x) \le 1/3\}.$$

Тогда F и Z - $u-$замкнутые множества и легко проверить, что условия этого следствия выполнены. □

СЛЕДСТВИЕ 3.1.5. *Каждая окрестность точки в равномерном пространстве uX содержит $u-$замкнутую окрестность этой точки.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x - произвольная точка равномерного пространства uX и O - произвольная открытая окрестность этой точки. Тогда $x \notin F = X \setminus O$, и F - замкнутое множество в X. Тогда существует равномерно непрерывная функция $f: uX \to I$ ([41, 13]) такая, что $f(x)=0$ и $f(y)=1$ для всех $y \in F$. Каждая равномерно непрерывная функция $u-$непрерывна, следовательно, x и F $u-$отделимы, и результат следует из следствия 3.1.4. □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.6. Пусть uX и vY - такие равномерные пространства, что X - подпространство Y и $\mathcal{Z}_u = \mathcal{Z}_v \wedge X$. Говорят, что равномерное пространство uX C_u $(C_u^*)-$*вложено* в равномерное пространство vY, если всякая функция $C_u(X)$ $(C_u^*(X))$ продолжается до функции из $C_v(Y)$ $(C_v^*(Y))$.

ТЕОРЕМА 3.1.7. (аналог Теоремы Урысона). *Пусть uX и vY - такие равномерные пространства, что X - подпространство Y и $\mathcal{Z}_u = \mathcal{Z}_v \wedge X$. Тогда uX C_u^* - вложено в vY, если и только, если любые два u - отделимых множества в uX $v-$отделимы в vY.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость*. Если A и B $u-$отделимы в uX, то существует функция f из $C_u^*(X)$ такая, что f равна 0 на A и 1 на B. По условию, f продолжается до функции g в $C_v^*(Y)$. Поскольку g есть 0 на A и 1 на B, то эти множества $v-$отделимы в vY.

Достаточность. Пусть f_1 - данная функция из $C_u^*(X)$. Тогда $|f_1|\le m$ для некоторого $m\in\mathbb{N}$. Положим $r_n=(m/2)(2/3)^n, n\in\mathbb{N}$. Тогда $|f_1|\le m=3r_1$. Пусть по индукции построена функция $f_n\in C_u^*(X)$ и $|f_n|\le 3r_1$, определим

$$A_n=\{x\in X: f_n(x)\le -r_n\} \text{ и } B_n=\{x\in X: f_n(x)\ge r_n\}.$$

Тогда A_n и B_n $u-$замкнуты в uX и $A_n\cap B_n=\varnothing$. Тогда по замечанию 3.1.2, A_n и B_n $u-$отделимы в uX. По условию существует функция g_n из $C_v^*(Y)$, равная $-r_n$ на A_n и $2r_n$ на B_n такая, что $|g_n|\le r_n$. Значения функций f_n и g_n расположены между $-3r_n$ и $-r_n$ на A_n и на B_n они расположены между r_n и $3r_n$, и всюду на X эти функции принимают значения между $-r_n$ и r_n. Пусть $f_{n+1}=f_n-g_n|_X$. Мы имеем $|f_{n+1}|\le 2r_n$, т.е. $|f_{n+1}|\le 3r_{n+1}$. Это завершает индукционные шаги.

Положим $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x), x\in X$. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty}r_n$ сходится и $|g_n|\le r_n$ для всех $n\in\mathbb{N}$, то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)$ сходится равномерно. Так как $g_k(x)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)$ $v-$непрерывно и ограничено для любого $k\in\mathbb{N}$, т.е. $g_k\in C_v^*(Y)$ то $g\in C_v^*(Y)$ [26]. Для каждого $n\in\mathbb{N}$ имеем

$$(g_1+g_2+...g_n)|_X=(f_1-f_2)+(f_2-f_3)+...+(f_n-f_{n+1}),$$

тогда $(g_1+g_2+...g_n)|_X=f_n-f_{n+1}$. Поскольку последовательность $\{f_{n+1}(x): n\in\mathbb{N}\}$ сходится к 0 для каждой точки $x\in X$, то $g(x)=f_1(x)$ всех $x\in X$. Таким образом, g является $v-$непрерывным продолжением f_1. □

СЛЕДСТВИЕ 3.1.8. *Пусть uX - равномерное подпространство vY. Тогда uX C_u^*-вложено в vY, если и только, если два $u-$отделимых множества $v-$отделимы в vY.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из Теоремы 3.1.7, т.к. $\mathcal{Z}_u = \mathcal{Z}_v \wedge X$. □

СЛЕДСТВИЕ 3.1.9. *Пусть* uX, vY *и* wS *- такие равномерные пространства, что* S *- подпространство* X, *а* X *- подпространство* Y, $\mathcal{Z}_w = \mathcal{Z}_u \wedge S$, $\mathcal{Z}_u = \mathcal{Z}_v \wedge X$ *и* uX $C_u-(C_u^*-)$ *вложено в* vY. *Тогда* wS $C_w-(C_w^*-)$ *вложено в* vY, *если и только если* wS $C_w-(C_w^*-)$ *вложено в* uX.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть wS $C_w-(C_w^*-)$ вложено в vY, т.е. каждая $w-$ непрерывная функция $f \in C_w(X)(C_w^*(X))$ продолжается до $v-$непрерывной функции $g \in C_v(Y)(C_v^*(Y))$, это корректно, так как $\mathcal{Z}_w = \mathcal{Z}_v \wedge X$. Ясно, что

$$h = g|_X \in C_u(X)(C_u^*(X))$$

и h - $u-$непрерывное (ограниченное) продолжение функции f. Обратное очевидно. □

ТЕОРЕМА 3.1.10. C_u^*-*вложенное подмножество* C_u-*вложено, если и только, если оно* $u-$*отделимо от любого* $u-$*замкнутого множества, не пересекающегося с ним.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть uX C_u^*-вложено в vY. Пусть $Z(h) = h^{-1}(0)$ $v-$замкнуто в Y и $Z(h) \cap X = \varnothing$. Тогда $h(x) \neq 0$ для всех $x \in X$. Кольцо $C_u(X)$ инверсно замкнуто, следовательно, функция $f(x) = 1/h(x)$ $u-$непрерывна для всех $x \in X$, т.е. $f \in C_u(X)$. Пусть g - $v-$непрерывное продолжение f на Y. Тогда $g \cdot h \in C_v(Y)$ (так как $C_v(Y)$ является кольцом) и равно 1 на X и 0 на $Z(h)$.

Обратно, пусть $f \in C_u(X)$ - произвольная $u-$непрерывная функция. Тогда $arctg \circ f : uX \to (-\pi/2; \pi/2)$ - ограниченная $u-$непрерывная функция на uX, т.е. $arctg \circ f \in C_u^*(X)$. Пусть g - $v-$непрерывное продолжение функции $arctg \circ f$, т.е. $g \in C_v(Y)$. Множество $Z = \{x \in Y : |g(x)| \geq \pi/2\}$ $v-$замкнуто и $Z \cap X = \varnothing$. По условию теоремы, найдется функция $h \in C_v(Y)$, которая равна 1 на X и 0 на Z и $|h| \leq 1$. Функция $g \cdot h$ $v-$непрерывна и $g \cdot h|_X = arctg \circ f$ и $|(g \cdot h)(x)| < \pi/2$ для всех $x \in Y$.

Итак, функция $tg \circ (g \cdot h)$ - $v-$непрерывное продолжение f на Y. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1.11. *Следующие условия равносильны:*

(a) *В равномерном пространстве uX каждая пара непересекающихся замкнутых множеств, одно из которых компакт, являются $u-$ отделимыми.*

(b) *В равномерном пространстве uX каждое G_δ - множество, содержащее компакт, содержит $u-$замкнутое множество, содержащее этот компакт.*

(c) *Каждое компактное подпространство vK равномерного пространства uX C_v-вложено.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *(a)* Пусть F и F' - непересекающиеся замкнутые множества в uX и F - компакт. Для каждой точки $x \in F$ выберем непересекающиеся $u-$замкнутые множества Z_x и Z'_x так, что Z_x - $u-$замкнутая окрестность точки x и $Z'_x \supset F'$. Покрытие $\{Z_x : x \in F\}$ компакта F имеет конечное подпокрытие $\{Z_{x_1}, ..., Z_{x_n}\}$. Тогда F и F' содержатся в непересекающихся $u-$замкнутых множествах $Z_{x_1} \cup ... \cup Z_{x_n}$ и $Z'_{x_1} \cap ... \cap Z'_{x_n}$. Следовательно, по теореме 3.1.3, F и F' $u-$отделимы.

(b) $G_\delta-$множество G имеет вид $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$, где каждое V_n открыто в uX. Так как $V_n \supset K$ и K - компакт, то K $u-$отделимо от $X \setminus V_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ по пункту (a). По следствию 3.1.4, существует $u-$замкнутое множество F_n, удовлетворяющее включению $K \subset F_n \subset V_n$. Тогда $K \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subset G$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ $u-$замкнуто, как счетное пересечение $u-$замкнутых множеств.

(c) Пусть vK - компактное равномерное подпространство uX. Если F и F' $v-$отделимы в vK, то F и F' имеют непересекающиеся замыкания в K. Так как эти замыкания компактны, то по пункту (a) они u - отделимы в uX. По теореме 3.1.7. компакт vK C_v^*-вложен в uX. По пункту *(b)* компакт K $u-$

отделим от каждого $u-$замкнутого множества, непересекающегося с ним. Следовательно, по теореме 3.1.10. vK C_v-вложен в uX . □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1.12. *Пусть* $u'S$ *равномерное подпространство* uX . *Тогда*

(a) $u'S$ $C^*_{u'}-$ *вложено в* uX *если и только, если* $u'S$ $C^*_{u'}-$ *вложено в* $\beta_u X$.

(b) $u'S$ $C^*_{u'}-$ *вложено в* uX *если и только, если* $[S]_{\beta_u X}=\beta_{u'}S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *(a)* очевидно и следует из следствия 3.1.9.

(b) По пункту (3) Предложение 3.1.11, компактное равномерное пространство $K=[S]_{\beta_u X}$ компактификация $\beta_u X$ C^*_v-вложено в $\beta_u X$, где v равномерность на K, индуцированная из $\beta_u X$. Таким образом, пункт *(b)* следует, если только, если равномерное пространство $u'S$ $C^*_{u'}-$ вложено в $\beta_{u'}S$ и компакт $K=[S]_{\beta_u X}$ является $\beta-$подобной компактификацией $u'S$ [26]. □

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1.13. В работе [26] приведён пример равномерного пространства uX , что $\beta_u X\neq\beta X$. Тогда uX C^*_u-вложено, но не C^*_v-вложено в $\beta_u X$. Также в работах [23, 26, 27, 28] приведён пример реалкомпактного пространства и равномерности u на нем так, что $X=\upsilon X\neq\upsilon_u X$. Тогда uX C_u- вложено, но $C-$вложено в $\upsilon_u X$.

Следующая теорема является аналогом в категории $ZUnif$ известных характеристик нормальных пространств [14] и рассматриваются равномерно нормальные пространства в смысле [39, 48, 49].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.14. Равномерное пространство называется uX называется $coz-$*нормальным*, если любые два замкнутых дизъюнктных множества $u-$отделимы.

ТЕОРЕМА 3.1.15. *Для равномерного пространства* uX *следующие условия равносильно:*

(1) uX $coz-$*нормально.*

(2) Каждое замкнутое множество C^*_u-*вложено.*

(3) Каждое замнутое множество C_u-*вложено.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $(1)\Leftrightarrow(2)$. Каждое замкнутое подпространство $coz-$нормального пространство $coz-$нормально, следовательно доказательство следует из теоремы 3.1.7.

$(3)\Leftrightarrow(2)$. Очевидно.

$(1)\Leftrightarrow(3)$. Из *(1)* следует, что любое замкнутое подпространство C_u^*-вложено. Тогда из теоремы 3.1.10. следует, что любое замкнутое подпространство C_u-вложено.

$(2)\Leftrightarrow(1)$. Пусть F_1, F_2 замкнуты в X и $F_1\cap F_2=\varnothing$. Тогда $F=F_1\cup F_2$ замкнуто в X и функция $f:F\to I$, определённая как $f(F_1)=\{0\}$ и $f(F_2)=\{1\}$ $u'-$непрерывна, где $u'=u|_F$. Пусть g - $u-$непрерывное продолжение f. Тогда $g(F_1)=\{0\}$ и $g(F_2)=\{1\}$ и F_1 и F_2 - $u-$отделимы в uX. □

СЛЕДСТВИЕ 3.1.16. *Пусть uX равномерно нормальное пространство. Тогда следущие условия равносильны:*

(1) В uX любые два замкнутые дизъюнктные множества $u-$отделимы.

(2) Любое замкнутое множество C_u^*-вложено.

(3) Любое замкнутое множество C_u-вложено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из теоремы 3.1.15, так как, всякое равномерно нормальное пространство $coz-$нормально. □

СЛЕДСТВИЕ 3.1.17 [55]. *Всякое замкнутое подпространство метрического пространства $C-$вложено в него.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Всякое метрическое пространство (X,ρ) с метрической равномерностью u_ρ является $u_\rho-$нормальным. Следовательно доказательство следует непосредственно из теоремы 3.1.15. □

3.2. Полные семейства u – непрерывных функций

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2.1. Семейство $\mathcal{F} \subset C_u(X)$ u – непрерывных функций на равномерном пространстве uX называется *полным*, если выполнено условие:

(1) Если ξ - центрированная система u – замкнутых множеств в uX и каждой функции $f \in \mathcal{F}$ существует $Z_f \in \xi$ такое, что f ограничено на Z_f, что $\cap\xi \neq \varnothing$.

ТЕОРЕМА 3.2.2. *Пусть $\mathcal{F} \subset C_u(X)$ - семейство u – непрерывных функций на равномерном пространстве uX. Тогда $\mathcal{F}$ полно если и только, если выполнены следующие условия:*

(I) *Если F - пересечение u – замкнутых множеств в uX и если каждая функция $f \in \mathcal{F}$ ограничена на F, то F - компакт.*

(II) *Если $\{Z_f : f \in \mathcal{F}\}$ - центрированное семейство u – замкнутых множеств в uX и f ограничено на Z_f, то $\cap\{Z_f : f \in \mathcal{F}\} \neq \varnothing$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{F}$ - полное семейство u – непрерывных функций, то выполнение пунктов (I) и (II) очевидно.

Докажем обратное. Пусть ξ - центрированное семейсто u – замкнутых множеств в uX и для каждой $f \in \mathcal{F}$ существует $Z_f \in \xi$, на котором f ограничено. По (II) множество $\cap\{Z_f : f \in \mathcal{F}\} = F$ непусто, т.е. $F \neq \varnothing$. По (I) F компактно. Для доказательства того, что $\cap\xi \neq \varnothing$ необходимо показать, что $\xi \wedge F = \{Z \cap F : Z \in \xi\}$ является центрированным семейством. Пусть Z_1 и Z_2 из ξ. Тогда $\cap\{Z_1 \cap Z_2 \cap Z_f : f \in \mathcal{F}\} = F \cap Z_1 \cap Z_2 \neq \varnothing$, $\cap(\xi \wedge F) = \cap\xi \cap F \neq \varnothing$, т.е. $\cap\xi \neq \varnothing$. □

ТЕОРЕМА 3.2.3. *Пусть $\mathcal{F} \subset C_u(X)$ - семейство u – непрерывных функций и $g = \underset{f \in \mathcal{F}}{\Delta} f : uX \to \prod_{f \in \mathcal{F}} \mathbb{R}_f$, где $\mathbb{R}_f = \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}$, - диагональ семейства $\mathcal{F}$. Тогда семейство $\mathcal{F}$ полно если и только, если g coz – совершенно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K компактно в $\mathbb{R}^{\mathscr{F}} = \prod_{f \in \mathscr{F}} \mathbb{R}_f$. Так как $f = \pi_f \circ g$ для любой функции $f : uX \to \mathbb{R}_f$, где $\pi_f : \mathbb{R}^{\mathscr{F}} \to \mathbb{R}_f$ - естественная проекция, то каждая функция f из $\mathscr{F}$ ограничена на $g^{-1}(K)$. Имеем, $f(x) = \pi_f(g(x))$ для любой точки $x \in X$ и $f(g^{-1}(K)) = \pi_f(K)$. Ясно, что $\pi_f(K)$ компактно в $\mathbb{R}_f$ и является ограниченым в $\mathbb{R}_f$ относительно Евклидовой метрики на $\mathbb{R}_f$. Так как функционально замкнутые множества есть база топологии замкнутых множеств, то компакт K является пересечением некоторого семейства функционально замкнутых множеств в $\mathbb{R}_f$. Так как g - $coz-$морфизм, то $g^{-1}(K)$ является пересечением некоторого семейства $u-$замкнутых множеств. Следовательно, по теореме 3.2.2. $g^{-1}(K)$ - компакт в X и $g : uX \to \mathbb{R}^{\mathscr{F}}$ - компактное отображение.

Дя доказательства замкнутости отображения g достаточно показать, что g $coz - z_u -$замкнуто. Пусть Z_0 $u-$замкнуто в uX. Предположим противное, т.е. $g(Z_0) = F$ не замкнуто в $\mathbb{R}^{\mathscr{F}}$. Пусть $y \in [F] \setminus F$, где $[F]$ - замыкание в $\mathbb{R}^{\mathscr{F}}$ и $y = (y_f : f \in \mathscr{F}) \in \mathbb{R}^{\mathscr{F}}$.

Рассмотрим следующее семейство $\xi = \{Z_{n,f} : f \in \mathscr{F}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{Z_0\} \subset \mathcal{Z}_u$ $u-$замкнутых множеств в uX, где $Z_{n,f} = \{x \in X : | f(x) - y_f | \le 1/n\}$. Тогда точка y является точкой прикосновения для множества F и семейство ξ центрировано. Каждое f из $\mathscr{F}$ ограничено на $Z_{n,f}$, следовательно в сиду полноты $\mathscr{F}$, $\cap \xi \ne \varnothing$. Но $\bigcap \xi = g^{-1}(y) \cap Z_0$ и $y \notin g(Z_0) = F$, т.е. $\cap \xi = \varnothing$. Противоречие. Итак, $g : uX \to \mathbb{R}^{\mathscr{F}}$ $coz-$совершенно.

Обратно, пусть $g : uX \to \mathbb{R}^{\mathscr{F}}$ $coz-$совершенно или, что равносильно $coz - z_u -$замкнуто и компактно. Пусть ξ - z_u-ультрафильтр в uX и предположим, что для любого $f \in \mathscr{F}$ найдется $Z_f \in \xi$, на котором f ограничено. В силу компактности g достаточно доказать, что существует точка

$y=(y_f : f\in\mathscr{F})\in\mathbb{R}^{\mathscr{F}}$ такая, что $\xi\wedge g^{-1}(y)$ центрировано. Тогда из компактности прообраза $g^{-1}(y)$ следует, что $\bigcap(\xi\wedge g^{-1}(y))\neq\varnothing$, т.е. $\cap\xi\neq\varnothing$.

Пусть $f\in\mathscr{F}$, то f ограничено на $Z_f\in\xi$. Следовательно, найдется ограниченный интервал $I_f\subset\mathbb{R}_f$ такой, что $f(Z_f)\subset I_f$. Пусть $K_1,...,K_n$ - конечное покрытие I_f замкнутыми интервалами $diam\leq 1/n$. Каждое $f^{-1}(K_i)$, $i=1,...,n$, $u-$замкнуто в uX и $\bigcup\limits_{i=1}^{n}f^{-1}(K_i)\supset Z_f\in\xi$. Так как ξ - z_u- ультрафильтр в uX для некоторого $i=1,...,n$, $f^{-1}(K_i)\in\xi$. Таким образом, для любого $n\in\mathbb{N}$ и любой функции $f\in\mathscr{F}$ существует замкнутый интервал $diam\leq 1/n$ такой, что $Z_{n,f}=f^{-1}(K_{n,f})\in\xi$. Очевидно, что для каждой функции $f\in\mathscr{F}$ семейство $\{K_{n,f}\}_{n\in\mathbb{N}}$ - центрированное семейство компактных множеств. Следовательно $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}K_{n,f}\neq\varnothing$ и это пересечение содержит только одну точку, так как $diamK_{n,f}\to 0$ при $n\to\infty$. Положим $\{y_f\}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}K_{n,f}$. Тогда точка $y=(y_f : f\in\mathscr{F})$ искомая. Действительно, $g(X)$ компактно в $\mathbb{R}^{\mathscr{F}}$ и $y\in g(X)$. Покажем, что $\xi\wedge g^{-1}(y)$ центрировано, т.е. если $Z\in\xi$, то $Z\cap g^{-1}(y)\neq\varnothing$. Предположим противное. Пусть $Z\in\xi$ такое, что $Z\cap g^{-1}(y)=\varnothing$. По условию $g(Z)$ замкнуто в $\mathbb{R}^{\mathscr{F}}$. По предположению $y\notin F$. Тогда существует окрестность V точки y такая, что $V\cap F=\varnothing$. Поскольку $diamK_{n,f}\to 0$ при $n\to\infty$ существуют $K_i=K_{n_i,f}$ $(i=1,2,...,k)$ такие, что $\bigcap\limits_{i=1}^{k}f_i^{-1}(K_i)\bigcap Z=\varnothing$, т.е. $\bigcap\limits_{i=1}^{k}f_i^{-1}(K_i)\notin\xi$. Противоречие, так как $f_i^{-1}(K_i)\in\xi$, $i=1,2,...,k$, $\bigcap\limits_{i=1}^{k}f_i^{-1}(K_i)\in\xi$. Итак, $\xi\wedge g^{-1}(y)$ центрировано. □

СЛЕДСТВИЕ 3.2.4. *Если равномерное пространство uX $\mathbb{R}-z_u-$полно, то алгебра $C_u(X)$ всех $u-$непрерывных функций является полной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из того факта, что если uX $\mathbb{R}-z_u-$ полно, то uX $coz-$гомеоморфно вкладывается в $\mathbb{R}^{C_u(X)}$ [26]. □

Естественно, что для характеризации $\mathbb{R}-z_u-$полных равномерных пространств возникает вопрос об использовании части алгебры $C_u(X)$.

ТЕОРЕМА 3.2.5. *Пусть* $\mathcal{F}\subset C_u(X)$ - *такое семейство* $u-$*непрерывных функций, что* $f\geq 1$ *для каждой функции* $f\in\mathcal{F}$. *Для каждой функции* $f\in\mathcal{F}$ *обозначим* $g_f=1/f\in C_u^*(X)$, $\beta_u g_f$ - *продолжение* g_f *на* $\beta_u X$ *и* $coz(\beta_u g)=\{x\in\beta_u X:\beta_u g_f(x)\neq 0\}$. *Тогда* $\mathcal{F}$ *полно если и только, если* $X=\bigcap\limits_{f\in\mathcal{F}} coz(\beta_u g_f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует такая точка $x\in\beta_u X$, что $x\in\bigcap\limits_{f\in\mathcal{F}} coz(\beta_u g_f)\setminus X$. Пусть ξ - семейство функционально замкнутых множеств в $\beta_u X$, являющихся окрестностями точки x. Ясно, что $\{x\}=\bigcap\xi\subset\beta_u X\setminus X$. Тогда $\xi\wedge X=\{Z\cap X:Z\in\xi\}$ - центрированное семейство $u-$замкнутых множеств в uX с пустым пересечением. Зафиксируем $f_0\in\mathcal{F}$. Тогда $\beta_u g_{f_0}(x)\neq 0$. Пусть $Z_f=\{y\in\beta_u X:|\beta_u g_{f_0}(y)|\geq\varepsilon\}$. Тогда $x\in Z_f$ и $y\in Z_f\cap X$ влечет $|f(x)|\leq 1/\varepsilon$, т.е. f ограничено на $Z_f\cap X$. Противоречие.

Обратно, пусть ξ - центрированная система $u-$замкнутых множеств в uX такая, что каждой функции $f\in\mathcal{F}$ существует $Z_f\in\xi$, на котором f ограничено. Так как $\beta_u X$ компактно, то $F_0=\bigcap\{[Z]_{\beta_u X}:Z\in\xi\}\neq\varnothing$. Достаточно показать, что $F_0\subset X$. Покажем, что $[Z_f]_{\beta_u X}\subset coz(\beta_u g_f)$ каждой функции $f\in\mathcal{F}$. Каждая f ограничена на Z_f, т.е. $|f(x)|\leq M=const\neq 0$ для любой точки $x\in Z_f$. Тогда, естественно, имеем $|\beta_u g_f(x)|\geq M^{-1}$ для всех $x\in[Z_f]_{\beta_u X}$. Таким образом, для любой точки $x\in[Z_f]_{\beta_u X}$ имеем $\beta_u g_f(x)\neq 0$, т.е. $x\in coz(\beta_u g_f)$. Итак, $F_0=\bigcap\{[Z]_{\beta_u X}:Z\in\xi\}\subset\bigcap\{[Z_f]_{\beta_u X}:f\in\mathcal{F}\}\subset X$. □

СЛЕДСТВИЕ 3.2.6. *Пусть* $\mathcal{F}\subset C_u(X)$ - *полное семейство* $u-$

непрерывных функций и $|\mathscr{F}|\leq\mathfrak{m}$. *Тогда равномерное пространство* uX *есть пересечение семейства функционально открытых множеств в компакте* $\beta_u X$ *мощности* $\leq\mathfrak{m}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует непосредственно из теоремы 3.2.5. □

На основе выше изложенных результатов определим аналоги $\mathfrak{N}(\mathfrak{m})-$ пространств, введенных З. Фроликом [32], в категории $ZUnif$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2.7. Пусть $\mathfrak{m}$ - некоторый кардинал. Равномерное пространство uX называется $coz-\mathfrak{N}(\mathfrak{m})-$*пространством*, если существует семейство $\mathscr{F}$ $u-$непрерывных функций мощности $\leq\mathfrak{m}$.

ТЕОРЕМА 3.2.8. *Равномерное пространство* uX *является* $coz-\mathfrak{N}(\mathfrak{m})-$ *пространством, если и только, если существует* $coz-$*совершенное отображение* g *из* uX в $\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть пространство uX является $coz-\mathfrak{N}(\mathfrak{m})-$ пространством. Следовательно существует полное семейство $\mathscr{F}$ $u-$ непрерывных функций мощности $\leq\mathfrak{m}$. Пусть $g=\underset{f\in\mathscr{F}}{\Delta} f:uX\to\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$. Тогда по теореме 3.2.3 g $coz-$совершенно.

Обратно, пусть g $coz-$совершенно отображает uX в $\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}=\prod_{s\in S}\mathbb{R}_s$, где $\mathbb{R}=\mathbb{R}_s$ для всех $s\in S$ и $|S|=\mathfrak{m}$. Пусть $f_s=\pi_s\circ g$, где $\pi_s:\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}\to\mathbb{R}_s$ - естественная проекция. Каждая $f_s:uX\to\mathbb{R}_s$ является $coz-$морфизмом как композиция $coz-$морфизма g и проекции π_s (которая, естественно, является $coz-$морфизмом). Ясно, что $g(x)=\{f_s(x):s\in S\}$. Тогда из теоремы 3.2.3 следует, что семейство $\{f_s\}_{s\in S}$ $u-$непрерывных функций является полным. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.9. *Пусть* $\mathscr{F}$ - *полное семейство* $u-$*непрерывных функций на равномерном пространстве* uX *и* F - *замкнутое подпространство* X . *Тогда семейство* $\mathscr{F}|_F=\{f|_F: f\in\mathscr{F}\}$ - $u'-$ *непрерывных функций на* $u'F$, *где* $u'=u|_F$, *является полным.*

Замкнутое подпространство $coz-\mathfrak{N}(\mathfrak{m})-$пространства является $coz-\mathfrak{N}(\mathfrak{m})-$пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует непосредственно из теорем 3.2.2 и 3.2.3. □

Следующее утверждение является частным случаем теоремы 2.10 в работе [32].

ТЕОРЕМА 3.2.10. *Равномерное пространство uX является $\mathbb{R}-z_u-$полно, если и только, если оно $coz-$гомеоморфно некоторому замкнутому подпространству $\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ для некоторого $\mathfrak{m}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует непосредственно из теоремы 3.2.2. □

ТЕОРЕМА 3.2.11. *Для равномерного пространства uX следующие условия равносильны:*

(1) Существует $\mathcal{F}$ - полное семейство $u-$непрерывных функций мощности $\leq \mathfrak{m}$.

(2) Существует $coz-$совершенное отображение из uX в $\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$.

(3) Существует $coz-$совершенное отображение из uX в $coz-\mathfrak{N}(\mathfrak{m})-$пространство.

(4) uX есть пересечение $\mathfrak{m}$ функционально открытых множеств в Самюэлевской компактификации s_uX.

(5) uX есть пересечение $\mathfrak{m}$ функционально открытых множеств в $\beta-$подобной компактификации β_uX.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует непосредственно из всех определений $coz-\mathfrak{N}(\mathfrak{m})-$пространств. □

ТЕОРЕМА 3.2.12. *Пусть $f: uX \to vY$ $coz-$совершенное сюръективное отображение и vY $coz-\mathfrak{N}(\mathfrak{m})-$пространство. Тогда равномерное пространство uX также является $coz-\mathfrak{N}(\mathfrak{m})-$пространством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\beta_u f: \beta_u X \to \beta_v Y$ - непрерывное продолжение на $\beta-$подобные компактификации β_uX и β_vY $coz-$совершенного отображения f. Так как vY - $coz-\mathfrak{N}(\mathfrak{m})-$пространство, что, в силу теоремы

3.2.10. vY есть пересечение $\mathfrak{m}$ функционально открытых в $\beta_v Y$ множеств, т.е. $Y=\bigcap_{s\in\mathfrak{m}} U_s$, где U_s функционально открыто в $\beta_v Y$ для любого $s<\mathfrak{m}$. Так как $X\subset\beta_u f^{-1}(Y)$, то $X=\bigcap_{s\in\mathfrak{m}}\beta_u f^{-1}(U_s)$, где каждое $\beta_u f^{-1}(U_s)$ функционально открыто в $\beta_u X$ для каждого $s<\mathfrak{m}$. Следовательно, uX является $coz-\mathfrak{N}(\mathfrak{m})-$ пространством. □

3.3. О coz – псевдокомпактных равномерных пространствах

Следующее определение принадлежит А.А.Чекееву и пока не опубликовано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3.1. Равномерное пространство uX называется $coz-$ *псевдокомпактным*, если всякая $u-$непрерывная функция ограничена, т.е. $C_u(X)=C_u^*(X)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3.2. Ясно, что всякое $coz-$псевдокомпактное равномерное пространство является равномерно псевдокомпактным в смысле А.А.Борубаева [2]. Метрическое $coz-$псевдокомпактное равномерное пространство является топологически псевдокомпактным, следовательно, является метрическим компактом, в то время как, существуют равномерно псевдокомпактные не компактные метрические пространства. Например, “метрический ёж” $J(\mathfrak{m})$ колючести $\mathfrak{m}$ [13, Пример 4.1.5].

ТЕОРЕМА 3.3.3. *Для любого равномерного пространства uX следующие условия равносильны:*

(1) uX $coz-$псевдокомпактно.

(2) Каждое локально конечное $u-$открытое семейство непустых $u-$ открытых множеств в uX конечно.

(3) Каждое локально конечное $u-$открытое поктырие X непустыми $u-$открытыми множествами конечно.

(4) Каждое локально конечное $u-$открытое покрытие пространства uX содержит конечное подпокрытие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $(1)\Rightarrow(2)$. Предположим, (2) не выполнено. Тогда существует счётное локально конечное $u-$открытое семейство $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Пусть $x_n\in U_n$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда существуют такие $u-$непрерывные функции $f_n\in C_u(X)$, что $f_n(x_n)=\{n\}$ и $f_n(X\setminus U_n)\subset\{0\}$. В силу локальной конечности семейства $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ функция, определаемая формулой $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{n}|f_n(x)|$ для любой точки $x\in X$, является $u-$непрерывной [26] и неограниченной, т.е. uX не $coz-$ псевдокомпактно. Противоречие доказывает (1).

Импликации (2)$\Rightarrow$(3) и (3)$\Rightarrow$(4) очевидны.

(4)$\Rightarrow$(1). Пусть $f_n \in C_u(X)$ - произвольная $u-$непрерывная функция на пространстве uX. Тогда семейство $\{f^{-1}((i-1,i+1)) : i \in \mathbb{Z}\}$ - локально конечное $u-$открытое покрытие uX, из которого можно выделить конечное подпокрытие, следовательно функция f является ограниченной, и пространство uX $coz-$псевдокомпактно. □

ТЕОРЕМА 3.3.4. *Для произвольного равномерного пространства* uX *следующие условия равносильны:*

(1) uX $coz-$*псевдокомпактно.*

(2) Для каждой убывающей последовательности $U_1 \supset U_2 \supset ...$ *непустых* $u-$*открытых множеств в* uX *выполняется* $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} [U_n] \neq \varnothing$.

(3) Для каждого счётноцентрированного семейства $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $u-$*открытых в* uX *множеств* $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} [V_n]_X \neq \varnothing$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1)$\Rightarrow$(2). Пусть uX $coz-$псевдокомпактно и $U_1 \supset U_2 \supset ...$ - убывающая последовательность непустых $u-$открытых множеств в uX. Тогда, в силу теоремы 3.3.3, последовательность $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ не является локально конечной, т.е. существует точка $x \in X$ такая, что её каждая окрестность пересекает бесконечно много множеств U_n. Ясно, что выполнение $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [V_n]_X \neq \varnothing$.

(2)$\Rightarrow$(3). Положим $U_1 = V_1, U_2 = V_1 \cap V_2, ..., V_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} V_k, ...$. Тогда построенная последовательность $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ является убывающей, и имеем, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [U_n]_X = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [V_n]_X \neq \varnothing$.

(3)$\Rightarrow$(1). Для некоторой $u-$непрерывной функции $f : uX \to \mathbb{R}$ множество $V_n = \{x \in X : |f(x)| > n\}$ $u-$открыто и семейство $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ счётноцентрированно. Имеем $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [V_n]_X = \varnothing$. Противоречие. Следовательно, функция f ограничена и пространство uX $coz-$псевдокомпактно. □

ТЕОРЕМА 3.3.5. *Равномерное пространство* uX $coz-$*псевдокомпактно если и только, если* $u=u_p^z$, *т.е.* uX *является Волмэн предкомпактным равномерным пространством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть равномерное пространство uX $coz-$ псевдокомпактно и u_{cf}^z - $coz-$тонкая равномерность на X [33]. Равномерность u_{cf}^z имеет базу из всех локально конечных $coz-$аддитивных $u-$открытых покрытий равномерного пространства uX [27, 28]. Тогда, в силу теоремы 3.3.3, $u_{cf}^z = u_p^z$. Равномерность u содержится в u_{cf}^z, следовательно, $u-$предкомпактная равномерность, т.е. $u_p = u$ и $u \subseteq u_p^z$. С другой стороны, для любой ограниченной $u-$непрерывной функции $f: uX \to \mathbb{R}$ функция $f \circ i: u_p^z X \to \mathbb{R}$, где $i: u_p^z X \to uX$ - равномерно непрерывное тождественное отображение, является $u-$ непрерывной. Ясно, что относительно предкомпактной равномерности на $\mathbb{R}$ отображение $f \circ i$ равномерно непрерывно, следовательно, равномерно непрерывно и отображение f. Равномерность u_p^z слабая относительно $C_u^*(X)$, следовательно $u_p^z \subseteq u$, т.е. $u = u_p^z$.

Обратно, если $u = u_p^z$, то любая $u-$непрерывная функция ограничена. □

ТЕОРЕМА 3.3.6. *Равномерное пространство* uX $coz-$*псевдокомпактно если и только, если любая центрированная последовательность* $u-$*замкнутых множеств имеет непустое пересечение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует такая последовательность $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $u-$замкнутых в uX множеств такая, что $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n = \varnothing$. Покажем, что в этом случае, uX не $coz-$псевдокомпактно. Пусть $Z_n = Z(f_n) = \{x \in X : f_n(x) = \{0\}$, где $f_n \in C_u(X)$. Тогда для функции $f(x) = \sum_{n=1}^{n} | f_n(x)|/2^n$, для любой точки $x \in X$, имеем $f \in C_u(X)$ [26]. Так как $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n = \varnothing$, то $f(x) \neq 0$ для любой точки $x \in X$. Следовательно, $g = 1/f \in C_u(X)$ [26] и $|g| \geq z^n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, т.е. функция g не ограничена. Это означает, что uX не $coz-$ псевдокомпактно.

Обратно, пусть uX не $coz-$псевдокомпактно. Тогда существует не ограниченная $u-$непрерывная функция $f \in C_u(X)$. Множество $Z_n = \{x \in X : | f(x) | \geq 0\}$ $u-$замкнуто семейство $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$ центрировано, но $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n = \varnothing$. □

СЛЕДСТВИЕ 3.3.7. *Равномерное пространство* uX $coz-$*псевдокомпактно если и только, если каждый* z_u-*ультрафильтр является счётноцентрированным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть uX $coz-$псевдокомпактно и p - произвольный z_u-ультрафильтр. Тогда для любой последовательности $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset p$ имеем $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n \neq \varnothing$.

Обратно, если последовательность $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $u-$замкнутых множеств центрирована, то она содержится в z_u-ультрафильтре p, который счётноцентрирован, следовательно $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n \neq \varnothing$, т.е. uX $coz-$псевдокомпактно. □

СЛЕДСТВИЕ 3.3.8. *Равномерное пространство* uX $coz-$*псевдокомпактно если и только, если* $\beta_u X = \upsilon_u X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если uX $coz-$псевдокомпактно, то $\beta_u X = \upsilon_u X$ по следствию 3.3.8. и по построению $\beta_u X$ и $\upsilon_u X$ [26].

Обратно, если $\beta_u X = \upsilon_u X$, то по следствию 3.3.8, то uX *является* $coz-$ псевдокомпактным равномерным пространствам. □

ТЕОРЕМА 3.3.9. *Пусть* $f : uX \to vY$ - *сюръективный* $coz-$*морфизм и* uX $coz-$*псевдокомпактно. Тогда* vY *также* $coz-$*псевдокомпактно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g : vY \to \mathbb{R}$ - произвольная $u-$непрерывная функция. Тогда $g \circ f : uX \to \mathbb{R}$ также $u-$непрерывна и является ограниченной в силу, $coz-$псевдокомпактности uX . Следовательно, g также ограничена и vY $coz-$псевдокомпактно. □

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В категории $ZUnif$ установлены основные свойства понятий C_u^* и C_u - вложенности, аналогичные $C_u^* -$ и $C_u -$вложенности в категории $Tych$.

Доказан аналог теоремы Урысона о необходимом и достаточном условий для продолжения $coz -$морфизма с подпространства на всё пространство, и как следствие выведена теорема Титце.

Доказано, что для характеризации реалкомпактных, в категори $ZUnif$, пространств достаточно это делать с помощью некоторого полного семейства $u -$непрерывных функций и пространство реалкомпактно в категории $ZUnif$ если и только, если существует полное семейство $u -$непрерывных функций.

ВЫВОДЫ

В категории $ZUnif$ доказаны новые научные результаты, аналогичные известным результатам из категории $Tych$ и разработана методика $coz-$ морфизмов в категории $ZUnif$.

В категории $ZUnif$:

- доказан аналог теоремы А.Д.Тайманова о продолжении $coz-$морфизма в компакт категории $ZUnif$ со всюду плотного подпространства на всё пространство;
- доказан аналог теоремы Вулиха – Энгелькинга о продолжении $coz-$ морфизма в реалкомпакт категории $ZUnif$ со всюду плотного подпространства на всё пространство;
- доказано сохранение $coz-$совершенных отображений любыми произведениями в категории $ZUnif$;
- установлены в категории $ZUnif$ категорные характеристики $coz-$ совершенных и $\mathscr{R}-coz-$совершенных отображений;
- установилено, что реалкомпактность в категории $ZUnif$ сохраняется в сторону прообраза $coz-$совершенными, а сторону образа сильно $coz-$ совершенными отображениями;
- построен пример, показывающий, что в категории $ZUnif$ аналог теоремы Пономарёва – Фролика не имеет места;
- доказан аналог теоремы Урысона в категории $ZUnif$;
- установлена характеристика реалкомпактности в категории $ZUnif$ при помощи полного семейства $u-$непрерывных функций.
- развита теория $coz-$псевдокомпактных пространств, а именно, установлены основные свойства и характеристики $coz-$псевдокомпактных пространств.

СПИСОК ЦИТИРУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Архангельский, А.В.** Основы общей топологии в задачах и упражнениях [Текст]: учеб. пособие для вузов /А.В. Архангельский, В.И. Пономарев— М.: Наука, 1974. - 525с.
2. **Борубаев, А.А**. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения [Текст]: монография /А.А. Борубаев— Б.: Илим, 1991. - 171с.
3. **Бурбаки, Н.** Общая топология. Основные структуры[Текст]: монография /Н. Бурбаки - М.: Физматгиз, 1968. – 273 с.
4. **Вайнштейн, И.А.** О замкнутых отображениях метрических пространств, [Текст] /И. А. Вайнштейн //ДАН СССР, 1947, 57. - С. 319 - 321.
5. **Вулих, Б. 3.** О распространении непрерывных функций в топологических пространствах [Текст] /Б.З. Вулих //Магем. сб., 1953, 30. - С. 167 - 170.
6. **Пономарев, В. И.** Об открытых отображениях нормальных пространств [Текст] /В.И. Пономарев //ДАН СССР, (1959), 126. – С. 716 - 718.
7. **Тайманов, А.Д.** О распространении непрерывных отображений топологических пространств [Текст] /А.Д. Тайманов //Матем. сб., 1952, 31. – С. 459 - 463.
8. **Чанбаева, А.И.** On closed mappings of uniform spaces [Текст] /А.И Чанбаева //Вестник Карагандинск. ун-та, 2015.- №2 (78). - С. 152 – 156.
9. **Чанбаева, А.И.** Об u-совершенных отображениях [Текст] /А.И Чанбаева //Проблемы современной науки и образования, Москва, РФ – 2016.- №10 (52) - С. 16 - 20.
10. **Чанбаева, А.И.** О замкнутых отображениях равномерных пространств [Текст] /А.А Чекеев, А.И Чанбаева //Вестник КНУ им.Ж.Баласагына, Бишкек - 2014. Вып. 4. - С. 22 – 28.
11. **Чанбаева, А.И.** О замкнутых и совершенных отображениях равномерных пространств [Текст] /А.А Чекеев, А.И Чанбаева //Наука и новые технологии, , Бишкек -2014.- №4. - С. 3 - 6.

12.**Чанбаева, А.И.** Совершенные отображения в подкатегории [Текст] /А.А Чекеев, А.И Чанбаева //Вестник науки и образования, Москва, РФ – 2016. - №6 (18). - С. 18 - 21.

13.**Энгелькинг, Р.** Общая топология [Текст]: учеб. для вузов /Р.Энгелькинг —М.:Мир, 1986. – 752 с.

14.**Aarts, J. M.** Dimension и Extensions [Text] /J. M.Aarts, T. Nishiura. - North-Holland, 1993. - 331 p.

15.**Alexandroff P.S.** Über stetige Abbildungen kompakter Räume [Text] /P.S. Alexandroff //Math. Ann. 96 (1927), 555 - 571.

16.**Alo, A.R.** Normal Topological Spaces [Text] /A.R. Alo, H.L. Shapiro - Cambridge University Press, 1974. - 306 p.

17.**Aronszajn, N.** Über ein Urbild problem [Text] /N. Aronszajn //Fund. Math. 17 (1931), 92—121.

18.**Chanbaeva, A.I.** On special closed mappings of uniform spaces [Text]: Book of Abstracts of V Congress of Turkic World Mathematicians /A.A. Chekeev, T.J. Kasymova, A.I. Chanbaeva //Bulan-Sogottu, Kyrgyzstan, June 5-7, 2014, p. 28.

19.**Chanbaeva, A.I.** On special closed mappings of uniform spaces [Text] /A.A. Chekeev, T.J. Kasymova, A.I. Chanbaeva //Proceedings of V Congress of Turkic World Mathematicians, Bulan-Sogottu, Kyrgyzstan, June 5-7, 2014.- P. 14 - 17.

20.**Chanbaeva, A.I.** On closed mappings of uniform spaces [Text] /A.A. Chekeev, T.J. Kasymova, A.I. Chanbaeva //TWMS J. Pure Appl. Math., Baku, Azerbaijan, 2015.- v.6, №1.- P. 78 - 83.

21.**Chanbaeva, A.I.** On u-perfect mappings [Text]: Book of Abstracts /A.A. Chekeev, A.I. Chanbaeva //Issyk Kul, International Mathematical Forum, Kyrgyzstan, Bozteri, 24-27 June, 2015.- P.16.

22.**Chanbaeva, A.I.** On u-perfect mappings [Text] /A.A. Chekeev, A.I. Chanbaeva //Вестник КРСУ, 2016.- Том 16, №5.- P. 81 - 84.

23.**Chanbaeva, A.I.** On cozero mappings of uniform spaces [Электронный ресурс]./A.A. Chekeev, T.J Kasymova., A.I.Chanbaeva – Электронный журнал ВАК КР, ISSN 1694-7878, 2017, № 1. - 8 р.– Режим доступа: http://vak.kg/jurnalVAK/

24.**Charalambous, M. G.** A new covering dimension function for uniform spaces [Text] /M.G. Charalambous //J. London Math. Soc. (2)11, (1975), 137 - 143.

25.**Charalambous, M.G.** The dimension of metrizable subspaces of Eberlein compacta и Eberlein compactifications of metrizable spaces [Text] /M.G. Charalambous //Fundamenta Mathematicae 182, (2004), 41 - 52.

26.**Chekeev, A.A.** Uniformities for Wallman compactifications and realcompactifications [Text] /A.A. Chekeev //Topol. Appl.,V.201, (2016), 145 - 156.

27.**Chekeev, A.A.** Ultrafilter-completeness on zero-sets of uniformly continuous functions [Text] /A.A. Chekeev, T.J. Kasymova //TOPOSYM-2016, 25-29 July (Prague, Czech Republic), Topology Atlas, 2016.- P.76. (to appear)

28.**Chekeev, A.A.** Epi-reflective hull of all metric uniform spaces class with given weight [Text] /A.A. Chekeev, T.J. Kasymova //International conference dedicated 120 anniversary of K. Kuratowski, 2016, 27-30 September (Lviv, Ukraine), Topology Atlas, 2016.- P. 12 - 15.

29.**Engelking, R**. Remarks on real-compact spaces [Text] /R. Engelking //Fund. Math. 55 (1964), 303 - 308.

30.**Franklin, S.P.** On epi-reflective hulls [Text] /S.P. Franklin //Gen.Topol. and its Appl.,1,(1971), 29 - 31.

31.**Frink, O.** Compactifications и seminormal spaces [Text] /O. Frink //Amer. J. Math., 86, (1964), 602 - 607.

32. **Frolik, Z.** Applications of complete families of continuous functions to the theory of Q-spaces[Text] /Z.Frolik //Czech. Math. J. 11 (1961), 115—133.

33.**Frolik, Z.** A note on metric-fine spaces [Text] /Z.Frolik //Proc. Amer. Math. Soc., V.46, n.1, 1974, 111 - 119.

34.**Frolik, Z.** Four functors in paved spaces [Text]: In seminar uniform spaces 1973-4 /Z.Frolik //Matematický ústav USAV, Praha, (1975), 27 - 72.

35.**Gillman, L**. Rings of continuous functions [Text] /L. Gillman, M.Jerison — New York, 1960. - 303 p.
36.**Hager**, **A. W.** Perfect maps and epi-reflective hulls [Text] /A.W. Hager //Can. J. Math. XXVII(1), (1975), 11 - 24.
37.**Herrlich, H.** Categorical topology [Text] /H. Herrlich //Gen. Topol. and its Appl., 1, (1971), 1 - 15.
38.**Hewitt, E.** Rings of real-valued continuous functions, I. [Text] /E.Hewitt //Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948), 45 - 99.
39.**Hohti, A.** On Uniform Paracompactness . [Text]: Mathematica dissertationes /A Hohti - Suomalaisen Tiedeakatemian toimituksia /A/1 (36), Helsinki, (1981). – 46 p.
40.**Hurewicz, W.** Über stetige Bilder von Punktmengen [Text] /Hurewicz W //Proc. Akad. Amsterdam 29 (1926).-P. 1014 - 1017.
41.**Isbell, J.R.** Uniform spaces [Text] /J.R. Isbell - Providence, 1964. - 175 p.
42.**Isiwata, T**. Mappings and spaces [Text] /T. Isiwata //Pacific J. of Math. 20 (1967).- P. 455 - 480.
43.**Katetov, M.** Measures in fully normal spaces [Text] /M. Katetov //Fund. Math. 38 (1951).- P. 73 - 84.
44.**Leray, J.** L'anneau spectral el l'anneau filtre d'homologie d'un espace locale-ment compact et d'une application continue [Text] /J.Leray //J. de Math. Pures et Appl. 29 (1950).-P. 1-80.
45.**Mrówka, S.** Some properties of Q-spaces [Text] /S.Mrówka //Bull. Acad. Pol. Sci. Cl. III 5 (1957).- P. 947 - 950.
46.**Mrówka, S.** $\beta-$like compactifications [Text] /S.Mrówka //Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, 24(3-4), (1973).- P. 279 - 287.
47.**Nachbin, L**. On the continuity of positive linear transformations [Text]: In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians /L. Nachbin //Cambridge, Mass. 1950, vol. I. — Providence, (1952). - P. 464 - 465.
48.**Shapiro, H. L.** Paracompactness in uniform spaces [Text] /H. L. Shapiro, F.A. Smith //Topol. Proc., 1978, V.3. – P. 179 - 197.

49.**Shapiro, H. L.** Classes of locally finite collections in topological and uniform spaces [Text] /H. L. Shapiro, F.A. Smith //Topol. Proc., 1982, V.7, 167 - 179.

50.**Shirota, T.** A class of topological spaces [Text] /T.Shirota //Osaka Math. J. 4 (1952).- P. 23 - 40.

51.**Sierpinski, W.** Sur une propriete des ensembles G_δ [Text] /W. Sierpinski //Fund. Math. 16 (1930).-P. 173 - 180.

52.**Steiner, A.K.** Nest generated intersection rings in Tychonoff spaces [Text] /A.K. Steiner, E. F. Steiner //Trans. Amer. Math. Soc. 148,(1970), 589 - 601.

53.**Stoilow, S.** Sur les transformations continues et la topologie des fonctions analytiques. [Text] /S.Stoilow //Ann. Sci. Ecole Normale Sup. 45 (1928). - P. 347 - 382.

54.**Tamano, H.** A note on the pseudo-compactness of the product of two spaces [Text] /H. Tamano //Mem. Coll Sci. Univ. Kyoto Ser. A 33 (1960), 225 - 230.

55.**Tietze, H.** Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind [Text] /H Tietze //J. fur die reine und angew Math. 145 (1915). – P.9 - 14.

56.Weyl, H. Die Idee der Riemannschen Fläche. [Text] /H. Weyl - Leipzig, 1913. – 200 p.