НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Ж.БАЛАСАГЫНА

Диссертационный совет Д 01.17.560

На правах рукописи
УДК 517.95

БАЙСЕРКЕЕВА АЙНУРА БЕКТУРГАНОВНА

МНОГОМЕРНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Бишкек – 2018

Работа выполнена на кафедре «Высшая математика, технология обучения математике и информатике» Иссык-Кульского государственного университета им. К. Тыныстанова

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Аблабеков Б.С.**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор **Искандаров С.**

кандидат физико-математических наук, доцент **Эгембердиев Ш.А.**

Ведущая организация: Ошский технологический университет им. М.М. Адышева, адрес г. Ош, ул. Исанова 81.

Защита диссертации состоится «6 марта» 2018г. в 14.00 часов на заседании диссертационного совета Д 01.17.560 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата физико-математических наук при Институте математики НАН Кыргызской Республики и Кыргызском Национальном университете им. Ж. Баласагына по адресу: Кыргызстан, 720054, г. Бишкек, ул. Абдымомунова 328, лабораторный корпус №6 КНУ, аудитория 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН Кыргызской Республики по адресу: Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а, и на сайте ИМ НАН КР www math.aknet.kg

Автореферат опубликован «___» __________2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н., профессор **Байзаков А.Б.**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Обратными задачами для дифференциальных уравнений называют задачи определения неизвестных коэффициентов, правой части, а также начальных или граничных условий и решений дифференциальных уравнений по некоторой дополнительной информации (переопределении) о решении прямой задачи.

Теория обратных задач является важным самостоятельным направлением исследований в области дифференциальных уравнений.

Большие практическое значение имеют такие задачи для этих уравнений, в котором искомыми являются правая часть дифференциального уравнения, коэффициенты дифференциального оператора, начальные и граничные условия. Эти неизвестные элементы начальных и начально-краевых задач определяется по дополнительной информации (переопределении) о решении прямой (начальной или начально-краевой) задачи.

В настоящее время теория обратных задач математической физики активно развивается представителями целого ряда математических школ, в том числе Московской (основанной А.Н. Тихоновым) и Сибирской (основанной М.М. Лаврентьевым и В.Г. Романовым а также их учениками такими как Ю.Е. Аниконов, А.Л. Бухгейм, А.М. Денисов, С.И. Кабанихин, А.И. Прилепко, В.Г. Яхно и др.

Вопросы корректности одномерных обратных задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка были исследованы в работах А.Асанова, Э.Р.Атаманова, Б.С.Аблабекова, М.Ш.Мамаюсупова, А.И.Кожанова, С.Н. Шергина, С.Г. Пяткова и других.

Б.С.Аблабековым рассмотрен случай двумерной обратной задачи определения коэффициента по финальному переопределению. В работах А.Ш.Любановой исследована однозначная разрешимость обратной задачи нахождения неизвестного коэффициента, зависящего от времени, по дополнительной информации на границе. W. Rundell, применяя полугрупповой подход, исследовал модельную обратную задачу восстановления источника.

Однако, многомерные обратные задачи восстановления источников по интегральному переопределению, переопределению во внутренней точке, а также многомерная коэффициентная обратная задача с зависимостью от пространственных переменных не были исследованы. Это определяет актуальность темы диссертации.

Связь темы диссертации **с государственными программами.** Диссертация выполнялась в рамках научной темы кафедры высшей и прикладной математики «Некорректные и обратные задачи математической физики» ИГД и ГТ им. У. Асаналиева при КГТУ им. И. Раззакова.

Цель и задачи исследования. Применением и развитием методов математической физики, функционального анализа и теории обратных задач, получить достаточные условия однозначной разрешимости прямых задач для псевдопараболических уравнений; исследовать разрешимость многомерных обратных задач восстановления правых частей и коэффициента для псевдопараболических уравнений третьего порядка с различными дополнительными условиями.

Научная новизна работы полученных результатов. Все результаты, полученные в диссертации являются новыми и имеют строгое доказательство. Дано дальнейшее развитие теории многомерных обратных задач для псевдопараболических уравнений. Впервые с помощью псевдопараболической регуляризации построено и обосновано приближенное решение некорректной задачи Коши с обратным временем для двумерного уравнения теплопроводности.

Впервые методом шкалы банаховых пространств исследованы многомерные обратные задачи для псевдопараболических уравнений.

Теоретическая и практическая ценность. В теоретическом отношении результаты диссертации продолжают развитие теории обратных задач математической физики. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многомерных обратных задач для уравнений четвертого и более высокого порядков, а также при решении прикладных задач, приводящих к таким уравнениям. Результаты также могут быть использованы при чтении специальных курсов для магистров, аспирантов по теории обратных и некорректных задач для направлений «Математика», «Прикладная математика и информатика», а также другим инженерным специальностям.

Методы исследования. Применяются и развиваются метод операторных уравнений Вольтерра, метод Галеркина, метод шкалы банаховых пространств, метод Фурье, метод преобразования Фурье.

Положения, выносимые на защиту

1. Получение явных решений задачи Коши и начально-краевой задачи для двумерного псевдопараболического уравнения.
2. Построение приближенного решения некорректной задачи Коши с обратным временем для двумерного уравнения теплопроводности. Построение примера типа Адамара.
3. Доказательство теоремы существования и единственности решения задачи определения источника для двумерного псевдопараболического уравнения по переопределению во внутренней точке.
4. Получение достаточных условий об однозначной разрешимости обратной задачи определения источника зависящего от пространственных переменных для двумерного псевдопараболического уравнения по финальному переопределению**.**
5. Установление достаточных условий об однозначной разрешимости обратной задачи нахождения функции источника зависящее от времени для двумерного псевдопараболического уравнения по интегральному переопределению.
6. Доказательство локальной теоремы существования и единственности решения многомерной коэффициентной обратной задачи в классе аналитических функций по части переменных.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих семинарах и международных конференциях:

– кафедры теоретической и прикладной математики Иссык-Кульского государственного университета им.К.Тыныстанова, г. Каракол (руководитель профессор, д.т.н. Зиялиев К.Ж.);

– кафедры высшей и прикладной математики ИГД и ГТ им. акад. У.А. Асаналиева при КГТУ (руководитель профессор, д.ф.-м.н. Б.С. Аблабеков 2015-2017 гг.);

– на восьмой международной научной школе-конференции «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач», Новосибирск, 2016 г;

– на 3-й международной научно-практической конференции «Современные проблемы физико-математических наук» (Россия, г. Орел, 23-26 ноября 2017 г.).

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Основные результаты диссертации опубликованы в 9 работах, в том числе 8 журнальных статьях [1-3, 5-9], рекомендованных ВАК для публикации и в 1 тезисе докладов [4] международной конференции.

Личный вклад соискателя. В совместных работах постановка задач и основные идеи методов исследования предложены научным руководителем, а доказательство основных теорем и все научные выводы принадлежат соискателю.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из оглавления, списка обозначений и определений, применяемых в работе, введения, трёх глав, которые разбиты на разделы, выводов и библиографического списка, включающего 129 наименования, 9 из которых являются работами автора по теме диссертации. Объём диссертации составляет 87 страниц машинописного текста, набранного шрифтом Times News Roman размером 14 пт. согласно инструкции ВАК КР от 25.10.1015 г.

Нумерация теорем, лемм и формул - тройная. Первая цифра означает номер главы, вторая - номер раздела, а третья - номер теоремы, леммы, формулы.

Автор выражает глубокую признательность и искреннюю благодарность научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Аблабекову Бактыбаю Сапарбековичу за постановки задач, постоянное внимание и полезные советы при обсуждении работы.

В автореферате приняты следующие обозначения, соглашения и определения:

$\in$ – означает “принадлежит”;

$\forall$ – означает “для любого”;

$\exists$ – означает “существует”;

$\exists!$ – означает “существует единственное”;

R^n – n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $R^1 = R$;

$\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i} = u_{x_i}$ - частная производная по координате x_i;

$\nabla u \equiv grad\ u = \{u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n}\}$; $\Delta_2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$;

$D_x^{(\alpha)} u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} .. \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\quad |\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ - мультииндекс;

I – единичный оператор;

$C^l(\Omega), (l = 0, 1, \ldots)$ – пространство l - раз непрерывно дифференцируемых в области Ω функций, в частности, $C^0(\Omega) = C(\Omega)$;

$C^\infty(R^n)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций на R^n;

$C^{(n,m)}(Q_T)$ – пространство функций $v(x,t)$, определенных в Q_T и таких, что $\dfrac{\partial^{k+l} v}{\partial x^k \partial t^l} \in C(Q_T)$ при $0 \le k \le n, \quad 0 \le l \le m$;

$M_\gamma(Q_T)$ – класс функций $v(x,t)$, заданных на Q_T, для которых имеет место оценка;

$|v(x,t)| \le \beta \exp\{\gamma |x|\}, x \in R, 0 \le t \le T$, $\gamma \ge 0$ - вещественное число, $\beta = const > 0$;

$M_\gamma(R)$ – класс функций $f(x)$, для которых имеет место оценка

$|f(x)| \le \beta \exp\{\gamma |x|\}, \quad x \in R$, $\beta = const > 0$;

$C_{M_\gamma}^{(n,m)}(Q_T)$ – множество функций из $C^{(n,m)}(Q_T)$, которые вместе со своими производными вплоть до порядка (n,m) принадлежат $M_\gamma(Q_T)$, т.е. $\dfrac{\partial^{k+l} v}{\partial x^k \partial t^l} \in M_\gamma(Q_T)$ при $0 \le k \le n, \quad 0 \le l \le m$, аналогично определяется пространство $C_{M_\gamma}^{(n)}(R)$;

$L_2(\Omega)$ – множество суммируемых в смысле Лебега в Ω функций $f(x)$, для которых $|f(x)|^2$ интегрируема по области Ω. При этом скалярное произведение и норма в $L_2(\Omega)$ соответственно определяется так:

$$< u, v > = \int\limits_\Omega u(x) v(x) dx, \ \|u\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{< u, u >} = \left(\int\limits_\Omega |u(x)|^2 dx \right)^{1/2};$$

X – произвольное банахово пространство: $C(0,T;X)$ – пространство функций $u : (0,T) \to X$, непрерывных на $[0,T]$ и принимающих значения из X, с нормой $\|u\|_{C(0,T;X)} = \max\limits_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_X$, в частности, $C(0,T;L_2(\Omega))$ - банахово пространство с нормой $\|u\|_{C(0,T;L_2(\Omega))} = \max\limits_{t \in [0,T]} \|u(x,t)\|_{L_2(\Omega)}$;

$L_2(0,T;X)$ – пространство интегрируемых по Лебегу на $[0,T]$ функций из $[0,T]$ в X с нормой $\|u\|_{L_2(0,T;X)} = \left(\int\limits_0^T \|u(t)\|_X^2\, dt\right)^{1/2}$, в частности $L_2(0,T;L_2(\Omega)) = L_2(\Omega_T)$;

$W_2^l(\Omega)$ - гильбертово пространство, состоящее из элементов $L_2(\Omega)$, имеющих квадратично суммируемые по области Ω обобщенные производные до порядков l с нормой

$$\|u\|_{W_2^l(\Omega)} = \left[\int\limits_\Omega \left(|u(x)|^2 + \sum_{|k|=1}^{l}\sum_{|k|}\left|D^{(k)}u(x)\right|^2 dx\right)\right]^{1/2},$$

где символ $D^{(k)}$ означает любую производную от $u(x)$ по x до порядка k, а $\sum\limits_{|k|}$ - суммирование по всевозможным производным целого порядка k;

$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ – подпространство $W_2^1(\Omega)$, полученное замыканием бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций по норме пространства $W_2^1(\Omega)$;

$\Delta_x u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ - оператор Лапласа;

$\tilde{f}(\xi) = (Ff)(\xi) = \int\limits_{R^n} f(x)e^{-i(x,\xi)}dx$ - преобразование Фурье функции $f(x) \in L_1(R^n)$;

Определение 1. Пусть каждому вещественному числу $S > 0$ поставлено в соответствие банахово пространство A_S (норма в котором обозначается символом $\|\cdot\|_S$), причем выполнено условие

$$\varphi \in A_S, \quad S' < S \Rightarrow \varphi \in A_{S'}, \|\varphi\|_{S'} \le \|\varphi\|_S.$$

Тогда объединение этих пространств $\bigcup\limits_{0<S} A_S$ называется шкалой банаховых пространств.

Введем в рассмотрение шкалу банаховых пространств $\bigcup\limits_{0<S} A_S(r)$, аналитических функций $\varphi(y), y \in R^n$,

$\|\varphi(y)\|_S(r) := \sup\limits_{|y|\le r} \sum\limits_{|\alpha|=0}^{\infty} \dfrac{S^{|\alpha|}}{\alpha!}\left|D^\alpha \varphi(y)\right| < \infty$, для мультииндекса α: $\alpha! = (\alpha_1)!(\alpha_2)!\cdots(\alpha_n)!$.

Пространство $A_s(r)$ с нормой $\|\varphi(y)\|_s(r)$ является банаховым пространством аналитических функций. Считая параметр r фиксированным, а параметр s - переменным, мы получим шкалу банаховых пространств аналитических функций $A_S(r)$, $r > 0$, $S > 0$.

Введенное пространство обладает следующими свойствами операций умножения и дифференцирования:

1.Если $\varphi_1(y)\in A_S(r),\quad \varphi_2(y)\in A_S(r)$, то $\|\varphi_1\varphi_2\|_S \le \|\varphi_1\|_S\|\varphi_2\|_S$.

2. Если $\varphi(y)\in A_S(r)$, то $D^\alpha\varphi(y)\in A_{S'}(r)$ для всех $S'\in(0,S)$ и для любого α, а также справедливо неравенство $\|D^\alpha\varphi\|_{S'}(r)\le C_\alpha\|\varphi\|_S(r)/(S-S')^{|\alpha|}$, где постоянная C_α зависит только от α.

Из этого неравенства, в частности следует

$$\left\|\frac{\partial^k\varphi}{\partial y^k}\right\|_{S'}(r)\le k^k\|\varphi\|_S(r)/(S-S')^k,\ \ \|\Delta\varphi\|_{s'}(r)\le\frac{4n}{(S-S')^2}\|\varphi\|_s(r).$$

Функции переменных x, y, t, аналитические по переменной y, будем рассматривать как абстрактные функции переменных x, t со значениями в A_s и использовать для обозначения их нормы в A_s символ $\|\cdot\|_s(x,t)$.

Краткое изложение содержания диссертации

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, формулируется цель работы, приводится обзор литературы по теме диссертации.

В первой главе приведены вспомогательные утверждения, теоремы и леммы, необходимые для последующих глав диссертации.

Первая глава состоит из 2-х разделов. В разделе 1.1 дается краткий обзор литературы.

В следующем разделе приводятся результаты по задаче Коши для двумерного псевдопараболического уравнения, а также некоторые сведения, используемые в дальнейшем.

Вторая глава состоит из 3-х разделов и в ней рассматриваются две прямые задачи для двумерного псевдопараболического уравнения и одна некорректная задача Коши с обратным временем для двумерного уравнения теплопроводности. Основным результатом этой главы является доказательство корректности рассматриваемых задач, что важно при исследовании обратных задач. А также построено приближенное решение рассматриваемой некорректной задачи.

В разделе 2.1 методом Фурье доказываются теоремы существования и единственности решения смешанной задачи для двумерного псевдопараболического уравнения: найти решение задачи

$$u_t(x,y,t)-a^2[(u_t+u)_{xx}(x,y,t)+(u_t+u)_{yy}(x,y,t)]=0,\quad (x,y,t)\in\Pi_T, \qquad (1)$$

$$u(x,y,0)=\varphi(x,y),(x,y)\in\Pi; \qquad (2)$$

$$\begin{cases} u(0,y,t)=u(l,y,t)=0,\ 0\le y\le m,\ 0\le t\le T,\\ u(x,0,t)=u(x,m,t)=0,\ 0\le x\le l,\ 0\le t\le T.\end{cases} \qquad (3)$$

непрерывное в замкнутой области $\overline{\Pi}_T$, где $\Pi_T = \{(x,y,t):(x,y)\in\Pi, t\in(0,T]\}$, $\Pi = \{(x,y): 0<x<l, 0<y<m\}$.

ТЕОРЕМА 2.1.1. Пусть $\varphi(x,y)\in C^2(\overline{\Pi})$, $\varphi'''(x,y)\in L_2(\Pi)$ и $\varphi(0,y)=\varphi(l,y)=0, \varphi_{xx}(0,y)=\varphi_{xx}(l,y)=0$, $\varphi(x,0)=\varphi(x,m)=0, \varphi_{yy}(x,0)=\varphi_{yy}(x,m)=0$. Тогда $\exists!$ решение задачи (1)-(3), которое представимо в виде

$$u(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{kn}\exp\left(-\frac{a^2\lambda_{kn}}{1+a^2\lambda_{kn}}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{m}y.$$

В разделе 2.2 методом преобразования Фурье изучается задача Коши для двумерного псевдопараболического уравнения, которая заключается в нахождении функции $u(x,y,t)\in C([0,T];C(R^2)\cap L_p(R^2)$, удовлетворяющей в классическом смысле уравнению

$$Lu \equiv u_t(x,y,t)-\left[(u_{xxt}+u_{yyt})(x,y,t)\right]-\alpha\left(u_{xx}+u_{yy}\right)(x,y,t)=f(x,y,t),\quad (x,t)\in Q_T, \qquad (4)$$

и начальному условию

$$u(x,0)=u_0(x,y),\quad x\in R^2, \qquad (5)$$

где $Q_T=\{(x,y,t)|\ (x,y)\in R^2, t\in(0,T]\}$.

Справедлива

ТЕОРЕМА 2.2.1. Пусть $u_0(x,y)\in C(R^2)\cap L_p(R^2)$, $f(x,y,t)\in C([0,T];C(R^2)\cap L_p(R^2)$. Тогда $\exists!$ решение $u(x,y,t)\in C([0,T];C(R^2)\cap L_p(R^2)$ задачи Коши (4), (5). Это решение имеет вид

$$u(x,y,t)=\int_0^t\int_{R^2}G_1(x-z,y-s,t-\tau)f(z,s,\tau)dzdsd\tau+$$
$$+\int_{R^2}G(x-z,y-s,t)u_0(z,s)dzds,$$

где

$$G(x,y,t)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{R^2}\exp\left(-\frac{\alpha\left(\xi^2+\eta^2\right)}{1+\xi^2+\eta^2}t+i(x\xi+y\eta)\right)d\xi d\eta,$$

$$G_1(x,y,t)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{R^2}\frac{1}{1+\xi^2+\eta^2}\exp\left(-\frac{\alpha\left(\xi^2+\eta^2\right)}{1+\xi^2+\eta^2}t+i(x\xi+y\eta)\right)d\xi d\eta.$$

В разделе 2.3 изучается некорректная задача Коши с обратным временем для двумерного уравнения теплопроводности.

Пусть

$$\Pi_T = \{(x,y,t):(x,y)\in\Pi, t\in(0,T]\},\ \Pi=\{(x,y): 0<x<\pi, 0<y<\pi\}.$$

Задача 1. Найти функцию $u(x,y,t)\in C([0,T];\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Pi))\cap C^1([0,T];L_2(\Pi))$, удовлетворяющую в области Π_T уравнению

$$u_t(x,y,t)-\Delta_2 u(x,y,t)=0, \quad (x,y,t)\in\Pi_T, \tag{6}$$
начальному условию
$$u(x,y,T)=\varphi(x,y),(x,y)\in\Pi; \tag{7}$$
и граничным условиям
$$\begin{cases} u(0,y,t)=u(\pi,y,t)=0,\ 0\le y\le\pi,\ 0\le t\le T, \\ u(x,0,t)=u(x,\pi,t)=0,\ 0\le x\le\pi,\ 0\le t\le T. \end{cases} \tag{8}$$

ТЕОРЕМА 2.3.1. Пусть $\varphi(x,y)\in C^2(\overline{\Pi})$, $\varphi'''(x,y)\in L_2(\Pi)$ и $\varphi(0,y)=\varphi(l,y)=0, \varphi_{xx}(0,y)=\varphi_{xx}(l,y)=0$, $\varphi(x,0)=\varphi(x,m)=0, \varphi_{yy}(x,0)=\varphi_{yy}(x,m)=0$.

Тогда $\exists!$ решение задачи (6)-(8) $u(x,y,t)\in C([0,T];\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Pi))\bigcap C^1([0,T];L_2(\Pi))$, которое представимо в виде
$$u(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{kn}\exp\left(-(k^2+n^2)(t-T)\right)\sin kx\sin ny,$$
где
$$\varphi(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{kn}\sin kx\sin nx,$$
$$\varphi_{kn}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x,y)\sin kx\sin ny\,dxdy.$$

Построим пример типа Адамара. Пусть $\varphi(x,y)=e^{-\sqrt{k+n}}\sin kx\sin ny$. Тогда решение задачи (6)-(8) имеет вид
$$u(x,y,t)=e^{-\sqrt{k+n}}e^{(k^2+n^2)(T-t)}\sin kx\sin ny. \tag{9}$$

При $k\to\infty, n\to\infty$ функция $e^{-\sqrt{k+n}}\sin kx\sin ny$, представляющая собой данные задачи (6) – (8) стремится к нулю с производными всех порядков. Тем не менее, решение задачи, как видно из формулы (9), при любом фиксированном $0<t<T$ является неограниченной. Следовательно, какую бы норму мы ни выбрали для оценки начальных данных, мы не сможем утверждать, что из малости этой нормы вытекает малость решения.

Для регуляризации задачи (6)-(8), заменим ее «близкой» задачей, а именно, заменим уравнение (6) на двумерное псевдопараболическое уравнение с условиями (7), (8), т.е. задачей
$$u_{\alpha t}(x,y,t)-\Delta_2 u_\alpha(x,y,t)-\alpha\Delta_2 u_{\alpha t}(x,y,t)=0, \quad (x,y,t)\in\Pi_T, \tag{10}$$
$$\begin{cases} u_\alpha(0,y,t)=u_\alpha(\pi,y,t)=0,\ 0\le y\le\pi,\ 0\le t\le T, \\ u_\alpha(x,0,t)=u_\alpha(x,\pi,t)=0,\ 0\le x\le\pi,\ 0\le t\le T. \end{cases} \tag{11}$$
$$u_\alpha(x,y,0)=\varphi(x,y), \quad 0\le x\le\pi, 0\le y\le\pi. \tag{12}$$
где $\alpha>0$ – параметр регуляризации. Методом Фурье нетрудно доказать, что если функция $\varphi(x,y)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.3.1, то $\exists!$решение задачи (10)-(12), которое дается по формуле

$$u_\alpha(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{kn}\exp\left(\frac{(k^2+n^2)}{1+\alpha(k^2+n^2)}(T-t)\right)\sin kx\sin ny,$$

где

$$\varphi(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{kn}\sin kx\sin nx,$$

$$\varphi_{kn}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi\varphi(x,y)\sin kx\sin ny dxdy.$$

Справедлива оценка устойчивости.

ТЕОРЕМА 2.3.2. Пусть для функции выполнены условия теоремы 2.3.1. Тогда для решения задачи (10)-(12) справедлива оценка

$$\|u_\alpha(x,y,t)\|\le\exp\left(\frac{2}{\alpha}(T-t)\right)\|\varphi(x,y)\|.$$

Третья глава посвящена изучению многомерных обратных задач определения источников и коэффициента для псевдопараболического уравнения.

В разделе 3.1 изучена следующая:

Обратная задача. В области Q_T найти функцию $f(t)$, связанную с двумерным псевдопараболическим уравнением

$$Lu\equiv u_t(x,t)-\alpha\Delta_2 u_t(x,t)-\beta\Delta_2 u(x,t)=f(t)h(x,t)+g(x,t),\ (x,t)\in Q_T, \tag{13}$$

с начальным условием

$$u(x,0)=u_0(x),\qquad x\in R^2, \tag{14}$$

а также удовлетворяющую условию переопределения

$$u(x_0,t)=\psi(t),\qquad x_0\in R^2,\quad 0\le t\le T. \tag{15}$$

Здесь $\alpha,\beta-$ положительные постоянные, $u_0(x), h(x,t), g(x,t), \psi(t)$ - заданные функции, $Q_T=\{(x,t)|x\in R^2, t\in(0,T]\}$.

Определение 3.1.1. Под решением обратной задачи будем понимать задачу определения пары функций $\{u(x,t,f(t))\}\in C_{M_\nu}^{(4,1)}(Q_T)\times C([0,T])$, которая удовлетворяет условиям (13)–(15).

ТЕОРЕМА 3.1.1. Если $u_0(x)\in C_{M_\gamma}^{(4)}(R^2)$, $h(x,t),g(x,t)\in C_{M_\gamma}^{(2,0)}(\overline{\Omega}_T)$, и $|h(x_0,t)|\ge h_0>0\ \forall t\in[0,T]$, $\alpha\,\Delta_2 h(x_0,t)\ne -h(x_0,t)$ и выполнены условия согласования $u_0(x_0)=\psi(0)$,то $\exists!$ решение обратной задачи (13)-(15) такое, что $\{u(x,t,f(t))\}\in C_{M_\nu}^{(4,1)}(Q_T)\times C([0,T])$.

В разделе 3.2 рассматривается задача идентификации функции источника, которая не зависит от одной из пространственных переменных. Дополнительное условие задается на плоскости, ортогональной той переменной, от которой искомый коэффициент не зависит.

Введем следующие обозначения:
$Ц_T = \left\{ (x,t) \middle| \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le T \right\}$, $T > 0$; $Q_T = \left\{ (z,t) \middle| \, z \in R, \quad 0 < t \le T \right\}$;
$D = \left\{ (x,z) \middle| \, x \in (0,l), z \in R \right\}$; $D_T = D \times (0,T]$.

Обратная задача. Найти пару функций $\{u(x,z,t), f(x,t)\}$ из условий

$$u_t(x,z,t) - (u_t + u)_{xx}(x,z,t) - (u_t + u)_{zz}(x,z,t) = f(x,t)h(x,z,t), (x,z,t) \in D_T, \quad (16)$$

$$u(x,z,0) = u_0(x,z), \quad (x,z) \in \overline{D}, \quad (17)$$

$$u(0,z,t) = \varphi_1(z,t), \quad u_x(0,z,t) = \varphi_2(z,t), \quad (z,t) \in \overline{Q}_T. \quad (18)$$

$$u(x,0,t) = \psi(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{Ц}_T, \quad (19)$$

где $u_0(x,z)$, $h(x,z,t)$, $\psi(x,t)$, $\varphi_i(z,t), i = 1,2$ - заданные функции.

Будем считать, что выполнены условия согласования

$$\begin{aligned} &u_0(0,z) = \varphi_1(z,0), \quad u_{0x}(0,z) = \varphi_2(z,0), \\ &u_0(x,0) = \psi(x,0), \varphi_1(0,t) = \psi(0,t), \quad \varphi_{2z}(0,t) = \psi_x(0,t), \end{aligned} \quad (20)$$

ТЕОРЕМА 3.2.1. Пусть функции $\varphi_j(z,t) \in C^{(2,1)}(\overline{Q}_T), j = 1,2,$ $u_0(x,z) \in C^{(4,2)}(\overline{D})$, $h(x,z,t) \in C^{(2,1)}(\overline{D}_T)$ принадлежат $A_{S_0}(a,b)$ при фиксированных t и x, и непрерывны соответственно для $t \in [0,T]$ и $x \in [0,l]$, $\psi(x,t) \in C^{(2,1)}\left(\overline{Ц}_T\right)$, а для функций $u_0, \varphi_1, \varphi_2, \psi$ выполнены условия согласования (20), кроме того, $\left| h(x,0,t) \right| \ge \alpha > 0, \alpha - const$, $\max\limits_{x,t} \left\| u_0(x,z,t) \right\|_{S_0} = R_0$. Тогда $\forall R_0$ найдется такое $a > 0$, $a \cdot S_0 < l$, $a = \left(S_0, T, l, R_0 \right)$, что для всех $S \in (0, S_0)$ в области $F_s = \left\{ (x,z,t) \middle| 0 \le x \le a(S_0 - S) < l, |z| < r, 0 < t < T \right\}$ $\exists!$ решение обратной задачи (16)- (19), причем

$$\left\| u \right\|_S (x,t) \le \frac{R_0}{S_0 - S}.$$

В разделе 3.3 изучается разрешимость двумерной обратной задачи определения источника с финальным переопределением. Теорема единственности устанавливается с помощью априорных оценок, а теорема существования доказывается методом Галеркина.

Обратная задача. Найти пару функций $\left\{ u(x,y,t), f(x,y) \right\}$ из условий

$$u_t(x,y,t) - \Delta_2 (u_t + \alpha u)(x,y,t) = f(x,y)h(t) + g(x,y,t), \quad (x,y,t) \in \Omega_T, \quad (21)$$

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad 0 \le x \le \pi, \quad 0 \le y \le \pi, \quad (22)$$

$$u(0,y,t) = u(\pi,y,t) = 0, 0 \le y \le \pi, 0 \le t \le T, \quad (23)$$

$$u(x,0,t) = u(x,\pi,t) = 0, \quad 0 \le x \le \pi, 0 \le t \le T, \quad (24)$$

$$u(x,y,T) = \psi(x,y), \quad 0 \le x \le \pi, \quad 0 \le y \le \pi, \quad (25)$$

где $\Omega_T = \left\{ (x,y,t) \middle| (x,y) \in П, t \in (0,T] \right\}$, $П = \left\{ (x,y) \middle| x \in (0,\pi), y \in (0,\pi) \right\}$, $h(t), g(x,t)$ - известные функции, Δ_2 - лапласиан по переменным x и y, $\alpha = const > 0$.

Пусть исходные функции $\varphi, \psi \in C^{(2)}([0,\pi] \times [0,\pi])$ и удовлетворяют условиям согласования:

$\varphi(0,y)=\varphi(\pi,y)=0, \quad \varphi(x,0)=\varphi(x,\pi)=0,$

$\psi(0,y)=\psi(\pi,y)=0, \quad \psi(x,0)=\psi(x,\pi)=0.$

ТЕОРЕМА 3.3.1. Если φ,ψ удовлетворяют перечисленным выше условиям, кроме того $h\in C^{(2)}([0,T]),$ $h>0,$ $h'(t)>0,$ $g\in C^{(1)}(0,T;L_2(\Pi))$, то $\exists!$решение обратной задачи (21) - (25), которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $u\in L_2(\Omega_T),$ $f\in L_2(\Pi),$ $\Delta_2 u=L_2(\Omega_T)$,

2) $u(x,y,t)$ удовлетворяет условиям (22) - (25),

3) (u,f) - решение уравнения (21).

В разделе 3.4 изучается разрешимость обратной задачи определения функции источника в псевдопараболическом уравнении с интегральным переопределением.

Пусть Ω- ограниченная область в R^n с гладкой границей $\partial\Omega\in C^2$, $\Omega_T=\Omega\times(0,T),$где $T>0$- цилиндр с боковой поверхностью $S_T=\partial\Omega\times[0,T]$.

Обратная задача. Найти пару функций $\{u(x,t)\in C^1(0,T;L_2(\Omega)),\ f(t)\in C[0,T]\}$ из условий

$u_t(x,t)-\Delta_x u_t(x,t)-\beta\,\Delta_x u(x,t)+q(x,t)u(x,t)=f(t)h(x,t)+g(x,t),\ (x,t)\in\Omega_T,$ (26)

$$u(x,0)=\varphi(x), x\in\overline{\Omega}, \tag{27}$$

$$u\big|_{S_T}=0, \tag{28}$$

$$\int_{\Omega} u(x,t)w(x)dx=\psi(t), \quad 0\le t\le T, \tag{29}$$

где $q(x,t)\ge 0,$ $\beta\ge 0$- постоянные.

ТЕОРЕМА 3.4.1. Пусть функции $w(x)\in W_2^2(\Omega)\cap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega),$ $\psi(t)\in C^1([0,T]),$ $\varphi(x)\in W_2^2(\Omega),$ $h(x,t),g(x,t)\in C(0,T;L_2(\Omega))$ и $|<h,w>|\ge\delta>0$ для всех $t\in[0,T],$ $\frac{1}{2}\left[\delta^{-2}\|h\|_{C(0,T;L_2(\Omega))}\|\Delta w\|^2_{L_2(\Omega)}+1\right]<1$. Кроме того, выполнены условия согласования $\varphi\big|_{\partial\Omega}=0,$ $\int\limits_{\Omega}\varphi(x)w(x)dx=\psi(0)$. Тогда $\exists!$ решение обратной задачи (26)-(29) в классе $u\in C^1(0,T;L_2(\Omega)),$ $f\in C[0,T]$.

В разделе 3.5 рассматривается многомерная коэффициентная обратная задача для псевдопараболического уравнения. С помощью шкалы банаховых пространств доказана локальная теорема существования и единственности решения исследуемой задачи.

Пусть

$D_T=\{(x,y,t)\big|x\in(0,l),\ y\in R^n,\ t\in(0,T]\}, G_T=\{(x,t)\big|x\in(0,l),\ t\in(0,T]\}.$

Обратная задача. Найти пару функций $\{u(x,y,t),q(x,y)\}$из условий

$$u_t(x,y,t)=\Delta(u_t+u)(x,y,t)+q(x,y)(u_t+u)(x,y,t),\ (x,y,t)\in D_T, \tag{30}$$

$$u(x,y,0)=0 \quad (x,y)\in[0,l]\times R^n, \tag{31}$$

$$u(0,y,t)=\varphi_1(y,t),\, u_x(0,y,t)=\varphi_2(y,t), \quad (y,t)\in R^n\times[0,T], \tag{32}$$

$$u(x,y,T)=\psi(x,y), \quad (x,y)\in\overline{D}, \tag{33}$$

где

$\Delta\equiv\partial^2/\partial x^2+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}$, $\varphi_1(y,t)$, $\varphi_2(y,t)$, $\psi(x.y)$ – известные функции,

$\psi(x,y)\neq 0;\forall x\in(0,l);|\,y\,|\leq r$.

ТЕОРЕМА 3.5.1. Если заданные функции $\varphi_1(y,t),\varphi_2(y,t),\ 1/\psi(\xi,y),\psi_0(x,y)$ при фиксированных t и x принадлежат $A_{S_0}(r)$ и являются непрерывными по аргументам $t\in[0,T]$ и $x\in[0,l]$, причем

$$\max\Big[\max_t\|\varphi_1(y,t)\|_{S_0},\max_t\|\varphi_2(y,t)\|_{S_0},\ \max_x\|\psi(x,y)\|_{S_0},$$

$$\max_x\|\psi_{xx}(x,y)\|_{S_0},\ \max_x\|\Delta_y\psi(x,y)\|_{S_0}\ \max_x\|1/\psi(x,y)\|_{S_0}\Big]=R_0,$$

то $\forall R_0>0$ найдется такое $a>0,\ aS_0<l, a=(S_0,T,l,R_0)$, что для каждого $S\in(0,S_0)$ в области $F_S=\{(x,y,t)|0\leq x\leq a(S_0-S)<l,\,|\,y\,|<r,\,0<t<T\}$

$\exists!$ решение обратной задачи (30)-(33) такое, что $u\in A_S,\ q\in A_S$ при каждом $(x,t)\in Q_{ST}\equiv\{0<x<a(S_0-S),\,0<t<T\}\cap G_T$ и это решение непрерывно в Q_{ST} по переменным x, t, причем

$$\|u-u_0\|_S(x,t)\leq R_0/(S_0-S), \quad \|q-q_0\|_S(x)\leq R_0.$$

ВЫВОДЫ

В диссертации сформулированы и исследованы многомерные обратные задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка. Впервые получены следующие результаты:

- Используя явные решения соответствующих прямых задач и методом операторных уравнений Вольтерра, для обратных задач нахождения источников зависящих от времени с различными переопределениями получены достаточные условия об однозначной разрешимости;
- Методом квазиобращения построено приближенное решение некорректной задачи Коши с обратным временем для двумерного уравнения теплопроводности. Построен пример типа Адамара. Получена оценка устойчивости приближенного решения;
- Методом Галеркина доказана теорема об однозначной разрешимости обратной задачи восстановления источника зависящего от пространственных переменных;
- Методом шкалы банаховых пространств для многомерных обратных задач восстановления источника и коэффициента получены соответствующие достаточные условия об однозначной разрешимости.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. Байсеркеева А.Б. Явное решение задачи Коши для двумерного псевдопараболического уравнения[Текст] /Б.С.Аблабеков, А. Б. Байсеркеева //Известия ВУЗов Кыргызстана. 2015. № 10. С. 3-7.
2. Байсеркеева А.Б. О разрешимости двумерной обратной задачи определения источника [Текст] /Б.С.Аблабеков, А.Б.Байсеркеева //Известия ВУЗов Кыргызстана. 2015. № 10. С. 8-13.
3. Байсеркеева А.Б. О разрешимости смешанных задач для двумерного псевдопараболического уравнения [Текст] / Б.С.Аблабеков, А.Б. Байсер-кеева // Приволжский научный вестник. 2016. №10(62). С.5-9. (Россия).
4. Байсеркеева А.Б. Об одной двумерной обратной задаче для псевдопараболического уравнения [Текст] /Б.С.Аблабеков, А.Б. Байсер-кеева // Сборник тезисов восьмой международн. молодежной научной школы-конференции «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач», Новосибирск, 2016 г.- С. 15.
5. Байсеркеева А.Б. Обратная задача определения функции источника в псевдопараболическом уравнении с интегральным переопределением [Текст] / Б.С.Аблабеков, А. Б. Байсеркеева // Проблемы современной науки и образования. 2017. № 9 (91). С. 12-16.(Россия)
6. Байсеркеева А.Б. Локальная разрешимость многомерной обратной задачи для псевдопараболического уравнения [Текст] / Б.С.Аблабеков, А. Б. Байсеркеева //Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана, 2017.№7. С.3-9.
7. Байсеркеева А.Б. О разрешимости двумерной обратной задачи определения источника с финальным переопределением Текст] /А. Б. Байсеркеева //Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана, 2017.№7. С.20-26.
8. Байсеркеева А.Б. Задача Коши с обратным временем для двумерного уравнения теплопроводности[Текст] / Б.С.Аблабеков, А. Б. Байсеркеева //Изв. КГТУ им. И. Раззакова. 2017. –№4(44).- С.324– 329.
9. Байсеркеева А.Б. Обратная задача определения источника в двумерном псевдопараболическом уравнении. Случай задачи Коши [Текст] / Б.С.Аблабеков, А.Б.Байсеркеева // Современные проблемы физико-математических наук. Материалы III Международной научно-практической конференции 23 – 26 ноября 2017 г., Орел.- С.11-14.

Байсеркеева Айнура Бектургановнанын 01.01.02 - дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн “Псевдопараболалык теңдемелер үчүн көп өлчөмдүү тескери маселелер” аттуу диссертациялык ишинин

РЕЗЮМЕСИ

***Урунттуу сөздөр*:** Псевдопараболалык теңдемелер; Вольтерранын оператордук теңдемеси; Банахтын мейкиндиктеринин шкаласы, тескери маселелер; корректтүү эмес маселелер.

***Изилдөөнүн объекти*:** Псевдопараболалык теңдемелер үчүн көп өлчөмдүү тескери маселелер.

***Иштин максаттары*:** Үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдемелердеги ар түрдүү кошумча информациялар менен бош мүчөлөрдү жана коэффициенти табуу үчүн көп өлчөмдүү тескери маселелеринин чыгарылыштарынын жашоосун жана жалгыздыгы жөнүндөгү суроолорду изилдөө.

***Изилдөнүн ыкмалары*:** Вольтеррдин оператордук теңдемеси ыкмасы; Галеркин ыкмасы, Банах мейкиндигинин шкалалар ыкмасы.

***Изилдөнүн илимий жаңылыктары*:** Тиешелүү түз маселелердин чыгарылыштарынын, Вольтеррдин оператордук теңдемеси ыкмасы, Галеркин ыкмасы жана Банах мейкиндигинин шкалалар ыкмасынын жардамы менен тескери маселелердин чыгарылышын тургузуу. Бул ыкмалардын жардамы менен ар түрдүү кошумча шарттар менен көп өлчөмдүү псевдопараболалык теңдемесинин бош мүчөлөрүн жана коэффициентин табуу тескери маселелеринин чыгарылышынын жашоосуунун жана жалгыздыгынын жетиштүү шарттары табылды.

РЕЗЮМЕ

диссертационной работы на тему “Многомерные обратные задачи псевдопараболических уравнений», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление Байсеркеевой Айнуры Бектургановны

Ключевые слова: Псевдопараболические уравнения; операторные уравнения Вольтерра; шкала пространств Банаха; обратные задачи; некоректные задачи.

***Объекты исследования*:** Многомерные обратные задачи для псевдопараболических уравнений

Цель работы: исследование вопросов существования и единственности решения многомерных обратных задач определения правых частей и коэффициента для псевдопараболических уравнений третьего порядка с различными дополнительными условиями.

Методы исследования: Метод операторных уравнений Вольтерра, метод Галеркина, метод шкалы банаховых пространств.

Научная новизна работы. Дано дальнейшее развитие теории многомерных обратных задач для псевдопараболических уравнений. Впервые с помощью псевдопараболической регуляризации построено и обосновано приближенное решение некорректной задачи Коши с обратным временем для двумерного уравнения теплопроводности.

Впервые методом шкалы банаховых пространств исследованы многомерные обратные задачи для псевдопараболических уравнений.

SUMMARY

of dissertation «Multidimensional inverse problems of pseudoparabolic equations» submitted for the scientific of candidate of physical - mathematical sciences on speciality 01.01.02 - differential equations, dynamic systems and optimal control by Ainyra B. Baiserkeeva

Keywords: pseudoparabolic equations; Operator equations of Volterra, Banach scale; inverse problems, ill-posed problems.

Objects of research: Multidimensional inverse problems of pseudoparabolic equations**.**

Aims of paper: Investigation of questions of questions of the existence and uniqueness of the solution of multidimensional inverse problems for determining right-hand sides and the coefficient for third-order pseudo-parabolic equations with various additional conditions.

Methods of ınvestıgatıon**:** The Volterra operator equation method; the Galerkin method; method of the scale of Banach spaces

Scientific novelty of the work: Further development of the theory of multidimensional return tasks for the pseudo-parabolic equations is given. For the first time by means of pseudo-parabolic regularization the approximate solution of an ill-posed problem of Cauchy with the reverse time for the two-dimensional equation of heat conductivity is constructed and proved.

For the first time, by the method of the scale of Banach spaces, multidimensional inverse problems for pseudo-parabolic equations are investigated.

Подписано в печать 2.02.2018. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$
Офсетная печать. Объем 1,0 п.л.
Тираж 100 экз. Заказ 288.

Отпечатано в типографии КРСУ
720048, Бишкек, ул. Горького, 2