МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

БАТКЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СУЛЮКТИНСКИЙ РЕГИОНАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ

На правах рукописи
УДК 517.968.72+74

БАЙГЕСЕКОВ АБДИБАИТ МАЖИТОВИЧ

РАЗВИТИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛТЬЕСА

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель,
доктор физико-математических наук,
профессор А.Асанов

Бишкек – 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

Г Л А В А 3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛТЬЕСА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И ОПРЕДЕЛЕНИЙ

R - множество действительных чисел.

R_+ - множество неотрицательных чисел из R, т.е. $R_+ = [0, \infty)$ - полуось.

$\in$ - означает «принадлежит».

$\notin$ - означает «не принадлежит».

$\exists$ - означает «существует».

$\Rightarrow$ - означает «следует».

$\Leftrightarrow$ - означает «равносильно, эквивалентно».

$J = [t_0, \infty)$ - бесконечный полуинтервал, $t_0 \in R$. Этот интервал тоже называется полуось, если начало координат перенести в t_0.

$C(J, R)$ - пространство функций, определенных и непрерывных на полуинтервале J со значениями из R .

$C^k(J, R)$ - пространство функций, определенных и k раз непрерывно дифференцируемых на J со значениями из R .

В настоящей работе все фигурирующие функции, зависящие от t, (t, τ), x, y, z, являются непрерывными при $t \geq t_0$, $t \geq \tau \geq t_0$, $|x|, |y|, |z| < \infty$.

$x(t) \in L_g^p(J, R) \Leftrightarrow \int\limits_{t_0}^{\infty} |x(t)|^p dg(t) < \infty$ $(p > 0)$, где $g(t)$ - возрастающая на J функция.

$x(t) \notin L_g^p(J, R) \Leftrightarrow \int\limits_{t_0}^{\infty} |x(t)|^p dg(t) = \infty$ $(p > 0)$, где $g(t)$ - возрастающая на J функция.

$x(t) = O(1), t \in J \Leftrightarrow \exists\, M = const > 0$ такая, что $|x(t)| \leq M$. В этом случае говорят, что функция $x(t)$ ограничено на полуинтервале J.

$x(t)$ стремится к нулю при $t \to \infty$ означает: $\lim x(t) = 0, t \to \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [13]. Производной функции $f(t)$ по возрастающей $g(t)$ в точке $t \in (a,b)$ называется предел отношения приращения функции $\Delta f(t)$ к приращению функции $\Delta g(t)$ при стремлении приращения аргумента Δt к нулю:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta g(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{g(t+\Delta t) - g(t)} \ ,$$

если этот предел существует, и обозначается $f_g'(t)\, или\, \dfrac{df(t)}{dg(t)}$.

Формулы дифференцирования по возрастающей функции $g(t)$:

$$(Cu)'_{g(t)} = Cu'_{g(t)} \ (C = const); \qquad (u \pm v)'_{g(t)} = u'_{g(t)} \pm v'_{g(t)};$$

$$(uv)'_{g(t)} = u'_{g(t)}v + uv'_{g(t)}; \qquad \left(\frac{u}{v}\right)_{g(t)} = \frac{u'_{g(t)}v - uv'_{g(t)}}{v^2}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [13]. Для функции $K(t,\tau)$ частные производные первого и второго порядков находятся следующим образом:

$$K'_{g(t)}(t,\tau) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{K(t+\Delta t,\tau) - K(t,\tau)}{g(t+\Delta t) - g(t)} \quad \text{(если предел существует)} \ ;$$

$$K'_{g(\tau)}(t,\tau) = \lim_{\Delta \tau \to 0} \frac{K(t,\tau+\Delta\tau) - K(t,\tau)}{g(\tau+\Delta\tau) - g(\tau)} \quad \text{(если предел существует)} \ ;$$

$$K''_{g(t)g(\tau)}(t,\tau) = \frac{\partial K'_{g(t)}(t,\tau)}{\partial g(\tau)} \quad \text{(если предел существует)} \ ;$$

$$K''_{g(\tau)g(t)}(t,\tau) = \frac{\partial K'_{g(\tau)}(t,\tau)}{\partial g(t)} \quad \text{(если предел существует)} \ ;$$

$K''_{g(t)g(\tau)}(t,\tau) = K''_{g(\tau)g(t)}(t,\tau)$ (в силу непрерывности смешанных производных) .

Для функции четырех аргументов $K(t,x,s,y)$ частные производные первого и смешанного второго, третьего и четвертого порядков находятся аналогично определению 2.

ИУ – интегральное уравнение.

ИУВС – интегральное уравнение Вольтерра-Стилтьеса.

ИДУ – интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра .

ИДУВС – интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра-Стилтьеса.

Под $u(t,x) \in L^p_{\varphi,\psi}(G_1)$ $(p>0)$ понимается :

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |u(t,x)|^p d\varphi(t)\, d\psi(x) < \infty \qquad (p>0),$$

где $(t,x) \in G_1 = \{(t,x): o \le t < \infty,\ o \le x < \infty\}$ - бесконечный сектор.

Тогда при $p=1 \Rightarrow$ абсолютная суммируемость функции $u(t,x)$ на бесконечном секторе G_1, а при $p=2 \Rightarrow$ квадратичная суммируемость функции $u(t,x)$ на бесконечном секторе G_1.

Ограниченность функции $u(t,x)$ для $(t,x) \in G = J \times [a,b]$ означает:

$\sup\limits_{(t,x)\in G} |u(t,x)| < \infty$. где $a,b \in R$.

$C(G_0)$ - пространство непрерывных функций на $G_0 = \{(t,\tau): t_0 \le \tau \le t < \infty\}$.

В диссертации принята тройная нумерация внутри каждого раздела главы. Например, теорема 2.2.1 означает первую теорему раздела 2 главы 2; (3.4.2) – вторая формула раздела 4 главы 3.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы диссертации. Литературный анализ показывает, что ИДУВС и ИУВС становятся удобными математическими моделями для описания, изучения и прогнозирования процессов из многих отраслей науки и техники. Например, они применены для математического моделирования изучения устойчивости процессов с импульсным воздействием [22,с.194-196], процессов из оптимального управления [44], обратных задач теории рассеяния [52], процессов из динамической теории кинетических уравнений для классических и квантовых систем [62,50].

Изучение устойчивости и стабилизации таких процессов по истечении времени приводят к развитию исследований по качественной теории ИДУВС и ИУВС на полуоси. Во многих работах, в частности, в монографиях А.Д. Мышкиса [49], Е.А. Барбашина [22,с.194-196], А.В.Шелеста [62], Н.В. Азбелева, В.П. Максимова, Л.Ф. Рахматуллиной [3,4], В.Б. Колмановского, В.Р. Носова [43], в обзорной статье C.S. Hönig's [64], в препринте Л.А. Сахновича [52] развита общая и качественная теория некоторых классов этих уравнений, разработаны методы и указаны новые направления исследований. Исследования из монографии Е.А. Барбашина [22,с.194-196] по операторным уравнениям Вольтерра-Стилтьеса справедливы для решений некоторых частных классов ИУВС с двумя и несколькими независимыми переменными.

Исследования А.Н. Тихонова [55], М.М. Лаврентьева, В.Г. Романова, С.П. Шишатского [46,с.163-172], проведенные в связи с обратными задачами, показывают актуальность исследований по регуляризации и единственности решения интегральных уравнений Вольтерра и ИУВС с одним и несколькими независимыми переменными.

Заметим, что исследование по ограниченности на полуоси решений одного класса ИДУВС, проведенное Дж.Дж. Левиным (J.J. Levin) [65;63,с.201-213], показывает трудность исследований по ограниченности и другим асимптотическим свойствам решений ИДУВС и ИУВС на полуоси. Это вполне закономерно относится к ИДУВС и ИУВС с решениями, зависящих от одной и нескольких независимых переменных.

Отметим, что А. Асановым (2001) введено определение производной по возрастающей функции и им же показано (2003), что исследование асимптотических свойств решений ИДУВС с одним и несколькими независимыми переменными существенно облегчается.

В кандидатской диссертации Ж.О. Толубаева [58] исследованы ограниченность и квадратичная суммируемость решений скалярных и векторных ИДУВС, а также квадратичная суммируемость решения ИУВС второго рода по возрастающей функции первого и второго порядков на полуоси.

Более тщательный анализ работ других авторов показывает, что исследования по общей и качественной теории ИДУВС и ИУВС являются актуальными.

В настоящей диссертационной работе, во-первых, проводятся исследования по ограниченности и другим асимптотическим свойствам решений новых классов скалярных ИДУВС первого и второго порядков и ИУВС второго рода на полуоси, отличных от исследований Ж.О. Толубаева [58] , во-вторых, проводятся исследования по ограниченности и квадратичной суммируемости решений ИУВС второго рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях, по единственности и регуляризации решения ИУВС первого рода с двумя независимыми переменными в ограниченных областях.

Следовательно, тема исследований настоящей работы-актуальная.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими проектами. Работа выполнена в рамках проектов НИР Института теоретической и прикладной математики НАН КР: «Развитие и приложения компьютерного моделирования, асимптотических и аналитических методов в теории динамических систем, обратных и оптимизационных экономических задач в анализе геофизических данных для оперативного прогноза землетрясений»

(2012-2014), номер гос. регистрации № 0005756, «Развитие и приложения компьютерного моделирования, асимптотических, топологических и аналитических методов в теории устойчивости динамических систем, разрешимости обратных задач, экономических и геофизических процессов» (2015-2017), номер гос. регистрации № 0007125 и включены в отчеты по этим проектам.

Цель и задачи исследования. Применением и развитием качественных методов, разработанных в ИМ НАН КР, получить достаточные условия для степенной абсолютной интегрируемости на полуоси решения линейного ИУВС, оценки и асимптотических свойств решений и их первых производных слабо нелинейных ИДУВС первого и второго порядков соответственно на полуоси; квадратичной суммируемости и ограниченности на полуоси решений линейных и слабо нелинейных ИУВС второго рода с двумя независимыми переменными; регуляризации и единственности решения линейных ИУВС первого рода с двумя независимыми переменными.

Методика исследования. Применяются и развиваются метод преобразования уравнений, метод весовых и срезывающих функций, метод интегрирования по частям, метод интегральных неравенств с интегралом Стилтьеса, метод неотрицательных квадратичных форм, разработанные в ИМ НАН КР.

Научная новизна. Установлены достаточные условия абсолютной и квадратичной интегрируемости на полуоси решения линейного ИУВС второго рода без предположения, что этими свойствами обладает его свободный член, при этом доказана общая теорема и из нее выведены множество следствий - коэффициентных признаков; для оценки, ограниченности, стремления к нулю, абсолютной и квадратичной интегрируемости на полуоси любого решения слабо нелинейного ИДУВС первого порядка, при этом рассматривается случай, когда производная возрастающей функции, по которой ведется интегрирование, может быть разрывной в некоторых точках полуоси; ограниченности на полуоси любого решения и его первой производной слабо нелинейного ИДУВС второго порядка, также оценки, абсолютной и квадратичной интегрируемости на полуоси, стремления к нулю первой производной любого решения этого уравнения, при этом рассматривается случай, когда производная возрастающей функции, по которой ведется интегрирование, может быть разрывной в некоторых точках полуоси; абсолютной и квадратичной суммируемости на бесконечном секторе решения слабо нелинейного ИУВС второго рода с двумя независимыми переменными; для оценки и ограниченности решения линейного и слабо нелинейного ИУВС второго рода с двумя независимыми переменными в бесконечной полосе, при этом существенно используется возрастание функции интегрирования по пространственной переменной; единственности решения линейного ИУВС первого рода с двумя независимыми переменными в пространстве квадратично суммируемых функций в заданном прямоугольнике; регуляризируемости по М.М. Лаврентьеву и единственности решения линейного ИУВС первого рода с двумя независимыми переменными в пространстве непрерывных функций в заданном прямоугольнике.

В главе 2 и в разделах 3.1, 3.4, 3.5 установлены условия преимущественно типа знака функций.

Для установления этих результатов применены и развиты метод преобразования уравнений, метод весовых и срезывающих функций, метод интегрирования по частям, метод интегральных неравенств с интегралом Стилтьеса, метод неотрицательных квадратичных форм.

Теоретическая и практическая значимость. Настоящая работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть применены в общей и качественной теории ИДУВС и ИУВС, а также при анализе и прогнозировании некоторых процессов механики с импульсным воздействием, оптимального управления, динамической теории кинетических уравнений для классических и квантовых систем, обратных задач теории рассеяния.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

Установление достаточных условий:

- абсолютной и квадратичной интегрируемости на полуоси решения линейного ИУВС второго рода без предположения, что этими свойствами обладает его свободный член, при этом доказана общая теорема и из нее выведены множество следствий - коэффициентных признаков;
- для оценки, ограниченности, абсолютной и квадратичной интегрируемости на полуоси, стремления к нулю любого решения слабо нелинейного ИДУВС первого порядка, при этом рассматривается случай, когда производная возрастающей функции, по которой ведется интегрирование, может быть разрывной в некоторых точках полуоси;
- ограниченности на полуоси любого решения и его первой производной слабо нелинейного ИДУВС второго порядка, оценки, абсолютной и квадратичной интегрируемости на полуоси, стремления к нулю первой производной любого решения этого уравнения, при этом рассматривается случай, когда производная возрастающей функции, по которой ведется интегрирование, может быть разрывной в некоторых точках полуоси;
- абсолютной и квадратичной суммируемости на бесконечном секторе решения слабо нелинейного ИУВС второго рода с двумя независимыми переменными;
- для оценки и ограниченности решения линейного и слабо нелинейного ИУВС второго рода с двумя независимыми переменными в бесконечной полосе, при этом существенно используется возрастание

функции интегрирования по пространственной переменной, в случае ограниченности свободного члена этих уравнений;

- единственности решения линейного ИУВС первого рода с двумя независимыми переменными в пространстве квадратично суммируемых функций в заданном прямоугольнике;
- регуляризируемости по М.М. Лаврентьеву и единственности решения линейного ИУВС первого рода с двумя независимыми переменными в пространстве непрерывных функций в заданном прямоугольнике.

Личный вклад соискателя. Проблемы исследования по теме диссертационной работы поставлены научным руководителем А.Асановым. Все материалы, включенные в диссертацию, принадлежат автору.

Апробация результатов диссертации. Результаты настоящей диссертационной работы доложены и обсуждены на :

– семинаре Отделения математики КТУ «Манас» (рук. семинара д.ф.-м.н., проф. Асанов А., 2014-2017 гг., г. Бишкек);

– семинаре кафедры дифференциальных уравнений КНУ им. Ж. Баласагына (рук. семинара д.ф.-м.н., с.н.с. Байзаков А.Б., 15 мая 2015 г., г. Бишкек);

– V Международной научной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике», посв.85-летию академика НАН КР и члена-корреспондента РАН М.И. Иманалиева (13 сент. 2016 г., г. Бишкек);

– научно-теоретической конференции «Кыргызстандын түштүк-батыш чөлкөмүндө илимий изилдөө иштери : багыттары жана көйгөйлөрү», посв. 20 –летнему юбилею СГЭИ БатГУ (12 нояб. 2016 г., г Сулюкта КР).

– VI Конгрессе математического общества Тюркского мира (2-5 окт. 2017 г., г. Астана).

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Основное содержание диссертационной работы опубликовано в 9 статьях [16,18,37,19-21,38-40]. В совместных статьях: [16] постановка задачи принадлежит научному руководителю А. Асанову, [37-40] обсуждение результатов - соавтору С. Искандарову, доказательство теорем, вывод следствий и построение иллюстративных примеров - автору.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, содержащих 13 разделов, выводов и списка использованной литературы из 66 наименований, 95 стр. компьютерного текста.

В главе 1, состоящей из четырех разделов, приводятся обзор работ по асимптотическим свойствам решений интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра-Стилтьеса с одной независимой переменной на полуоси, а также по регуляризации и единственности решения интегральных уравнений Вольтерра и Вольтерра-Стилтьеса с двумя независимыми переменными; леммы о преобразованиях двойного интеграла Вольтерра - Стилтьеса, об интегрировании неравенства по возрастающей функции и об интегральных неравенствах Вольтерра - Стилтьеса на полуоси; теорема о регуляризации и единственности решения интегрального уравнения Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными, и заключение.

Глава 2, состоящая из четырех разделов, посвящена исследованиям по степенной абсолютной интегрируемости, оценке и ограниченности и другим асимптотическим свойствам решений скалярных ИУВС второго рода и ИДУВС первого и второго порядков на полуоси.

В разделе 2.1 установлены достаточные условия принадлежности пространствам $L_g^p(J,R) \quad (p=1,2)$ решения ИУВС:

$$x(t)+\int_{t_0}^{t} K(t,\tau)x(\tau)dg(\tau)= f(t), \qquad t \ge t_0 \tag{2.1.1}$$

без предположения, что его свободный член $f(t)\in L_g^p(J,R) \quad (p=1,2)$, где $g(t)$ - возрастающая функция.

В разделе 2.2 установлены достаточные условия для оценки, ограниченности на полуинтервале J, стремления к нулю при $t \to \infty$, принадлежности пространствам $L_g^p(J,R)$ $(p=1,2)$ любого решения

ИДУВС вида

$$x'(t)+a(t)x(t)+\int_{t_0}^{t} K(t,\tau)x(\tau)dg(\tau)= f(t)+F\left(t, x(t), \int_{t_0}^{t} H(t,\tau,x(\tau))dq(\tau)\right), \ t \ge t_0, \ (2.2.1)$$

где $g(t), q(t)$ - возрастающие функции, функции $F(t,x,y), H(t,\tau,x)$ удовлетворяют по пространственным переменным следующим условиям слабой нелинейности:

$$|F(t,x,y)| \le l(t)|x| + l_1(t)|y|, \ |H(t,\tau,x)| \le h(t,\tau)|x| \qquad (F,H)$$

с неотрицательными «коэффициентами Липшица» $l(t), l_1(t), h(t,\tau)$.

Показано, что производная возрастающей функции $g(t)$, по которой ведется интегрирование, может быть разрывной в некоторых точках полуинтервала J.

Раздел 2.3 посвящен установлению достаточных условий ограниченности на полуинтервале J решений и их первых производных, оценке, принадлежности пространствам $L_g^p(J,R)$ $(p=1,2)$, стремлению к нулю при $t \to \infty$ первых производных решений ИДУВС второго порядка вида

$$x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)+\int_{t_0}^{t} K(t,\tau)x'(\tau)dg(\tau)= f(t)+$$

$$+F_2\left(t, x(t), x'(t), \int_{t_0}^{t} H_2(t,\tau,x(\tau),x'(\tau))dq(\tau)\right), \ t \ge t_0, \qquad (2.3.1)$$

где $g(t)$, $q(t)$ - возрастающие функции, функции $F_2(t,x,y,z)$, $H_2(t,\tau,x,y)$ удовлетворяют по x,y,z следующим условиям слабой нелинейности:

$$|F_2(t,x,y,z)| \le l_0(t)|x| + l_1(t)|y| + l_2(t)|z|, \quad |H_2(t,\tau,x,y)| \le h_0(t,\tau)|x| + h_1(t,\tau)|y| \qquad (F_2, H_2)$$

с неотрицательными «коэффициентами Липшица» $l_k(t), h_\nu(t,\tau)$

$(k = 0,1,2;\ \nu = 0,1)$, при этом рассмотрен случай, когда производная возрастающей функции $g(t)$, по которой ведется интегрирование, может быть разрывной в некоторых точках полуинтервала J.

В раздел 2.4 проведен анализ результатам главы 2.

В главе 3, состоящей из шести разделов, проводятся исследования по ограниченности и квадратичной суммируемости решений ИУВС второго рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях, по единственности и регуляризации решения ИУВС первого рода с двумя независимыми переменными в ограниченных областях.

В разделе 3.1 установлены достаточные условия принадлежности пространствам $L^p_{\varphi,\psi}(G)$ $(p = 1,2)$ любого решения слабо нелинейного ИУВС второго рода с двумя независимыми переменными:

$$m(t,x)u(t,x) + \int_0^t a(t,x,s)u(s,x)d\varphi(s) + \int_0^x b(t,x,y)u(t,y)d\psi(y) = f(t,x) + F(t,x,u), \qquad (3.1.1)$$

где $(t,x) \in G = \{(t,x) : o \le t < \infty, o \le x < \infty\}$, $m(t,x)$, $a(t,x,s), b(t,x,y), f(t,x)$ - известные функции, причем $m(t,x) > 0$, $u(t,x)$- неизвестная функция. $\varphi(t), \psi(x)$- известные строго возрастающие непрерывные функции. $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$; $F(t,x,u)$– известная непрерывная функция, удовлетворяющая в области G_1 следующего условия слабой нелинейности:

$$|F(t,x,u)| \le g(t,x)|u| \qquad (F)$$

с неотрицательной $g(t,x)$.

Раздел 3.2 посвящен задаче об установлении достаточных условий ограниченности решения линейного ИУВС:

$$u(t,x)=\int_{t_0}^{t} K_0(t,x,s)u(s,x)d\varphi(s)+\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b} K_1(t,x,s,y)u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)+f(t,x), \quad (3.2.1)$$

где $(t,x)\in G=[t_0,\infty)\times[a,b]$, $K_0(t,x,s)$, $K_1(t,x,s,y)$, $f(t,x)$ - известные функции; $u(t,x)$ -неизвестная функция , $G_0=\{(t,x,s): t_0\le s\le t<\infty\ , a\le x\le b\}$, $G_1=\{(t,x,s,y): t_0\le s\le t<\infty\ , a\le y\le b, a\le x\le b\}$, $\varphi(t),\psi(x)$ - известные строго возрастающие непрерывные функции соответственно на $[t_0,\infty)$ и $[a,b]$, $\varphi(t)\in C^1[t_0,\infty)$, в случае ограниченности $f(t,x)$, $(t,x)\in G$.

В разделе 3.3 установлен аналог результата раздела 3.2 для следующего нелинейного ИУВС:

$$v(t,x)=\int_{t_0}^{t} H_0(t,x,s,v(s,x))\,d\varphi(s)+\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b} H_1(t,x,s,y,v(s,y))\,d\psi(y)d\varphi(s)+f(t,x), \quad (3.3.1)$$

где $(t,x)\in G=[t_0,\infty)\times[a,b]$, $H_0(t,x,s,v)$, $H_1(t,x,s,y,v)$, $f(t,x)$ - известные функции; $v(t,x)$ - неизвестная функция, $G_0=\{(t,x,s): t_0\le s\le t<\infty\ , a\le x\le b\}$, $G_1=\{(t,x,s,y): t_0\le s\le t<\infty\ , a\le y\le b, a\le x\le b\}$, $\varphi(t),\psi(x)$ - известные строго возрастающие непрерывные функции соответственно на $[t_0,\infty)$ и $[a,b]$, $\varphi(t)\in C^1[t_0,\infty)$, в случае ограниченности $f(t,x)$, $(t,x)\in G$.

В разделе 3.4 рассмотрено линейное ИУВС первого рода вида

$$\int_{0}^{t} a(t,x,s)u(s,x)d\varphi(s)+\int_{0}^{x} b(t,x,y)u(t,y)d\psi(y)+$$

$$+\int_{0}^{t}\int_{0}^{x} K(t,x,s,y)u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)=f(t,x), \quad (3.4.1)$$

где $(t,x)\in G=\{(t,x): o\le t\le T, o\le x\le l\}$, $a(t,x,s), b(t,x,y), K(t,x,s,y)$ - известные функции, $u(t,x)$- неизвестная функция. $\varphi(t),\psi(x)$- известные строго возрастающие непрерывные функции. $\varphi(0)=0,\ \psi(0)=0$, и установлены достаточные условия единственности этого уравнения в пространстве $L_2(G)$.

Раздел 3.5 посвящен построению регуляризирующего оператора по М.М. Лаврентьеву и достаточным условиям единственности решения в пространстве $C(G)$ для линейного ИУВС первого рода с двумя независимыми переменными:

$$\int_{t_0}^{t} K(t,x,s)u(s,x)d\varphi(s)+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} N(t,x,s,y)u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)= f(t,x), \qquad (t,x)\in G, \qquad (3.5.1)$$

где $u(t,x)$ - искомая функция, $K(t,x,s), N(t,x,s,y)$ - известные ядра, $f(t,x)$ - известная функция; $f(t_0,x)=0$ при $x\in[x_0,X]$; $G=\{(t,x): t_0\le t\le T, x_0\le x\le X\}$, $\varphi(t),\psi(x)$ - известные строго возрастающие непрерывные функции.

В разделе 3.6 анализированы результаты главы 3.

Построены иллюстративные примеры на все теоремы и на некоторые следствие глав 2, 3, показывающие естественность наложенных условий.

Г Л А В А 1. ОБЗОР РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

1.1. Обзор работ по свойствам решений интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра-Стилтьеса с одной независимой переменной, а также интегральных уравнений Вольтерра- тилтьеса с двумя независимыми переменными

Из список литератур монографиях А.Д. Мышкиса [49, с 340-349], В.Б. Колмановского, В.Р. Носова [43, с 409-444], В.А.Тышкевича [60, с 74-77], Н.В. Азбелева, В.П. Максимова, Л.Ф. Рахматуллиной [3, с 266-274; 4, с. 364-381] и из библиографии некоторых новых работ, составленной М.К.Керимовым [42] можно найти работы некоторых авторов по ограниченности и другим асимптотическим свойствам решений скалярных ИДУВС первого и второго порядков и ИУВС второго рода на полуоси, по ограниченности и квадратичной суммируемости решений ИУВС второго рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях, по единственности и регуляризации решения ИУВС первого рода с двумя независимыми переменными в ограниченных областях. Анализ показывает, что число таких работ немногочисленно. В цитированных работах имеются также работы, посвященным более общим операторным и функционально-дифференциальным уравнениям, содержащие частные классы ИУВС и ИДУВС.

Ниже дадим краткий обзор результатов некоторых работ, близких по содержанию к теме настоящей диссертационной работы.

В кандидатской диссертации Ж.О. Толубаева [58], наряду с другими результатами, развитием метода преобразования уравнений, метода неотрицательных квадратичных форм установлены достаточные условия принадлежности решения линейного и ИУВС (2.1.1) пространству $L_g^2(J, R)$ в случае, когда его свободный член $f(t) \in L_g^2(J, R)$; принадлежности пространству $L_g^2(J, R)$ и ограниченности на J решений линейного ИДУВС первого порядка вида (2.2.1) (в (2.2.1) $F(t, x, y) \equiv 0$) в случае, когда свободный член этого уравнения $f(t) \in L_g^2(J, R)$; принадлежности пространству $L_g^2(J, R)$ первых производных решений линейного ИДУВС второго порядка вида (в (2.3.1) $F_2(t, x, y, z) \equiv 0$) в случае, когда свободный член этого уравнения $f(t) \in L_g^2(J, R)$. Заметим, что в результатах относительно ИДУВС первого и второго порядков диссертации Ж.О. Толубаева [58] функция $g'(t) \in C(J, R)$. Отметим, что в своей диссертации Ж.О. Толубаев [58] некоторые свои результаты для скалярных и ИУВС и ИДУВС обобщил на системы таких уравнений.

Вопросы оценки, ограниченности на полуинтервале J и устойчивости решений функционально-дифференциальных уравнений, содержащие ИДУ с «распределенным запаздыванием» и некоторые ИДУВС, исследованы монографиях А.Д. Мышкиса [49] , В.Б. Колмановского, В.Р. Носова [43], В.А.Тышкевича [60], Н.В. Азбелева, В.П. Максимова, Л.Ф. Рахматуллиной [3, 4], Н.В. Азбелева, П.М. Симонова [5], в статьях В.А. Тышкевича [69], М.И. Артемьева, Ю.Н. Смолина [6], Л.М. Березанского [23], в работах С.Г. Карнишина [41], Ю.Н. Смолина [54], при этом использованы формула Коши интегрального представление решения и метод интегральных неравенств.

В статье J.J. Levin'a [65;63, с. 201-213] исследована ограниченность на полуоси решений одного класса нелинейных ИДУВС с помощью методов функционального анализа, где интегрирование ведется по функции с конечным изменением.

В статье J.J. Levin'a [66] изучена оценка и ограниченность на полуоси решения слабо нелинейного липшицевого ИУ типа Вольтерра с монотонным ядром и ограниченным свободным членом с конечным изменением и сделано замечания о возможности переноса этих результатов на нелинейного ИУВС на полуоси.

В статьях С. Искандарова [32, 33] доказаны леммы об интегральных неравенствах с интегралом Стилтьеса и они применены к исследованию ограниченности и других асимптотических свойств решений ИУ и ИДУ Вольтерра с негладкими ядрами. Из результатов этих работ [32, 33] следует, что с помощью лемм, установленных в них, можно изучить асимптотические свойства решений линейных и слабо нелинейных ИУВС и ИДУВС на полуоси, где интегрирование ведется, в частности, по возрастающей функции.

В статьях А. Абдукаримова [1] и [2] установлены достаточные условия квадратичной суммируемости на бесконечном секторе решений линейных скалярного и векторного двумерного ИУ Вольтерра второго рода соответственно, методом неотрицательных квадратичных форм и с применением неравенства Гельдера, в случае, когда изучаемым свойством обладают свободные члены рассматриваемых уравнений, при этом в [2] показана единственность решения в пространстве квадратично суммируемых на бесконечном секторе функций при тех же условиях.

В статье А.Асанова, А.М. Абдукаримова [15] установлены достаточные условия квадратичной интегрируемости решения линейного двумерного ИУВС второго рода на бесконечной области, где интегрирование по t и x ведется по возрастающим функциям $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ соответственно, в случае, когда изучаемым свойством обладает свободный член рассматриваемого уравнения.

В работе Э.М. Мухамадиева [48] установлены достаточные условие единственности решения ИУВС с разностным ядром второго рода на сегменте, где интегрирование ведется по функции с ограниченной вариацией.

В книге А. Саадабаева [51] подробно изучены теория метода регуляризации А.Н. Тихонова, метода регуляризации М.М. Лаврентьева и их применения к решениям операторных и интегральных уравнений первого рода. Заметим что, в списке литератур этой книги А.Саадабаева содержатся работы многих авторов по вопросам регуляризации и единственности решения отмеченных уравнений.

Статья А. Асанова [10] посвящена вопросам регуляризации операторного уравнения Вольтерра первого рода в шкале банаховых пространств.

В статье А. Асанова [11], наряду с другими результатами, методом неотрицательных квадратичных форм, установлены достаточные условия единственности решения операторного уравнения Вольтерра первого рода пространстве Гильберта.

В настоящей диссертационной работе проводятся новые исследования по ограниченности и другим асимптотическим свойствам решений скалярных ИДУВС первого и второго порядков и ИУВС второго рода на полуоси, по ограниченности и квадратичной суммируемости решений ИУВС второго рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях, по единственности и регуляризации решения ИУВС первого рода с двумя независимыми переменными в ограниченных областях, отличных от результатов выше цитированных работ.

1.2. Леммы о преобразованиях двойного интеграла Вольтерра-Стилтьеса, об интегрировании неравенства по возрастающей функции и об интегральных неравенствах Вольтерра-Стилтьеса

Аналогично работам [29, 34, 36, 35, 57] устанавливается следующая

ЛЕММА 1.2.1. Пусть [29, 34]: $0<\varphi(t)$ - некоторая весовая функция,

$$K(t,\tau)=\sum_{i=1}^{n}K_i(t,\tau), \qquad (K)$$

$$f(t)=\sum_{i=0}^{n} f_i(t), \qquad (f)$$

$\psi_i(t)\ (i=1\ldots n)$ - некоторые срезывающие функции,

$R_i(t,\tau)\equiv\varphi(t)K_i(t,\tau)(\psi_i(t)\psi_i(\tau))^{-1}, \quad E_i(t)\equiv\varphi(t)f_i(t)(\psi_i(t))^{-1} \quad (i=1\ldots n);$

$c_i(t) \quad (i=1\ldots n)$ - некоторые функции.

С использованием условий (K), (f), введением функций $\varphi(t),\ R_i(t,\tau), E_i(t), c_i(t) \quad (i=1\ldots n)$, интегрированием по частям, аналогично [29, 34, 36, 35, 57] доказывается, что имеет место соотношение:

$$2\int_{t_0}^{t}\varphi(s)x(s)\left[\int_{t_0}^{s}K(s,\tau)x(\tau)dg(\tau)\right]dg(s)-2\int_{t_0}^{t}f(s)\varphi(s)x(s)dg(s)=$$

$$=2\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}R_i(s,\tau)\psi_i(\tau)x(\tau)\psi_i(s)x(s)dg(\tau)dg(s)-2\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}E_i(s)\psi_i(s)x(s)dg(s)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\Big\{R_i(t,t_0)(X_i(t,t_0))^2-2E_i(t)X_i(t,t_0)+c_i(t)-\int_{t_0}^{t}\big[R'_{ig(s)}(s,t_0)(X_i(s,t_0))^2-$$

$$-2E'_{ig(s)}(s)X_i(s,t_0)+c'_{ig(s)}(s)\big]dg(s)+\int_{t_0}^{t}R'_{ig(\tau)}(t,\tau)(X_i(t,\tau))^2dg(\tau)-$$

$$-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}R''_{ig(s)g(\tau)}(s,\tau)(X_i(s,\tau))^2dg(\tau)dg(s)-c_i(t_0)\Big\}, \qquad (2.1.2)$$

где

$$X_i(t,\tau)\equiv\int_{\tau}^{t}\psi_i(\eta)x(\eta)dg(\eta) \qquad (i=1\ldots n).$$

Это лемма является аналогом лемм 1.4, 1.5 [35]. Из этой леммы в случае $g(t)\equiv t$ вытекает лемма 1.5 лемма 1.5 [35], а в случае $g(t)\equiv t$, $f_i(t)\equiv c_i(t)\equiv 0 \quad (i=1\ldots n)$ - лемма 1.4 [35].

Следующая лемма соответствует свойству XVIII интеграла Стилтьеса [49, с. 319], приведенная в удобном нам виде.

ЛЕММА 1.2.2. Пусть $g(t)$ не убывает и $f_1(t)\leq f_2(t)$. Тогда справедливо неравенство

$$\int_{t_0}^{t} f_1(s)dg(s) \leq \int_{t_0}^{t} f_2(s)\,dg(s)\ , \quad t\geq t_0 .$$

Следующая лемма доказывается аналогично леммам из статей [32, 33].

ЛЕММА 1.2.3. Пусть для неотрицательных функций $u(t),\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t,\tau)$ и постоянной c_* выполняется интегральное неравенство:

$$u(t)\leq c_* + \int_{t_0}^{t}\alpha_1(s)(u(s))^{\frac{1}{2}}[\alpha_2(s)(u(s))^{\frac{1}{2}} + \int_{t_0}^{s}\alpha_3(s,\tau)(u(\tau))^{\frac{1}{2}}dq(\tau)]dg(s), \quad t\geq t_0 .$$

Тогда верна оценка:

$$u(t)\leq c_* \exp(\int_{t_0}^{t}\alpha_1(s)[\alpha_2(s) + \int_{t_0}^{s}\alpha_3(s,\tau)dq(\tau)]dg(s)), \quad t\geq t_0 .$$

1.3. Заключение по главе 1.

Приведен обзор ранее опубликованным работам, наиболее близким к теме исследования предлагаемой диссертационной работы по ограниченности и другим асимптотическим свойствам решений скалярных ИДУВС первого и второго порядков и ИУВС второго рода на полуоси, по ограниченности и квадратичной суммируемости решений двумерного ИУВС второго рода в неограниченных областях, по единственности и регуляризации решения двумерного ИУВС первого рода в прямоугольных областях. Анализ работ показывает, что выбранная нами тема исследований актуальна и имеет определенный теоретический и практический интерес.

Приведены леммы о преобразованиях двойного интеграла Вольтерра-Стилтьеса, об интегрировании неравенства по возрастающей функции и об интегральном неравенстве Вольтерра-Стилтьеса, которые будут применены главах 2,3 настоящей работы.

Г Л А В А 2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛТЬЕСА НА ПОЛУОСИ

Всюду в этой главе, следуя С. Искандарову [28,34], предположим:
$0<\varphi(t)$ - некоторая весовая функция,

$$K(t,\tau)=\sum_{i=1}^{n}K_i(t,\tau), \qquad (K)$$

$$f(t)=\sum_{i=0}^{n}f_i(t), \qquad (f)$$

$\psi_i(t)\ (i=1\ldots n)$ - некоторые срезывающие функции,

$R_i(t,\tau)\equiv\varphi(t)K_i(t,\tau)(\psi_i(t)\psi_i(\tau))^{-1}, \quad E_i(t)\equiv\varphi(t)f_i(t)(\psi_i(t))^{-1} \quad (i=1\ldots n)$;

$c_i(t) \quad (i=1\ldots n)$ - некоторые функции.

Будем говорить, что выполняется условие (R) ,если:

I) $R_i(t,t_0)\geq 0$, $R'_{ig(t)}(t,t_0)\leq 0$, существуют функции $c_i(t)$ такие, что $(E_i(t))^2\leq R_i(t,t_0)c_i(t)$, $(E'_{ig(t)}(t))^2\leq R'_{ig(t)}(t,t_0)\,c'_{ig(t)}(t) \quad (i=1\ldots n)$;

II) $R'_{ig(\tau)}(t,\tau)\geq 0$, $\quad R''_{ig(t)g(\tau)}(t,\tau)\leq 0 \qquad (i=1\ldots n)$.

Будем говорить, что выполняется условие (β), если:

существует функция $\beta(t)>0$ такая, что $g'(t)\varphi(t)\geq\beta(t)$.

Будем говорить, что выполняется условие (Δ), если: $\Delta(t)\equiv 2\varphi(t)a(t)-\dfrac{d}{dg(t)}[g'(t)\varphi(t)]\geq 0$.

2.1. О степенной абсолютной интегрируемости решения линейного интегрального уравнения Вольтерра-Стилтьеса второго рода

Устанавливаются достаточные условия абсолютной и квадратичной интегрируемости на полуоси решения линейного интегрального уравнения Вольтерра-Стилтьеса второго рода. При исследовании не требуется, чтобы свободный член уравнения обладал указанными свойствами. Интегрирование проводится по возрастающей функции. Применяются метод преобразования уравнений, метод весовых и срезывающих функций, метод интегрирования по частям. Строятся иллюстративные примеры.

Все фигурирующие в работе функции являются непрерывными и соотношения справедливы при $t \geq t_0$, $t \geq \tau \geq t_0$; $J = [t_0, \infty)$;

ИУВС - интегральное уравнение Вольтерра-Стилтьеса.

ЗАДАЧА 2.1.1. Установить достаточные условия принадлежности пространствам $L_g^p(J, R)\,(p = 1{,}2)$ решения ИУВС:

$$x(t) + \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)x(\tau)dg(\tau) = f(t), \qquad t \geq t_0 \tag{2.1.1}$$

без предположения, что его свободный член $f(t) \in L_g^p(J, R)$ $(p = 1, 2)$,

где $g(t)$ - возрастающая функция.

Заметим, что для интегрального уравнения Вольтерра (в (1) $g(t) \equiv t$) поставленная задача была решена во многих работах автора, например, в [13,27,29].

С использованием условий (K), (f), введением функций

$\varphi(t)$, $R_i(t,\tau)$, $E_i(t)$, $c_i(t)$ $\quad (i = 1 \ldots n)$, интегрированием по частям, аналогично [29, 34, 36, 35, 57] доказывается, что имеет место соотношение:

$$2\int_{t_0}^{t}\varphi(s)x(s)\left[\int_{t_0}^{s}K(s,\tau)x(\tau)dg(\tau)\right]dg(s)-2\int_{t_0}^{t}f(s)\varphi(s)x(s)dg(s)=$$

$$=2\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}R_i(s,\tau)\psi_i(\tau)x(\tau)\psi_i(s)x(s)dg(\tau)dg(s)-2\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}E_i(s)\psi_i(s)x(s)dg(s)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\Big\{R_i(t,t_0)(X_i(t,t_0))^2-2E_i(t)X_i(t,t_0)+c_i(t)-\int_{t_0}^{t}\big[R'_{ig(s)}(s,t_0)(X_i(s,t_0))^2-$$

$$-2E'_{ig(s)}(s)X_i(s,t_0)+c'_{ig(s)}(s)\big]dg(s)+\int_{t_0}^{t}R'_{ig(\tau)}(t,\tau)(X_i(t,\tau))^2dg(\tau)-$$

$$-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}R''_{ig(s)g(\tau)}(s,\tau)(X_i(s,\tau))^2\,dg(\tau)dg(s)-c_i(t_0)\Big\}, \qquad (2.1.2)$$

где

$$X_i(t,\tau)\equiv\int_{\tau}^{t}\psi_i(\eta)x(\eta)dg(\eta) \qquad (i=1\ldots n).$$

Далее поступаем аналогично работам [29, 34, 36, 35]. Для решения $x(t)\in C(J,R)$ ИУВС (2.1.1) умножаем на $\varphi(t)x(t)$, интегрируем по возрастающей функции $g(t)$ в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, вводим условия $(K),(f)$, функции $\psi_i(t), R_i(t,\tau), E_i(t), c_i(t)$ $(i=1\ldots n)$, используем соотношения (2.1.2), в результате получаем следующее тождество:

$$2\int_{t_0}^{t}\varphi(s)(x(s))^2dg(s)+\sum_{i=1}^{n}\Big\{R_i(t,t_0)(X_i(t,t_0))^2-2E_i(t)X_i(t,t_0)+c_i(t)-$$

$$-\int_{t_0}^{t}\big[R'_{ig(s)}(s,t_0)(X_i(s,t_0))^2-2E'_{ig(s)}(s)X_i(s,t_0)+c'_{ig(s)}(s)\big]dg(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}R'_{ig(\tau)}(t,\tau)(X_i(t,\tau))^2dg(\tau)-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}R''_{ig(s)g(\tau)}(s,\tau)(X_i(s,\tau))^2\,dg(\tau)dg(s)\Big\}\equiv$$

$$\equiv c_* + 2\int_{t_0}^{t} \varphi(s) f_0(s) x(s) dg(s), \tag{2.1.3}$$

где

$$c_* = \sum_{i=1}^{n} c_i(t_0) .$$

ТЕОРЕМА 2.1.1. Пусть 1) $g(t)$- возрастающая функция; $\varphi(t) \geq 0$; выполняются условия $(K),(f)$, (R); 2) $\varphi(t)(f_0(t))^2 \in L_g^1(J, R_+)$.

Тогда для решения $x(t) \in C(J, R)$ ИУВС (2.1.1) имеет место утверждение:

$$\int_{t_0}^{t} \varphi(s)(x(s))^2 dg(s) \leq c_{**} , \tag{2.1.4}$$

где

$$c_{**} = c_* + \int_{t_0}^{\infty} \varphi(t)(f_0(t))^2 dg(t) < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя соотношение:

$$2\int_{t_0}^{t} \varphi(s) f_0(s) x(s) dg(s) \leq 2\int_{t_0}^{t} \sqrt{\varphi(s)}\, | x(s)| \sqrt{\varphi(s)}\, | f_0(s)| dg(s) \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \varphi(s)(x(s))^2 dg(s) + \int_{t_0}^{t} \varphi(s)(f_0(s))^2 dg(s),$$

условие 1) теоремы, из тождества (2.1.3) получаем неравенство:

$$\int_{t_0}^{t} \varphi(s)(x(s))^2 dg(s) \leq c_* + \int_{t_0}^{t} \varphi(s)(f_0(s))^2 dg(s),$$

из которого в силу условия 2) теоремы вытекает утверждение теоремы (2.1.4). Теорема 2.1.1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.1.1. Если 1) выполняются все условия теоремы 2.1.1; 2) $(\varphi(t))^{-1} \in L_g^1(J, R_+ / \{0\})$ (соответственно $\varphi(t) \geq \varphi_0 > 0$), то решение ИУВС (2.1.1) $x(t) \in L_g^1(J, R)$ (соответственно $x(t) \in L_g^2(J, R)$).

Первое утверждение этого следствия вытекает из:

$$|x(t)| = (\varphi(t))^{-\frac{1}{2}} (\varphi(t))^{\frac{1}{2}} |x(t)| \leq (\varphi(t))^{-1} + \varphi(t)(x(t))^2$$

интегрированием по функции $g(t)$ и с учетом (2.1.4), аналогично теореме 2 [31]. Второе утверждение получается из (2.1.4) сразу.

СЛЕДСТВИЕ 2.1.2. Пусть

1) $a(t) > 0$; 2) $Q(t, t_0) \geq 0$, $Q'_{g(t)}(t, t_0) \leq 0$,

существует функция $c(t)$ такая, что

$(f(t))^2 \leq Q(t, t_0)\, c(t)$, $\quad (f'_{g(t)}(t))^2 \leq Q'_{g(t)}(t, t_0) c'_{g(t)}(t)$;

3) $Q'_{g(\tau)}(t, \tau) \geq 0$, $\quad Q''_{g(t)g(\tau)}(t, \tau) \leq 0$.

Тогда для решения $x(t)$ ИУВС

$$x(t) + \int_{t_0}^{t} (a(t))^{-1} Q(t, \tau) b(t) b(\tau) x(\tau) dg(\tau) = (a(t))^{-1} q(t) b(t), \qquad t \geq t_0$$

верно утверждение

$$a(t)(x(t))^2 \in L^1_{g(t)}(J, R) \tag{2.1.5}$$

Здесь $\varphi(t) \equiv a(t)$, $n = 1$, $\psi_1(t) \equiv b(t)$, $K_1(t, \tau) \equiv Q(t, \tau)$, $f_1(t) \equiv q(t)$, $c_1(t) \equiv c(t)$

СЛЕДСТВИЕ 2.1.3. Если 1) выполняются все условия следствие 2.1.2;

2) $\left(a(t)\right)^{-1}\in L^1_{g(t)}\left(J,R_+/\{0\}\right)$, то решение ИУВС $x(t)\in L^1_{g(t)}(J,R)$.

Это следует аналогично теореме 2 [31] и аналогично первому утверждению следствия 2.1.1 из следующего неравенства:

$$|x(t)|=|x(t)|\left(a(t)\right)^{\frac{1}{2}}\left(a(t)\right)^{-\frac{1}{2}}\le\frac{1}{2}\left[a(t)\left(x(t)\right)^2+\left(a(t)\right)^{-1}\right] \quad ,$$

интегрированием на отрезке $[t_0\,,\,t]$ по функции $g(t)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1.4. Если 1) выполняются все условия следствие 2.1.2;

2) $a(t)\ge a_0>0$, то решение ИУВС $x(t)\in L^2_{g(t)}(J,R)$.

Утверждение следствия 2.1.4. получается аналогично второму утверждению следствия 2.1.1 из (2.1.5), используя $a(t)\ge\inf\limits_{t\ge t_0} a(t)=a_0>0$.

Ниже рассмотрим случай вырожденного ядра $K(t,\tau)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1.5. Если 1) выполняются условия

$$K(t,\tau)=\sum_{i=1}^{n}P_i(t)Q_i(t),\quad f(t)=\sum_{i=1}^{n}f_i(t),$$

$n\ge m$, $R_i(t)\equiv P_i(t)\left(Q_i(t)\right)^{-1}\ \ (i=1,\ldots,m)$, $\quad T_i(t)\equiv Q_i(t)\left(P_i(t)\right)^{-1}\ \ (i=m+1,\ldots,n)$,

$E_i(t)\equiv f_i(t)\left(Q_i(t)\right)^{-1}\ \ (i=1,\ldots,m)$, $\ c_i(t)\ \ (i=1,\ldots,m)$ - некоторые функции;

2) $R_i(t)\ge 0,\ \ R'_{ig(t)}(t)\le 0$, существуют функции $c_i(t)$ такие, что

$$\left(E_i(t)\right)^2\le R_i(t)\,c_i(t),\quad \left(E'_{ig(t)}(t)\right)^2\le R'_{ig(t)}(t)\,c'_{ig(t)}(t)\qquad (i=1,\ldots,m);$$

3) $T_i(t_0)\ge 0,\ \ T'_{ig(t)}(t)\ge 0\qquad (i=m+1,\ldots,n)$,

то решение $x(t)$ ИУВС (2.1.1) принадлежит пространству $L^2_{g(t)}(J,R)$.

Это следствие вытекает из теоремы 2.1.1 при
$\varphi(t)\equiv 1,\ K_i(t,\tau)=P_i(t)Q_i(t),\quad \psi_i(t)\equiv Q_i(t)\ \ (i=1,\ldots,m),\ \psi_i(t)\equiv P_i(t)\ (i=m+1,\ldots,n),$

$R_i(t,\tau)\equiv R_i(t),\ E_i(t)\equiv f_i(t)(Q_i(t))^{-1}\ \ (i=1,\ldots,m),\ R_i(t,\tau)\equiv T_i(\tau)\ \ (i=m+1,\ldots,n).$

СЛЕДСТВИЕ 2.1.6. Решение $x(t)$ ИУВС:

$$x(t)+\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{m}P_i(t)P(\tau)x(\tau)dg(\tau)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\,P_i(t),\qquad t\ge t_0$$

принадлежит пространству $L_g^2(J,R)$.

В данном случае в следствии 2.1.5 $P_i(t)\equiv Q_i(t),\quad R_i(t)\equiv 1,\quad E_i(t)\equiv\alpha_i$,

$c_i(t)\equiv\alpha_i^{\,2}\quad (i=1,\ldots,m)$.

ПРИМЕР 2.1.1. Для ИУВС

$$x(t)+\int_0^t\frac{e^{-t+t^2+\tau^2}}{\sqrt{t}-\sqrt{\tau}+2}x(\tau)d\left(\sqrt{\tau}\right)=-\frac{e^{-t+t^2}}{\sqrt{t}+3},\ \ t\ge 0$$

выполняются все условия следствия 2.1.1 при $a(t)\equiv e^t$, $b(t)\equiv e^{t^2}$, здесь $t_0=0$, $c(t)\equiv\dfrac{1}{\sqrt{t}+2}$. Значит, решение этого ИУВС $x(t)\in L^1_{\sqrt{t}}(R_+,R)$, хотя его свободный член $\notin L^1_{\sqrt{t}}(R_+,R)$.

ПРИМЕР 2.1.2. ИУВС

$$x(t)+\int_0^t\frac{(t+1)^{12}(\tau+1)^{12}\sin t\sin\tau}{\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{\tau}+5}x(\tau)d\left(\sqrt[3]{\tau}\right)=\frac{(t+1)^{12}\sin t}{\sqrt[3]{t}+7},\ \ t\ge 0$$

удовлетворяет всем условиям следствия 2.1.2 при $a(t)\equiv 1$, $b(t)\equiv(t+1)^{12}\sin t$, здесь $t_0=0$, $c(t)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{t}+5}$.

Следовательно, решение рассмотренного ИУВС $x(t)\in L^2_{\sqrt[3]{t}}(R_+,R)$ несмотря на то, что его свободный член $\notin L^2_{\sqrt[3]{t}}(R_+,R)$

ПРИМЕР 2.1.3. Для ИУВС

$$x(t)+\int_0^t (t+1)^{-2}\frac{e^{t+\tau}\cos^3\sqrt{t}\,\cos^3\sqrt{\tau}}{\sqrt{t}-\sqrt{\tau}+3}(\sin t\sin\tau)^{\frac{1}{5}}x(\tau)d\left(\sqrt{\tau}\right)=$$

$$=-\frac{(t+1)^{-2}e^t\cos^3\sqrt{t}(\sin t)^{\frac{1}{5}}}{\sqrt{t}+7}+\frac{(t+1)^{-1}}{t+2},\quad t\ge 0$$

выполняются все условия теоремы при $g(t)=\sqrt{t}$, $\varphi(t)\equiv(t+1)^2$, здесь $t_0=0$, $n=1$, $\psi_1(t)\equiv e^t\cos^3\sqrt{t}(\sin t)^{1/5}$, $R_1(t,\tau)\equiv\frac{1}{\sqrt{t}-\sqrt{\tau}+3}$, $E_1(t)\equiv-\frac{1}{\sqrt{t}+7}$, $c_1(t)\equiv\frac{1}{\sqrt{t}+7}$, $f_0(t)\equiv(t+2)^{-1}(t+1)^{-1}$.

Следовательно, решение этого ИУВС $x(t)\in L^p_{\sqrt{t}}(R_+,R)$ $(p=1,2)$.

ПРИМЕР 2.1.4. ИУВС:

$$x(t)+\int_0^t\left[\left(\sqrt{t}+3\right)\left(\sqrt{\tau}+2\right)+\left(\sqrt{t}+2\right)\left(\sqrt{\tau}+1\right)\right]x(\tau)d\sqrt{\tau}=-5\left(\sqrt{t}+4\right),\quad t\ge 0$$

удовлетворяет все условиям теоремы 2.1.1 и следствия 2.1.5, здесь $t_0=0$, $g(t)=\sqrt{t}$, $n=2$, $m=1$,

$R_1(t)\equiv\left(\sqrt{t}+3\right)\left(\sqrt{t}+2\right)^{-1}$, $E_1(t)\equiv-5\left(\sqrt{t}+4\right)\left(\sqrt{t}+2\right)^{-1}$,

$c_1(t)\equiv 25\left(\sqrt{t}+22\right)\left(\sqrt{t}+2\right)^{-1}$, $T_2(t)\equiv\frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}+2}$.

Значит, его решение этого ИУВС $x(t)\in L^2_{\sqrt{t}}(R_+,R)$.

ПРИМЕР 2.1.5. Для ИУВС

$$x(t)+\int_{0}^{t}\left(\sqrt{t}+6\right)\left(\sqrt{\tau}+6\right)x(\tau)\,d\sqrt[3]{\tau}=4\left(\sqrt{t}+6\right),\ \ t\geq 0$$

выполняются все условия следствия 2.1.6. Здесь $m=1,\ \ P_1(t)\equiv\sqrt{t}+6,\ \alpha_1=4.$

2.2. Об оценке и асимптотических свойствах решений слабо нелинейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка Вольтерра-Стилтьеса

Устанавливаются достаточные условия, обеспечивающие оценку, ограниченности, стремления к нулю, абсолютной и квадратичной интегрируемости на полуоси любого решения слабо нелинейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка Вольтерра-Стилтьеса. Рассматривается случай, когда производная возрастающей функции, по которой ведется интегрирование, может быть разрывной в некоторых точках. Развивается метод весовых и срезывающих функций. Применяется метод интегральных неравенств с интегралом Стилтьеса. Строятся иллюстративные примеры.

Все фигурирующие в работе функции от $t,(t,\tau),x,y$ являются непрерывными при $t\geq t_0$, $t\geq\tau\geq t_0$, $|x|<\infty,\ |y|<\infty$ и соотношения имеют место при $t\geq t_0$, $t\geq\tau\geq t_0$; $J=[t_0,\infty)$; ИДУВС - интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра-Стилтьеса.

ЗАДАЧА 2.2.1. Установить достаточные условия для оценки, ограниченности на полуинтервале J, стремления к нулю при $t\to\infty$, принадлежности пространствам $L_g^p(J,R)\,(p=1{,}2)$ любого решения

ИДУВС вида

$$x'(t)+a(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)x(\tau)dg(\tau)= f(t)+F\left(t,x(t),\int_{t_0}^{t}H(t,\tau,x(\tau))dq(\tau)\right),\ t\ge t_0\ ,\ (2.2.1)$$

где $g(t), q(t)$ - возрастающие функции, функции $F(t,x,y), H(t,\tau,x)$ удовлетворяют по пространственным переменным следующим условиям слабой нелинейности:

$$|F(t,x,y)|\le l(t)|x|+l_1(t)|y|,\ \ |H(t,\tau,x)|\le h(t,\tau)|x| \qquad (F,H)$$

с неотрицательными «коэффициентами Липшица» $l(t), l_1(t), h(t,\tau)$.

Насколько нам известно, такая задача изучается впервые. Заметим, что в [57] для линейного ИДУВС вида (2.2.1) (в (2.2.1) $F(t,x,y)\equiv 0$) получены достаточные условия принадлежности пространству $L_g^2(J,R)$ любого его решения в случае, когда $f(t)\in L_g^2(J,R)$.

С использованием условий (K), (f), введением функций $\varphi(t)$, $R_i(t,\tau), E_i(t), c_i(t)$ аналогично [28, 34, 36] доказывается, что

$$2\int_{t_0}^{t}\varphi(s)x(s)\left[\int_{t_0}^{s}K(s,\tau)x(\tau)dg(\tau)\right]dg(s)-2\int_{t_0}^{t}f(s)\varphi(s)x(s)dg(s)=$$

$$=2\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}R_i(s,\tau)\psi_i(\tau)x(\tau)\psi_i(s)x(s)dg(\tau)dg(s)-2\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}E_i(s)\psi_i(s)x(s)dg(s)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\Big\{R_i(t,t_0)(X_i(t,t_0))^2-2E_i(t)X_i(t,t_0)+c_i(t)-\int_{t_0}^{t}\Big[R'_{ig(s)}(s,t_0)(X_i(s,t_0))^2-$$

$$-2E'_{ig(s)}(s)X_i(s,t_0)+c'_{ig(s)}(s)\Big]dg(s)+\int_{t_0}^{t}R'_{ig(\tau)}(t,\tau)(X_i(t,\tau))^2dg(\tau)-$$

$$-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} R''_{ig(s)g(\tau)}(s,\tau)(X_i(s,\tau))^2\,dg(\tau)dg(s)-c_i(t_0)\Bigg\}, \qquad (2.2.2)$$

где

$$X_i(t,\tau)\equiv\int_{\tau}^{t}\psi_i(\eta)x(\eta)dg(\eta) \qquad (i=1\ldots n).$$

Отметим, что при получении соотношения (2.2.2) используются соотношения (1.17)-(1.19) из [34, с. 46-47], соотношения (9) из [36], соотношение (10) из [57], леммы 1.4, 1.5 из [35].

Согласно [13, 57] имеем

$$\int_{t_0}^{t} x'(s)x(s)dg(s)=\int_{t_0}^{t}\frac{dx(s)}{ds}\frac{dg(s)}{dg(s)}x(s)dg(s)=\int_{t_0}^{t} g'(s)\frac{1}{2}d(x(s))^2=$$

$$=\frac{1}{2}g'(t)(x(t))^2-\frac{1}{2}g'(t_0)(x(t_0))^2-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dg(s)}[g'(s)](x(s))^2\,dg(s). \qquad (2.2.3)$$

Аналогично (2.2.3) получаем

$$\int_{t_0}^{t} x'(s)\varphi(s)x(s)dg(s)=\int_{t_0}^{t}\frac{dx(s)}{ds}\varphi(s)\frac{dg(s)}{dg(s)}x(s)dg(s)=\int_{t_0}^{t} g'(s)\varphi(s)\frac{1}{2}d(x(s))^2=$$

$$=\frac{1}{2}g'(t)\varphi(t)(x(t))^2-\frac{1}{2}g'(t_0)\varphi(t_0)(x(t_0))^2-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dg(s)}[g'(s)\varphi(s)](x(s))^2\,dg(s). \qquad (2.2.4)$$

Из (2.2.4) при $\varphi(t)\equiv 1$ вытекает (2.2.3).

Теперь поступаем аналогично как в [28,34,36,35]. Для любого решения $x(t)$ ИДУВС (2.2.1) умножаем на $\varphi(t)x(t)$, интегрируем по возрастающей $g(t)$ в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, вводим условия $(K),(f)$, функции $R_i(t,\tau)$, $E_i(t)$, $c_i(t)$, используем соотношения (2.2.2), (2.2.4), условие (F,H), при этом применяем леммы 1.2.1, 1.2.2. Тогда приходим к следующему неравенству:

$$g'(t)\varphi(t)(x(t))^2+\int_{t_0}^{t}\Delta(s)(x(s))^2dg(s)+\sum_{i=1}^{n}\Big\{R_i(t,t_0)(X_i(t,t_0))^2-2E_i(t)X_i(t,t_0)+c_i(t)-$$

$$-\int_{t_0}^{t}\left[R'_{ig(s)}(s,t_0)(X_i(s,t_0))^2-2E'_{ig(s)}(s)X_i(s,t_0)+c'_{ig(s)}(s)\right]dg(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}R'_{ig(\tau)}(t,\tau)(X_i(t,\tau))^2dg(\tau)-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}R''_{ig(s)g(\tau)}(s,\tau)(X_i(s,\tau))^2dg(\tau)dg(s)\Big\}\le c_*+$$

$$+2\int_{t_0}^{t}\varphi(s)|x(s)|\left[l(s)|x(s)|+\int_{t_0}^{s}G(s,\tau)|x(\tau)|dq(\tau)\right]dg(s), \tag{2.2.5}$$

где

$$\Delta(t)\equiv 2\varphi(t)a(t)-\frac{d}{dg(t)}[g'(t)\varphi(t)],\ c_*=g'(t_0)\varphi(t_0)(x(t_0))^2+\sum_{i=1}^{n}c_i(t_0),\ G(t,\tau)\equiv l_1(t)h(t,\tau).$$

ТЕОРЕМА 2.2.1. Пусть 1) $g(t),q(t)$- возрастающие функции; $\varphi(t)\ge 0$; выполняются условия (F,H), (K),(f) с $f_0(t)\equiv 0$, (R), (β), (Δ);

2) $\displaystyle\int_{t_0}^{\infty}\varphi(t)\left[l(t)(\beta(t))^{-1}+(\beta(t))^{-\frac{1}{2}}\int_{t_0}^{t}G(t,\tau)(\beta(\tau))^{-\frac{1}{2}}dq(\tau)\right]dg(t)<\infty.$

Тогда для любого решения $x(t)\in C^1(J,R)$ с любым начальным данным $x(t_0)$ справедливы утверждения:

$$x(t)=(\beta(t))^{-\frac{1}{2}}O(1), \tag{2.2.6}$$

$$\Delta(t)(x(t))^2\in L^1{}_g(J,R_+). \tag{2.2.7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая, что условие I) из (R) обеспечивает:

$R_i(t,t_0)(X_i(t,t_0))^2-2E_i(t)X_i(t,t_0)+c_i(t)-$

$$-\int_{t_0}^{t}\left[R'_{ig(s)}(s,t_0)(X_i(s,t_0))^2-2E'_{ig(s)}(s)X_i(s,t_0)+c'_{ig(s)}(s)\right]dg(s)\geq 0 \quad (i=1\ldots n),$$

в силу условия 1) имеем интегральное неравенство:

$$u(t)\equiv\beta(t)(x(t))^2+\int_{t_0}^{t}\Delta(s)(x(s))^2\,dg(s)\leq c_*+$$

$$+2\int_{t_0}^{t}\varphi(s)\left[l(s)(\beta(s))^{-1}u(s)+(\beta(s))^{-\frac{1}{2}}(u(s))^{\frac{1}{2}}\int_{t_0}^{s}G(s,\tau)(\beta(\tau))^{-\frac{1}{2}}(u(\tau))^{\frac{1}{2}}\,dq(\tau)\right]dg(s). \qquad (2.2.8)$$

Разрешая интегральное неравенство (2.2.8), аналогично лемме 3 из [33], или применяя лемму 1.2.3, учитывая условие 2), получаем

$$u(t)\leq c_*\exp\left(2\int_{t_0}^{\infty}\varphi(s)\left[l(s)(\beta(s))^{-1}+(\beta(s))^{-\frac{1}{2}}\int_{t_0}^{t}G(t,\tau)(\beta(\tau))^{-\frac{1}{2}}\,dq(\tau)\right]dg(t)\right)=c_{**}<\infty. \qquad (2.2.9)$$

Так как, $\beta(t)(x(t))^2\leq u(t)$, т.е. $|x(t)|\leq(\beta(t))^{-\frac{1}{2}}(u(t))^{\frac{1}{2}}$, $\int_{t_0}^{t}\Delta(s)(x(s))^2\,dg(s)\leq u(t)$, то из оценки (2.2.9) вытекают утверждения (2.2.6), (2.2.7) теоремы. Теорема 2.2.1 доказана.

Из доказанной теоремы 2.2.1 вытекают следующие предложения.

СЛЕДСТВИЕ 2.2.1. Если выполняются все условия теоремы 2.2.1 и $\beta(t)\geq\beta_0>0$, то любое решение ИДУВС (2.2.1) ограничено на J.

Это следует из оценки (2.2.6).

СЛЕДСТВИЕ 2.2.2. Если выполняются все условия теоремы 2.2.1 и $\lim\limits_{t\to\infty}\beta(t)=\infty$, то любое решение ИДУВС (2.2.1) $x(t)\to 0$ при $t\to\infty$.

Это утверждение тоже получается из оценки (2.2.6).

СЛЕДСТВИЕ 2.2.3. Если выполняются все условия теоремы 2.2.1 и $\Delta(t)>0$, $(\Delta(t))^{-1}\in L_g^1(J,R_+/\{0\})$ (соответственно $\Delta(t)\ge\Delta_0>0$), то любое решение ИДУВС (2.2.1) $x(t)\in L_g^1(J,R)$ (соответственно $x(t)\in L_g^2(J,R)$).

Первое утверждение этого следствия аналогично теореме 2 [31] следует из неравенства

$$|x(t)|\equiv|x(t)|(\Delta(t))^{\frac{1}{2}}(\Delta(t))^{-\frac{1}{2}}\le\frac{1}{2}\left[\Delta(t)(x(t))^2+(\Delta(t))^{-1}\right]$$

интегрированием на отрезке $[t_0,t]$по функции $g(t)$. Второе утверждение сразу следует из утверждения (2.2.7) теоремы 2.2.1.

ПРИМЕР 2.2.1. Для ИДУВС

$$x'(t)+\left(e^t+\sqrt{t}\right)x(t)+\int_0^t\left\{\frac{e^{\sqrt[3]{t\cos t}+\sqrt[3]{\tau\cos\tau}+t+\tau}\sin\sqrt{t}\sin\sqrt{\tau}}{(t+1)\sqrt{t}\left(\sqrt{t}-\sqrt{\tau}+9\right)}+(t+1)(\tau+1)^2\sqrt{\tau}\right\}x(\tau)d\sqrt{\tau}=$$

$$=-\frac{5e^{t+\sqrt[3]{t\cos t}}\sin\sqrt{t}}{(t+1)\sqrt{t}\left(\sqrt{t}+12\right)}-\frac{e^{-t}x^2}{|x|+2}+\int_0^t\frac{x(\tau)\sin x(\tau)}{(t+\tau+3)^{10}}d\sqrt[3]{\tau},\qquad t\ge0$$

выполняются все условия теоремы и следствий 2.2.1-2.2.3 при $\varphi(t)\equiv(t+1)\sqrt{t}$, здесь $t_0=0$, $g(t)=\sqrt{t}$, $g'(t)\varphi(t)=\frac{1}{2}(t+1)\equiv\beta(t)$, $\frac{d}{d\sqrt{t}}[g'(t)\varphi(t)]=\sqrt{t}$

$\Delta(t)\equiv2e^t+\sqrt{t}$, $n=2$, $\psi_1(t)\equiv e^{t+\sqrt[3]{t\cos t}}\sin\sqrt{t}$, $R_1(t,\tau)\equiv\frac{1}{\sqrt{t}-\sqrt{\tau}+9}$, $E_1(t)=-\frac{5}{\sqrt{t}+12}$,

$c_1(t)\equiv\frac{25}{\sqrt{t}+12}$, $\psi_2(t)\equiv(t+1)^2\sqrt{t}$, $R_2(t,\tau)\equiv1$, $E_2(t)\equiv c_2(t)\equiv0$, $q(t)=\sqrt[3]{t}$,

$l(t)\equiv e^{-t}$, $G(t,\tau)\equiv\frac{1}{(t+\tau+3)^{10}}$.

Таким образом, нам удалось решить выше поставленную задачу 2.2.1, т.е. нашли класс ИДУВС вида (2.2.1), для которого наша задача решаема. Заметим, что нам также удалось, снять условие $g'(t)\in C(J,R_+)$ из кандидатской диссертации Ж.О. Толубаева [58, с. 50-54], что достигли за счет введения некоторой весовой функции $\varphi(t) \geq 0$.

2.3. Об асимптотических свойствах решений слабо нелинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка Вольтерра-Стилтьеса

Устанавливаются достаточные условия ограниченности на полуоси любого решения и его первой производной слабо нелинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка Вольтерра - Стилтьеса. Также изучается оценка, абсолютной и квадратичной интегрируемости, стремления к нулю первой производной любого решения этого уравнения. Рассматривается случай, когда производная возрастающей функции, по которой ведется интегрирование, может быть разрывной в некоторых точках. Развивается метод весовых и срезывающих функций. Применяется метод интегральных неравенств с интегралом Стилтьеса. Строятся иллюстративные примеры.

Все фигурирующие ниже функции от $t, (t,\tau), x, y, z$ являются непрерывными при $t \geq t_0$, $t \geq \tau \geq t_0$, $|x|, |y|, |z| < \infty$ и соотношения имеют место при $t \geq t_0$, $t \geq \tau \geq t_0$; $J = [t_0, \infty)$; ИДУВС - интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра-Стилтьеса.

ЗАДАЧА 2.3.1. Установить достаточные условия ограниченности на полуинтервале J решений и их первых производных, оценки, принадлежности пространствам $L_g^p(J,R)\,(p=1,2)$, стремления к нулю при $t \to \infty$ первых производных решений ИДУВС второго порядка вида

$$x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)x'(\tau)dg(\tau)=f(t)+$$

$$+F_2\left(t,x(t),x'(t),\int_{t_0}^{t}H_2(t,\tau,x(\tau),x'(\tau))dq(\tau)\right),\quad t\ge t_0\,, \tag{2.3.1}$$

где $g(t)$, $q(t)$ - возрастающие функции, функции $F_2(t,x,y,z)$, $H_2(t,\tau,x,y)$ удовлетворяют по x,y,z следующим условиям слабой нелинейности:

$$|F_2(t,x,y,z)|\le l_0(t)|x|+l_1(t)|y|+l_2(t)|z|,\quad |H_2(t,\tau,x,y)|\le h_0(t,\tau)|x|+h_1(t,\tau)|y| \qquad (F_2,H_2)$$

с неотрицательными «коэффициентами Липшица»
$l_k(t),h_\nu(t,\tau)$ $(k=0,1,2;\ \nu=0,1)$.

Поставленная нами задача, насколько нам известно, ранее не изучена. Заметим, что в статье [17] для линейного ИДУВС вида (2.3.1) (в (2.3.1) $F_2(t,x,y,z)\equiv 0$) получены достаточные условия $x'(t)\in L_g^2(J,R)$ в случае $f(t)\in L_g^2(J,R)$.

Аналогично [13, 17] имеем

$$\int_{t_0}^{t}x''(s)\varphi(s)x'(s)dg(s)=\int_{t_0}^{t}\frac{dx'(s)}{ds}\varphi(s)\frac{dg(s)}{dg(s)}x'(s)dg(s)=\int_{t_0}^{t}g'(s)\varphi(s)\frac{1}{2}d(x'(s))^2=$$

$$=\frac{1}{2}g'(t)\varphi(t)(x'(t))^2-\frac{1}{2}g'(t_0)\varphi(t_0)(x'(t_0))^2-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dg(s)}[g'(s)\varphi(s)](x'(s))^2dg(s), \tag{2.3.2}$$

$$\int_{t_0}^{t}b(s)x(s)\varphi(s)x'(s)dg(s)=\int_{t_0}^{t}b(s)\varphi(s)x(s)\frac{dg(s)}{dg(s)}\frac{dx(s)}{ds}dg(s)=\int_{t_0}^{t}g'(s)b(s)\varphi(s)\frac{1}{2}d(x(s))^2=$$

$$=\frac{1}{2}g'(t)b(t)\varphi(t)(x(t))^2-\frac{1}{2}g'(t_0)b(t_0)\varphi(t_0)(x(t_0))^2-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dg(s)}[g'(s)b(s)\varphi(s)](x(s))^2dg(s). \tag{2.3.3}$$

Следуя работам [17, 28, 34, 36, 35] , с учетом условий (K), (f), получаем следующие соотношения:

$$2\int_{t_0}^{t}\varphi(s)x'(s)\left[\int_{t_0}^{s}K(s,\tau)x'(\tau)dg(\tau)\right]dg(s)=2\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}R_i(s,\tau)\psi_i(\tau)x'(s)\psi_i(s)x'(\tau)dg(\tau)dg(s)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[R_i(t,t_0)(X_i(t,t_0))^2-\int_{t_0}^{t}R'_{ig(s)}(s,t_0)(X_i(s,t_0))^2dg(s)+\right.$$

$$\left.+\int_{t_0}^{t}R'_{ig(\tau)}(t,\tau)(X_i(t,\tau))^2dg(\tau)-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}R''_{ig(s)g(\tau)}(s,\tau)(X_i(s,\tau))^2\,dg(\tau)dg(s)\right], \tag{2.3.4}$$

$$\int_{t_0}^{t}f(s)\varphi(s)x'(s)dg(s)=\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}E_i(s)\,\psi_i(s)x'(s)dg(s)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[E_i(t)X_i(t,t_0)-\int_{t_0}^{t}E'_{ig(s)}(s)X_i(s,t_0)dg(s)\right], \tag{2.3.5}$$

$$\int_{t_0}^{t}c'_{ig(s)}dg(s)=c_i(t)-c_i(t_0)\quad(i=1\ldots n), \tag{2.3.6}$$

где

$$X_i(t,\tau)\equiv\int_{\tau}^{t}\psi_i(\eta)x'(\eta)dg(\eta)\qquad(i=1\ldots n)\,.$$

Далее будем следовать работам [17, 28, 34, 36, 35]. Для любого фиксированного решения $x(t)$ ИДУВС (2.3.1) умножаем $\varphi(t)x'(t)$, интегрируем по возрастающей функции $g(t)$ в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, при этом вводим условия (K), (f), функции $R_i(t,\tau)$, $E_i(t)$, $c_i(t)$ $(i=1\ldots n)$, используем (2.3.2)-(2.3.6), условие(F_2,H_2), применяем леммы 1.2.1, 1.2.2. В результате будем иметь следующее неравенство:

$$g'(t)\varphi(t)(x'(t))^2+\int_{t_0}^{t}\Delta(s)(x'(s))^2dg(s)+g'(t)b(t)\varphi(t)(x(t))^2-$$

$$-\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dg(s)}[g'(s)b(s)\varphi(s)](x(s))^2\,dg(s)+\sum_{i=1}^{n}\{R_i(t,t_0)(X_i(t,t_0))^2-2E_i(t)X_i(t,t_0)+c_i(t)-$$

$$-\int_{t_0}^{t}\left[R'_{ig(s)}(s,t_0)(X_i(s,t_0))^2-2E'_{ig(s)}(s)X_i(s,t_0)+c'_{ig(s)}(s)\right]dg(s)+$$

$$\left.+\int_{t_0}^{t}R'_{ig(\tau)}(t,\tau)(X_i(t,\tau))^2\,dg(\tau)-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}R''_{ig(s)g(\tau)}(s,\tau)(X_i(s,\tau))^2\,dg(\tau)dg(s)\right\}\le c_*+$$

$$+2\int_{t_0}^{t}\varphi(s)|x'(s)|\left\{l_0(s)|x(s)|+l_1(s)|x'(s)|+\int_{t_0}^{s}\left[G_0(s,\tau)|x(\tau)|+G_1(s,\tau)|x'(\tau)|\right]dq(\tau)\right\}dg(s), \qquad (2.3.7)$$

где $\Delta(t)\equiv 2\varphi(t)a(t)-\frac{d}{dg(t)}[g'(t)\varphi(t)]$, $c_*=g'(t_0)\varphi(t_0)(x'(t_0))^2+g'(t_0)b(t_0)\varphi(t_0)(x(t_0))^2+\sum_{i=1}^{n}c_i(t_0)$, $G_k(t,\tau)\equiv l_2(t)\,h_k(t,\tau)$ $(k=0,1)$.

ТЕОРЕМА 2.3.1. Пусть 1) $g(t),q(t)$- возрастающие функции; $\varphi(t)\ge 0$; выполняются условия (F_2,H_2), (K),(f) с $f_0(t)\equiv 0$, (R), (β), (Δ);

2) $g'(t)b(t)\varphi(t)\ge b_0>0$, $\frac{d}{dg(t)}[g'(t)b(t)\varphi(t)]\le 0$;

3) $\int_{t_0}^{\infty}\varphi(s)(\beta(s))^{-\frac{1}{2}}\left\{l_0(s)+l_1(s)(\beta(s))^{-\frac{1}{2}}+\int_{t_0}^{t}\left[G_0(s,\tau)+G_1(s,\tau)(\beta(\tau))^{-\frac{1}{2}}\right]dq(\tau)\right\}dg(s)<\infty$.

Тогда для любого решения $x(t)\in C^2(J,R)$ с любым начальными данными $x^{(k)}(t_0)$ $(k=0,1)$ верны следующие утверждения:

$$x(t)=O(1), \qquad (2.3.8)$$

$$x'(t)=(\beta(t))^{-\frac{1}{2}}O(1), \qquad (2.3.9)$$

$$\Delta(t)(x'(t))^2\in L^1_{g(t)}(J,R). \qquad (2.3.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что условие I) из (R) теоремы 2.3.1 означает:

$$R_i(t,t_0)(X_i(t,t_0))^2-2E_i(t)X_i(t,t_0)+c_i(t)-$$

$$-\int_{t_0}^{t}\left[R'_{ig(s)}(s,t_0)(X_i(s,t_0))^2-2E'_{ig(s)}(s)X_i(s,t_0)+c'_{ig(s)}(s)\right]dg(s)\geq 0 \quad (i=1\ldots n)\,.$$

На основании этого, в силу условий 1), 2), из неравенства (2.3.7) приходим к следующему интегральному неравенству:

$$0\leq u(t)\equiv \beta(t)(x'(t))^2+\int_{t_0}^{t}\Delta(s)(x'(s))^2dg(s)+b_0(x(t))^2\leq c_*+$$

$$+2\int_{t_0}^{t}\varphi(s)(\beta(s))^{-\frac{1}{2}}(u(s))^{\frac{1}{2}}\Bigg\{b_0^{-\frac{1}{2}}l_0(s)(u(s))^{\frac{1}{2}}+l_1(s)(\beta(s))^{-\frac{1}{2}}(u(s))^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\int_{t_0}^{s}\left[b_0^{-\frac{1}{2}}G_0(s,\tau)+G_1(s,\tau)(\beta(\tau))^{-\frac{1}{2}}\right](u(\tau))^{\frac{1}{2}}dq(\tau)\Bigg\}dg(s)\,. \qquad (2.3.11)$$

Разрешая интегральное неравенство (2.3.11), аналогично лемме 3 из [33], или применяя лемму 1.2.3 и учитывая условие 3) теоремы 2.3.1, имеем

$$u(t)\leq c_*\exp\Bigg(2\int_{t_0}^{\infty}\varphi(s)(\beta(s))^{-\frac{1}{2}}\Bigg\{b_0^{-\frac{1}{2}}l_0(s)+l_1(s)(\beta(s))^{-\frac{1}{2}}+$$

$$+\int_{t_0}^{s}\left[b_0^{-\frac{1}{2}}G_0(s,\tau)+G_1(s,\tau)(\beta(\tau))^{-\frac{1}{2}}\right]dq(\tau)\Bigg\}dg(s)\Bigg)\equiv c_{**}<\infty. \qquad (2.3.12)$$

Из $u(t)\geq 0$ и (12) следует, что $\beta(t)(x'(t))^2\leq u(t)\leq c_{**}$,

$$|\,x'(t)|\leq (\beta(t))^{-\frac{1}{2}}\sqrt{c_{**}}\,, \qquad (2.3.13)$$

$$\int_{t_0}^{t}\Delta(s)(x'(s))^2dg(s)\leq u(t)\leq c_{**}\,, \qquad (2.3.14)$$

$$b_0\,(x(t))^2 \le c_{**} \Rightarrow |\,x(t)| \le b_0^{-\frac{1}{2}}\sqrt{c_{**}}\,. \qquad (2.3.15)$$

Следовательно, из (2.3.15), (2.3.13), (2.3.14) вытекают утверждения (2.3.8), (2.3.9), (2.3.10) теоремы 2.3.1 соответственно. Теорема 2.3.1 доказана.

Из доказанной теоремы 2.3.1 приходим к следующим следствиям.

СЛЕДСТВИЕ 2.3.1. Если выполняются все условия теоремы 2.3.1 и $\beta(t) \ge \beta_0 > 0$, то любое решение $x(t)$ и его первая производная $x'(t)$ ИДУВС (2.3.1) ограничены на J.

Первое утверждение сразу получается из (2.3.8), а второе утверждение - из (2.3.9).

СЛЕДСТВИЕ 2.3.2. Если выполняются все условия теоремы 2.3.1 и $\lim\limits_{t\to\infty}\beta(t) = \infty$, то первая производная любого решения $x(t)$ ИДУВС (2.3.1) стремится к нулю при $t \to \infty$, т.е. $x'(t) \to 0,\, t \to \infty$.

Это следует из (2.3.9).

СЛЕДСТВИЕ 2.3.3. Если выполняются все условия теоремы 2.3.1 и $\Delta(t) > 0,\; (\Delta(t))^{-1} \in L_g^1(J, R_+ / \{0\})$ (соответственно $\Delta(t) \ge \Delta_0 > 0$), то для любого решения $x(t)$ ИДУВС (2.3.1) его первая производная $x'(t) \in L_g^1(J, R)$ (соответственно $x'(t) \in L_g^2(J, R)$).

Первое утверждение этого следствия аналогично теореме 2[8] вытекает из неравенства

$$|x'(t)| \equiv |x'(t)|\,(\Delta(t))^{\frac{1}{2}}\,(\Delta(t))^{-\frac{1}{2}} \le \frac{1}{2}\left[\Delta(t)(x'(t))^2 + (\Delta(t))^{-1}\right]$$

интегрированием на $[t_0, t]$ по функции $g(t)$ и с учетом (2.3.10). Второе утверждение непосредственно имеем из (2.3.10).

ПРИМЕР 2.3.1. Для ИДУВС

$$x''(t)+\left(t^4+1+(t+3)\sqrt[3]{t^2}\right)x'(t)+\frac{3}{(t+3)^2}x(t)+$$

$$+\int_0^t\left\{\frac{e^{9(t+\tau)}\sin\sqrt[3]{t^2}\sin\sqrt[3]{\tau^2}}{\sqrt[3]{t^2}(t+3)^2\left(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{\tau}+5\right)}+e^{\sqrt{t}+\sqrt{\tau}}\sqrt[3]{\tau^2}(\tau+3)^2\right\}x'(\tau)d\sqrt[3]{\tau}=$$

$$=\frac{e^{9t}\sin\sqrt[3]{t^2}}{\sqrt[3]{t^2}(t+3)^2\left(\sqrt[3]{t}+2\right)}-e^{\sqrt{t}}+e^{-5t}x\sin x-\frac{|x'|x'}{(|x'|+1)(t+6)^{10}}+$$

$$+\int_0^t\left[\frac{e^{-t-\tau}x^3(\tau)}{x^2+1}-\frac{e^{-2t}|x'(\tau)|^5\cos x'(\tau)}{\left[(x'(\tau))^4+7\right](t+\tau+1)}\right]d\sqrt{\tau},\quad t\geq 0$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 2.3.1 и следствий 2.3.1-2.3.3

при $\varphi(t)\equiv\sqrt[3]{t^2}(t+3)^2$, здесь $t_0=0$, $g(t)=\sqrt[3]{t}$, $g'(t)\varphi(t)=\frac{1}{3}(t+3)^2\equiv\beta(t)$, $\frac{d}{dg(t)}[g'(t)\varphi(t)]\equiv 2(t+3)\sqrt[3]{t^2}$, $\Delta(t)\equiv 2(t^4+1)$, $n=2$, $\psi_1(t)\equiv e^{9t}\sin\sqrt[3]{t^2}$, $\psi_2(t)\equiv\sqrt[3]{t^2}(t+3)^2e^{\sqrt{t}}$, $R_1(t,\tau)\equiv\frac{1}{\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{\tau}+5}$, $E_1(t)\equiv\frac{1}{\sqrt[3]{t}+2}$, $c_1(t)\equiv\frac{1}{\sqrt[3]{t}+5}$, $R_2(t,\tau)\equiv 1$, $E_2(t)\equiv c_2(t)\equiv 1$, $l_0(t)\equiv e^{-5t}$, $l_1(t)\equiv\frac{1}{(t+6)^{10}}$, $l_2(t)\equiv 1$, $h_0(t,\tau)\equiv e^{-t-\tau}$, $h_1(t,\tau)\equiv\frac{e^{-2t}}{t+\tau+1}$.

Таким образом, мы нашли класс ИДУВС вида (2.3.1), для которого выше поставленная задача 2.3.1 решаема, при этом нам также удалось, снять условие $g'(t)\in C(J,R_+)$ из кандидатской диссертации Ж.О. Толубаева [58, с. 60-66], что удалось за счет введения некоторой весовой функции $\varphi(t)\geq 0$.

2.4. Заключение по главе 2

Установлены достаточные условия абсолютной и квадратичной интегрируемости на полуоси решения линейного ИУВС второго рода без предположения, что этими свойствами обладает его свободный член, при этом доказана общая теорема и из нее выведены множество следствий - коэффициентных признаков; для оценки, ограниченности, абсолютной и квадратичной интегрируемости на полуоси, стремления к нулю любого решения слабо нелинейного ИДУВС первого порядка, при этом рассматривается случай, когда производная возрастающей функции, по которой ведется интегрирование, может быть разрывной в некоторых точках полуоси; ограниченности на полуоси любого решения и его первой производной слабо нелинейного ИДУВС второго порядка, оценки, абсолютной и квадратичной интегрируемости на полуоси, стремления к нулю первой производной любого решения этого уравнения, при этом рассматривается случай, когда производная возрастающей функции, по которой ведется интегрирование, может быть разрывной в некоторых точках полуоси.

На все теоремы и на некоторые следствия из них построены иллюстративные примеры, подтверждающие выполнимость налагаемых условий.

Г Л А В А 3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛТЬЕСА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

3.1. Степенная абсолютная суммируемость решений слабо нелинейного интегрального уравнения Вольтерра-Стилтьеса второго рода с двумя независимыми переменными

В этом разделе на основе понятия производной по возрастающей функции, методом преобразования уравнений и методом неотрицательных квадратичных форм установлены достаточные условия абсолютной и квадратичной суммируемости на бесконечном секторе решения слабо нелинейного интегрального уравнения Вольтерра- Стилтьеса второго рода с двумя независимыми переменными.

Рассмотрим слабо нелинейное интегральное уравнения Вольтерра-Стилтьеса с двумя независимыми переменными вида:

$$m(t,x)u(t,x)+\int_0^t a(t,x,s)u(s,x)d\varphi(s)+\int_0^x b(t,x,y)u(t,y)d\psi(y)=f(t,x)+F(t,x,u), \qquad (3.1.1)$$

где $(t,x)\in G=\{(t,x): o\le t<\infty, o\le x<\infty\}$, $m(t,x)$, $a(t,x,s), b(t,x,y), f(t,x)$ - известные функции, причем $m(t,x)>0$, $u(t,x)$- неизвестная функция. $\varphi(t),\psi(x)$ - известные строго возрастающие непрерывные функции $\varphi(0)=0$, $\psi(0)=0$; $F(t,x,u)$– известная непрерывная функция, удовлетворяющая в области G_1 следующего условия слабой нелинейности:

$$|F(t,x,u)|\le g(t,x)|u| \qquad (F)$$

с неотрицательной $g(t,x)$.

Отметим, что множитель $m(t,x)$ в уравнении (3.1.1) появляется, если обе части рассматриваемого уравнения вида (3.1.1) с $m(t,x)\equiv 1$ умножить на любую весовую функцию $m(t,x)\neq 0$ тождественно. Следовательно, функция $m(t,x)$ в уравнение (3.1.1) выполняет роль весовой функции.

В данной работе, используя метод, примененный в статье [12], установливаются достаточные условия абсолютной и квадратичной суммируемости решений уравнения (3.1.1) в области G.

Под $u(t,x)\in L^p_{\varphi,\psi}(G)$ $(p>0)$ понимается:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty |u(t,x)|^p d\,\varphi(t)\,d\psi(x)<\infty \qquad (p>0).$$

Тогда при $p=1 \Rightarrow$ абсолютная суммируемость решения $u(t,x)$ на бесконечном секторе G, а при $p=2 \Rightarrow$ квадратичная суммируемость решения $u(t,x)$ на бесконечном секторе G.

Предположим выполнение следующих условий:

А) функции $a(t,x,s)$, $a'_{\varphi(t)}(t,x,s)$ и $a''_{\varphi(\mathrm{t})\varphi(\mathrm{s})}(t,x,s)$ – непрерывны в области G_1, где $G_1=\{(t,x,s): o\le s\le t<\infty, o\le x<\infty\}$, $a(t,x,o)\ge 0$ и $a'_{\varphi(t)}(t,x,o)\le 0$ при $(t,x)\in G$, $a'_{\varphi(s)}(t,x,s)\ge 0$ и $a''_{\varphi(\mathrm{t})\varphi(\mathrm{s})}(t,x,s)\le 0$ при $(t,x,s)\in G_1$;

В) функции $b(t,x,y)$, $b'_{\psi(y)}(t,x,y)$ и $b''_{\psi(\mathrm{x})\psi(\mathrm{y})}(t,x,y)$ - непрерывны в области $G_2=\{(t,x,y): o\le t<\infty, o\le y\le x<\infty\}$, $b(t,x,o)\ge 0$ и $b'_{\psi(x)}(t,x,o)\le 0$ при $(t,x)\in G$, $b'_{\psi(y)}(t,x,y)\ge 0$ и $b''_{\psi(\mathrm{x})\psi(\mathrm{y})}(t,x,y)\le 0$ при $(t,x,y)\in G_2$.

ТЕОРЕМА 3.1.1. Пусть выполняются условия 1) А), В); 2) (F);

3) $m(t,x)>0$, $\dfrac{f(t,x)}{\sqrt{m(t,x)}}\in L^2_{\varphi,\psi}(G)$; 4) $\Delta(t,x)\equiv m(t,x)-2g(t,x)\ge\Delta_0>0$

(соответственно $\Delta(t,x)>0$, $(\Delta(t,x))^{-1}\in L^1_{\varphi,\psi}(G)$). Тогда любое решение уравнения (3.1.1) принадлежит пространству $L^2_{\varphi,\psi}(G)$ (соответственно пространству $L^1_{\varphi,\psi}(G)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(t,x)$ - решение уравнения (3.1.1). Тогда уравнение (3.1.1) умножаем на $u(t,x)$ и интегрируем по области $G_{tx}=\{(s,y):0\le s\le t,\ 0\le y\le x\},\ (t,x)\in G$, и получим тождество:

$$\int_0^t\int_0^x m(s,y)u^2(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)+\int_0^t\int_0^x\int_0^s a(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y b(s,y,z)u(s,z)u(s,y)d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(s)\equiv\int_0^t\int_0^x f(s,y)u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\int_0^t\int_0^x F(s,y,u(s,y))u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s). \qquad (3.1.2)$$

Преобразуем второй и третий интегралы левой части (3.1.2) по формуле интегрирования по частям и применением формулы Дирихле. Сначала преобразуем второй интеграл

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s a(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)=$$

$$=-\int_0^t\int_0^x\left[\int_0^s a(s,y,\tau)\frac{\partial}{\partial\varphi(\tau)}\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)d\varphi(\tau)\right]u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)=$$

$$=\int_0^t\int_0^x a(s,y,o)\left(\int_0^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s a'_{\varphi(\tau)}(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)u(s,y)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x a(t,y,o)\left(\int_0^t u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(y)-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x a'_{\varphi(s)}(s,y,0)\left(\int_0^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x a'_{\varphi(\tau)}(t,y,\tau)\left(\int_\tau^t u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(y)d\varphi(\tau)-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_\tau^t a''_{\varphi(\tau)\varphi(s)}(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\varphi(s)d\psi(y)d\varphi(\tau).$$

Отсюда применив формулу Дирихле, окончательно имеем

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s a(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)=\frac{1}{2}\int_0^x a(t,y,0)\left(\int_0^t u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(y)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x a'_{\varphi(s)}(s,y,o)\left(\int_0^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(y)d\varphi(s)+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x a'_{\varphi(\tau)}(t,y,\tau)\left(\int_\tau^t u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(y)d\varphi(\tau)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s a''_{\varphi(\tau)\varphi(s)}(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s). \qquad (3.1.3)$$

Аналогичным образом для третьего интеграла левой части тождества (3.1.2) получим соотношение

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^y b(s,y,z)u(s,z)u(s,y)d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(s)=\frac{1}{2}\int_0^t b(s,x,0)\left(\int_0^x u(s,\nu)d\varphi(\nu)\right)^2 d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s b'_{\psi(y)}(s,y,o)\left(\int_0^y u(s,\nu)d\varphi(\nu)\right)^2 d\psi(y)d\varphi(s)+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x b'_{\psi(z)}(s,x,z)\left(\int_z^x u(s,\nu)d\varphi(\nu)\right)^2 d\psi(z)d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y b''_{\psi(z)\psi(y)}(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\varphi(\nu)\right)^2 d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(s). \qquad (3.1.4)$$

Подставляя преобразования (3.1.3),(3.1.4) в (3.1.2), учитывая условия 1), 2) теоремы, имеем

$$2\int_0^t\int_0^x m(s,y)u^2(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)\le 2\int_0^t\int_0^x |f(s,y)||u(s,y)|d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+2\int_0^t\int_0^x g(s,y)u^2(s,y)\,d\psi(y)d\varphi(s). \qquad (3.1.5)$$

Теперь проделаем следующее преобразование, выделением полного квадрата:

$$m(s,y)(u(s,y))^2-2|f(s,y)||u(s,y)|=$$

$$=m(s,y)\left[(u(s,y))^2-2\frac{|f(s,y)||u(s,y)|}{m(s,y)}+\frac{f^2(s,y)}{m^2(s,y)}-\frac{f^2(s,y)}{m^2(s,y)}\right]=$$

$$=m(s,y)\left[|u(s,y)|-\frac{|f(s,y)|}{m(s,y)}\right]^2-\frac{f^2(s,y)}{m(s,y)}. \qquad (3.1.6)$$

Отсюда с учетом преобразования (3.1.6), будем получать неравенство:

$$\int_0^t\int_0^x \Delta(s,y)u^2(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)+\int_0^t\int_0^x m(s,y)\left[|u(s,y)|-\frac{|f(s,y)|}{m(s,y)}\right]^2 d\psi(y)d\varphi(s)\le$$

$$\le\int_0^t\int_0^x \frac{f^2(s,y)}{m(s,y)}d\psi(y)d\varphi(s). \qquad (3.1.7)$$

Из (3.1.7) в силу условия 3) теоремы имеем

$$\int_0^t\int_0^x \Delta(s,y)u^2(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)\le f_0, \qquad (3.1.8)$$

где

$$f_0=\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f^2(s,y)}{m(s,y)}d\psi(y)d\varphi(s)<\infty.$$

Из (3.1.8) на основании первого из условий 4) теоремы вытекает

$$\Delta_0\int_0^t\int_0^x u^2(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)\le f_0,$$

что означает $u(t,x)\in L^2_{\varphi,\psi}(G)$.

Второе из утверждений теоремы, т.е. $u(t,x)\in L^1_{\varphi,\psi}(G)$, вытекает из следующего соотношения:

$$|u(t,x)| = |u(t,x)| \left(\Delta(t,x)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\Delta(t,x)\right)^{-\frac{1}{2}} \le \frac{1}{2}\left[\Delta(t,x)u^2(t,x) + \left(\Delta(t,x)\right)^{-1}\right]$$

интегрированием по области G, аналогично теореме 2 [31], с учетом второго из условий 4) теоремы. Теорема 3.1.1 полностью доказана.

ПРИМЕР 3.1.1. Для интегрального уравнения

$$e^{t+x}u(t,x) + \int_0^t e^{-t+x+s}\, u(s,x)d\varphi(s) + \int_0^x e^{t^2-x^2+y^2}\, u(t,y)d\psi(y) = t - x - \frac{\sin e^{t+x} u}{2(1+u^2)},$$

где

$(t,x) \in G = [0;\infty)\times[0;\infty)$, $\varphi(t) = \sqrt{t}$, $\psi(x) = \sqrt{x}$, выполняются все условия теоремы 3.1.1, здесь $m(t,x) = e^{t+x}$, $a(t,x,s) = e^{-t+x+s}$, $b(t,x,y) = e^{t^2-x^2+y^2}$, $g(t,x) = \frac{1}{2}e^{t+x}$,

$\Delta_0 = \frac{1}{2}$, $(\Delta(t,x))^{-1} = 2e^{-t-x} \in L^1_{\varphi,\psi}(G)$, $\frac{f^2(t,x)}{m(t,x)} = (t-x)^2 e^{-t-x} \in L^1_{\varphi,\psi}(G)$.

Также А) $a(t,x,0) = e^{-t+x} \ge 0$, $a'_{\varphi(t)}(t,x,0) = -2\sqrt{t}\, e^{-t+x} \le 0$,

$a'_{\varphi(s)}(t,x,s) = 2\sqrt{s}\, e^{-t+x+s} \ge 0$, $a''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,x,s) = -4\sqrt{ts}\, e^{-t+x+s} \le 0$;

В) $b(t,x,0) = e^{t^2-x^2} \ge 0$, $b'_{\psi(x)}(t,x,0) = -4x\sqrt{x}\, e^{t^2-x^2} \le 0$,

$b'_{\psi(y)}(t,x,y) = 4y\sqrt{y}\, e^{t^2-x^2+y^2} \ge 0$, $b''_{\psi(x)\psi(y)}(t,x,y) = -16xy\sqrt{xy}\, e^{t^2-x^2+y^2} \le 0$.

Следовательно, любое решение этого уравнения $u(t,x) \in L^p_{\varphi,\psi}(G)$ $(p = 1,2)$, т.е. любое решение рассматриваемого уравнения абсолютно и квадратично суммируемо в бесконечном секторе $G = [0;\infty)\times[0;\infty)$.

3.2. Ограниченность решений линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса второго рода с двумя независимыми переменными

Рассмотрим следующее линейное ИУВС:

$$u(t,x)=\int_{t_0}^{t}K_0(t,x,s)u(s,x)d\varphi(s)+\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b}K_1(t,x,s,y)u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)+f(t,x), \qquad (3.2.1)$$

где $(t,x)\in G=[t_0,\infty)\times[a,b]$, $K_0(t,x,s)$, $K_1(t,x,s,y)$, $f(t,x)$ - известные функции; $u(t,x)$ - неизвестная функция, $G_0=\{(t,x,s): t_0\le s\le t<\infty\ , a\le x\le b\}$, $G_1=\{(t,x,s,y): t_0\le s\le t<\infty\ , a\le y\le b, a\le x\le b\}$, $\varphi(t),\psi(x)$ - известные строго возрастающие непрерывные функции соответственно на $[t_0,\infty)$ и $[a,b]$, $\varphi(t)\in C^1[t_0,\infty)$.

Рассматривается задача об ограниченности решения ИУВС (3.2.1) в области G

Пусть выполняются следующие условия:

а) $K_0(t,x,s)$ - непрерывная функция на G_0, $|K_0(t,x,s)||\varphi'(s)|\le l_1(s)$ при всех $(t,x,s)\in G_0$, а $l_1(s)\in L_1[t_0,\infty)$ и $l_1(s)$ - неотрицательная функция на $[t_0,\infty)$.

б) $K_1(t,x,s,y)$ - непрерывная функция на G_1, $|K_1(t,x,s,y)||\varphi'(s)|\le l_2(s)$ при всех $(t,x,s,y)\in G_1$, а $l_2(s)\in L_1[t_0,\infty)$ и $l_2(s)$ - неотрицательная функция на $[t_0,\infty)$.

в) $f(t,x)$ - непрерывная функция на G, $\sup\limits_{(t,x)\in G}|f(t,x)|=f_0<\infty$.

ТЕОРЕМА 3.2.1. Пусть выполняются условия а), б) и в). Тогда существует единственное непрерывное ограниченное решение ИУВС (3.2.1) и справедлива оценка

$$\sup_{(t,x)\in G}|u(t,x)|\le Cf_0, \qquad (3.2.2)$$

где

$$C = \exp\left\{\int_{t_0}^{\infty}[l_1(s)+l_2(s)(\psi(b)-\psi(a))]ds\right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.2.1) получаем

$$|u(t,x)| \le \int_{t_0}^{t} l_1(s)|u(s,x)|ds + \int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b} l_2(s)|u(s.y)|d\psi(y)ds + f_0. \qquad (3.2.3)$$

Вводим обозначение:

$$v(t) = \sup_{x\in[a,b]}|u(t,x)|$$

Тогда из (3.2.3) имеем

$$v(t) \le \int_{t_0}^{t}[l_1(s)+l_2(s)(\psi(b)-\psi(a))]v(s)ds + f_0\,, \qquad t \ge t_0. \qquad (3.2.4)$$

Применяя к (3.2.4) неравенства Гронуолла-Беллмана, имеем

$$v(t) \le f_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t}[l_1(s)+l_2(s)(\psi(b)-\psi(a))]\,ds\right).$$

Отсюда вытекает оценка (3.2.2). Теорема 3.2.1 доказана.

ПРИМЕР 3.2.1. Рассмотрим уравнение

$$u(t,x) = \int_{0}^{t}\frac{1}{(1+t^2+x^2+s^2)(3+s)}u(s,x)d\varphi(s) +$$

$$+\int_{0}^{t}\int_{0}^{1}\frac{2}{(3+t^3+x+y+s^2)(1+s)}u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s) + e^{-t}\sin x, \qquad (3.2.5)$$

Здесь $t_0 = 0$, $a = 0$, $b = 1$, $\varphi(t) = t^2$, $\psi(x) = x^3$, $\varphi'(t) = 2t$, $\psi(1) = 1$, $\psi(0) = 0$.

$$K_0(t, x.s)=\frac{1}{(1+t^2+x^2+s^2)(3+s)}, \quad K_1(t,x,s,y)=\frac{2}{(3+t^3+x+y+s^2)(1+s)}, \quad f(t,x)=e^{-t}\sin x;$$

Проверим условия а) - в):

а) $|K_0(t,x,s)||\varphi'(s)| = \frac{2s}{(3+s)(1+t^2+x^2+s^2)} \le \frac{2}{1+s^2} = l_1(s)$;

б) $|K_1(t,x,s,y)||\varphi'(s)| = \frac{4s}{(1+s)(3+t^3+x+y+s^2)} \le \frac{4}{3+s^2} = l_2(s)$;

в) $|f(t,x)| = |e^{-t}\sin x| \le 1 = f_0$.

Поэтому в силу теоремы 3.2.1 для решения $u(t,x)$ ИУВС (3.2.5) справедлива следующая оценка: $\sup\limits_{(t,x)\in G}|u(t,x)| \le Cf_0 = C$,

где $C = \exp\left\{\int\limits_{t_0}^{\infty}[l_1(s)+l_2(s)(\psi(b)-\psi(a))]ds\right\} =$

$$= \exp\left\{\int\limits_0^{\infty}\left[\frac{2}{1+s^2}+\frac{4}{3+s^2}(1-0)\right]ds\right\} = \exp\left\{\left(2arctgs+\frac{4}{\sqrt{3}}arctgs\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^{\infty}\right\} =$$

$$=\exp\left\{2\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2}\right\} = \exp\left\{\pi+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right\} = e^{\frac{(\sqrt{3}+2)\pi}{\sqrt{3}}}, \quad \text{т.е.}$$

$$\sup_{(t,x)\in G}|u(t,x)| \le e^{\frac{(\sqrt{3}+2)\pi}{\sqrt{3}}} f_0 = e^{\frac{(\sqrt{3}+2)\pi}{\sqrt{3}}}.$$

ПРИМЕР 3.2.2. Рассмотрим уравнение

$$u(t,x)=\int\limits_0^t \frac{5\sin(t+x)}{1+t^3+x+s^2}u(s,x)d\varphi(s)+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \frac{7\cos(t+x+s)}{5+t^3+x^2+y^2+s^2}u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)+3\cos(t+x). \qquad (3.2.6)$$

Тогда $t_0=0$, $a=0$, $b=1$, $\varphi(s)=s$, $\psi(x)=\sqrt{x}$, $\varphi'(s)=1$, $\psi(1)=1$, $\psi(0)=0$,

$$K_0(t,x,s)=\frac{5\sin(t+x)}{1+t^3+x+s^2},\quad K_1(t,x,s,y)=\frac{7\cos(t+x+s)}{5+t^3+x^2+y^2+s^2},\quad f(t,x)=3\cos(t+x)\ ;$$

Проверим выполнения условий а) - в):

а) $|K_0(t,x,s)||\varphi'(s)|=\dfrac{5|\sin(t+x)|}{|1+t^3+x+s^2|}\le\dfrac{5}{1+s^2}=l_1(s)$;

б) $|K_1(t,x,s,y)||\varphi'(s)|=\dfrac{7|\cos(t+x+s)|}{|5+t^3+x^2+y^2+s^2|}\le\dfrac{7}{5+s^2}=l_2(s)$;

в) $|f(t,x)|=|3\cos(t+x)|\le 3=f_0$.

Значит, все условия теоремы 3.2.1 для ИУВС (3.2.6) выполнены и поэтому справедлива оценка: $\sup\limits_{(t,x)\in G}|u(t,x)|\le Cf_0=3C$,

где $\quad C=\exp\left\{\int\limits_{t_0}^{\infty}[l_1(s)+l_2(s)(\psi(b)-\psi(a))]ds\right\}=\exp\left\{\int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{5}{1+s^2}+\frac{7}{5+s^2}(1-0)\right]ds\right\}=$

$$=\exp\left\{\left(5arctgs+\frac{7}{\sqrt5}arctgs\frac{s}{\sqrt5}\right)\Bigg|_0^{\infty}\right\}=\exp\left\{5\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{7}{\sqrt5}\cdot\frac{\pi}{2}\right\}=\exp\left\{\frac{5\sqrt5\pi+7\pi}{2\sqrt5}\right\}=e^{\frac{(5\sqrt5+7)\pi}{2\sqrt5}},$$

т.е. $\sup\limits_{(t,x)\in G}|u(t,x)|\le e^{\frac{(5\sqrt5+7)\pi}{2\sqrt5}}f_0=3e^{\frac{(5\sqrt5+7)\pi}{2\sqrt5}}$.

3.3. Ограниченность решений нелинейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса второго рода с двумя независимыми переменными

Рассмотрим следующее нелинейное ИУВС:

$$v(t,x)=\int\limits_{t_0}^{t}H_0(t,x,s,v(s,x))\,d\varphi(s)+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{a}^{b}H_1(t,x,s,y,v(s,y))\,d\psi(y)d\varphi(s)+f(t,x),\qquad(3.3.1)$$

где $(t,x)\in G=[t_0,\infty)\times[a,b]$, $H_0(t,x,s,v)$, $H_1(t,x,s,y,v)$, $f(t,x)$ - известные функции; $v(t,x)$ - неизвестная функция ,

$G_0=\{(t,x,s): t_0\le s\le t<\infty\ ,\ a\le x\le b\}$,

$G_1=\{(t,x,s,y): t_0\le s\le t<\infty\ ,\ a\le y\le b, a\le x\le b\}$, $\varphi(t),\psi(x)$ - известные строго возрастающие непрерывные функции соответственно на $[t_0,\infty)$ и $[a,b]$, $\varphi(t)\in C^1[t_0,\infty)$.

Рассматривается задача об ограниченности решений ИУВС (3.3.1) в области G.

Пусть выполняются следующие условия:

а) $H_0(t,x,s,v)$ - непрерывная функция на $G_0\times R$,

$|H_0(t,x,s,v)||\varphi'(s)|\le l_1(s)|v|$ и при всех $(t,x,s,v)\in G_0\times R$, $0\le l_1(s)$ при всех, $s\in[t_0,\infty)$, $l_1(s)\in L_1[t_0,\infty)$;

б) $H_1(t,x,s,y,v)$ - непрерывная функция на $G_1\times R$,

$|H_1(t,x,s,y,v)||\varphi'(s)|\le l_2(s)|v|$ и при всех $(t,x,s,y,v)\in G_1\times R$, $0\le l_2(s)$ при всех $s\in[t_0,\infty)$, $l_2(s)\in L_1[t_0,\infty)$.

в) $f(t,x)$ - непрерывная функция на G, $\sup\limits_{(t,x)\in G}|f(t,x)|=f_0<\infty$.

ТЕОРЕМА 3.3.1. Пусть выполняются условия а), б) и в). Тогда любое непрерывное решение ИУВС (3.3.1) ограничено в G.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.3.1) в силу условий теоремы получаем

$$|v(t,x)|\le\int\limits_{t_0}^{t}l_1(s)|v(s,x)|ds+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{a}^{b}l_2(s)|v(s,y)|d\psi(y)ds+f_0, \tag{3.3.2}$$

Вводя обозначение:

$$g(t) = \sup_{x\in[a,b]} |v(t,x)|,$$

из (3.3.2) имеем

$$g(t) \le \int_{t_0}^{t} [l_1(s) + l_2(s)(\psi(b) - \psi(a))] g(s) ds + f_0 , \qquad t \ge t_0. \tag{3.3.3}$$

Из (3.3.3), применением леммы Гронуолла-Беллмана, получаем

$$g(t) \le f_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} [l_1(s) + l_2(s)(\psi(b) - \psi(a))]\, ds \right) ,$$

из которого следует

$$\sup_{(t,x)\in G} |v(t,x)| \le C f_0 , \tag{3.3.4}$$

где $C = \exp\left\{ \int_{t_0}^{\infty} [l_1(s) + l_2(s)(\psi(b) - \psi(a))] ds \right\}.$

Теорема 3.3.1 доказана.

ПРИМЕР 3.3.1. Рассмотрим уравнение

$$v(t,x) = \int_0^t \frac{v(s,x)}{[1 + v^2(s,x)](1 + t^2 + s^2)^2}\, d(s^3) + \int_0^t \int_0^1 \frac{v^2(s,y) d(\sqrt{y}) d(s^3)}{[2 + v^2(s,y)](1 + 2t^4 + s^2)^2} +$$

$$+ \frac{t^2 x^4}{1 + t^2}, \; t \ge 0, \; x \in [0,1], \tag{3.3.5}$$

Здесь $t_0 = 0$, $a = 0$, $b = 1$, $\varphi(s) = s^3$, $\psi(y) = \sqrt{y}$, $\varphi'(s) = 3s^2$, $\psi(1) = 1$, $\psi(0) = 0$,

$$H_0(t,x,s,v) = \frac{v(s,x)}{[1 + v^2(s,x)](1 + t^2 + s^2)^2},$$

$$H_1(t,x,s,y,v) = \frac{v^2(s,y)}{[2 + v^2(s,y)](1 + 2t^4 + s^2)^2}, \quad f(t,x) = \frac{t^2 x^4}{1 + t^2};$$

Оценим $H_0(t,x,s,v)$ и $H_1(t,x,s,y,v)$:

$$\left|H_0(t,x,s,v)\right|\left|\varphi'(s)\right| = \left|\frac{3s^2 v(s,x)}{\left[1+v^2(s,x)\right]\left(1+t^2+s^2\right)^2}\right| \le \frac{3}{1+s^2}|v| = l_1(s)|v|,$$

где $l_1(s) = \dfrac{3}{1+s^2}$.

Тогда $F(v) = \dfrac{v}{2+v^2}$,

а) если $0 \le v \le 1$, то $F(v) = \dfrac{v}{2+v^2} \le \dfrac{1}{2}$;

б) если $v \ge 1$, то $F(v) = \dfrac{v}{2+v^2} \le 1$.

Отсюда $\dfrac{|v|}{2+\left|v^2\right|} \le 1$. Далее

$$\left|H_1(t,x,s,y,v)\right|\left|\varphi'(s)\right| = \left|\frac{3s^2 v^2(s,y)}{\left[2+v^2(s,y)\right]\left(1+2t^4+s^2\right)^2}\right| \le \frac{3}{1+s^2}|v| = l_2(s)|v|,$$

где $l_2(s) = \dfrac{3}{1+s^2}$; $\quad |f(t,x)| = \left|\dfrac{t^2 x^4}{1+t^2}\right| \le \dfrac{t^2}{1+t^2} \le 1 = f_0$,

Поэтому в силу теоремы 3.3.1 для решения $u(t,x)$ ИУВС (3.3.5) справедлива следующая оценка:

$$\sup_{(t,x)\in G}|u(t,x)| \le Cf_0 = C,$$

где

$$C = \exp\left\{\int_{t_0}^{\infty}\left[l_1(s) + l_2(s)(\psi(b) - \psi(a))\right]ds\right\} =$$

$$= \exp\left\{\int_0^{\infty}\left[\frac{3}{1+s^2} + \frac{3}{1+s^2}(1-0)\right]ds\right\} = \exp\left\{6arctgs\Big|_0^{\infty}\right\} = \exp\{6(arctg\infty - arctg0)\} =$$

$$=\exp\left\{6\cdot\frac{\pi}{2}\right\}=e^{3\pi}. \quad \text{т.е.} \quad \sup_{(t,x)\in G}|v(t,x)|\le e^{3\pi}f_0=e^{3\pi}.$$

ПРИМЕР 3.3.2. Рассмотрим уравнение

$$v(t,x)=\int_0^t \frac{\cos(t+v(s,x))v(s,x)\cdot s^{\frac{5}{2}}}{[2+\sin(s+t+v(s,x))](3+s^3)^2}\,d(\sqrt{s})+$$

$$+\int_0^t\int_0^1 \frac{\sin(t^2+x^2+y^2+s^2+v^2(s,x))s^{\frac{3}{2}}v(s,y)d(\sqrt[4]{y})d(\sqrt{s})}{[4+\cos(t+s+v^3(s,y)+y^2)](9+s^2)^2}+\frac{t^4x^3}{(1+t^2)^2},\ t\ge 0,\ x\in[0,1], \tag{3.3.6}$$

Здесь $t_0=0$, $a=0$, $b=1$, $\varphi(s)=\sqrt{s}$, $\psi(y)=\sqrt[4]{y}$, $\varphi'(s)=\dfrac{1}{2\sqrt{s}}$, $\psi(1)=1$, $\psi(0)=0$,

$$H_0(t,x,s,v)=\frac{\cos(t+v(s,x))v(s,x)\cdot s^{\frac{5}{2}}}{[2+\sin(s+t+v(s,x))](3+s^3)^2},$$

$$H_1(t,x,s,y,v)=\frac{\sin(t^2+x^2+y^2+s^2+v^2(s,x))s^{\frac{3}{2}}v(s,y)}{[4+\cos(t+s+v^3(s,y)+y^2)](9+s^2)^2}, \qquad f(t,x)=\frac{t^4x^3}{(1+t^2)^2};$$

Оценим $H_0(t,x,s,v)$ и $H_1(t,x,s,y,v)$:

$$|H_0(t,x,s,v)||\varphi'(s)|=\left|\frac{\frac{1}{2\sqrt{s}}\cos(t+v(s,x))v(s,x)\cdot s^{\frac{5}{2}}}{[2+\sin(s+t+v(s,x))](3+s^3)^2}\right|\le\frac{s^2}{2(3+s^3)^2}|v|=l_1(s)|v|,$$

где $l_1(s)=\dfrac{s^2}{2(3+s^3)^2}$.

$$|H_1(t,x,s,y,v)||\varphi'(s)|=\left|\frac{\frac{1}{2\sqrt{s}}\sin(t^2+x^2+y^2+s^2+v^2(s,x))s^{\frac{3}{2}}v(s,y)}{[4+\cos(t+s+v^3(s,y)+y^2)](9+s^2)^2}\right|\le\frac{s}{6(9+s^2)^2}|v|=l_2(s)|v|,$$

где $\quad l_2(s) = \dfrac{s}{6\left(9+s^2\right)^2}$; $\quad |f(t,x)| = \left|\dfrac{t^4x^3}{\left(1+t^2\right)^2}\right| \le 1 = f_0$,

Поэтому в силу теоремы 3.3.1 для решения $u(t,x)$ ИУВС (3.3.6) справедлива следующая оценка:

$$\sup_{(t,x)\in G}|u(t,x)| \le Cf_0 = C,$$

где $C = \exp\left\{\int_{t_0}^{\infty}\left[l_1(s) + l_2(s)(\psi(b) - \psi(a))\right]ds\right\} =$

$$= \exp\left\{\int_0^\infty\left[\frac{s^2}{2\left(3+s^3\right)^2} + \frac{s}{6\left(9+s^2\right)^2}(1-0)\right]ds\right\} = \exp\left\{\frac{1}{6}\int_0^\infty\left(3+s^3\right)^{-2}d\left(3+s^3\right) + \frac{1}{12}\int_0^\infty\left(9+s^2\right)^{-2}d\left(9+s^2\right)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\left[-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3+s^3} - \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{9+s^2}\right]_0^\infty\right\} = \exp\left\{\frac{1}{18} + \frac{1}{108}\right\} = \exp\left\{\frac{7}{108}\right\} = e^{\frac{7}{108}}.$$

т.е. $\sup\limits_{(t,x)\in G}|v(t,x)| \le e^{\frac{7}{108}}f_0 = e^{\frac{7}{108}}$.

3.4. О единственности решения линейного интегрального уравнения Вольтерра-Стилтьеса первого рода с двумя независимыми переменными

Рассмотрим линейное ИУВС вида

$$\int_0^t a(t,x,s)u(s,x)d\varphi(s) + \int_0^x b(t,x,y)u(t,y)d\psi(y) + \int_0^t\int_0^x K(t,x,s,y)u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s) = f(t,x), \quad (3.4.1)$$

где $(t,x)\in G = \{(t,x): o \le t \le T, o \le x \le l\}$, $a(t,x,s), b(t,x,y), K(t,x,s,y)$ - известные функции, $u(t,x)$- неизвестная функция. $\varphi(t),\psi(x)$ - известные строго возрастающие непрерывные функции. $\varphi(0) = 0,\ \psi(0) = 0.$

Предположим выполнение следующих условий:

1) функция $a(t,x,s)$ и $a''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,x,s)$ – непрерывна в области G_1, где $G_1=\{(t,x,s): o\le s\le t\le T, o\le x\le l\}$, $a(t,x,o)\ge 0$ при $(t,x)\in G,$ $a''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,x,s)\le 0$ при $(t,x,s)\in G_1$;

2) функции $b(t,x,y)$ и $b''_{\psi(x)\psi(y)}(t,x,y)$ - непрерывна в области $G_2=\{(t,x,y): o\le t\le T, o\le y\le x\le l\}$, $b(t,x,o)\ge 0$ при $(t,x)\in G,$ $b''_{\psi(x)\psi(y)}(t,x,y)\le 0$ при $(t,x,y)\in G_2$;

3) функции $K(t,x,s,y)$ и $K^{(IV)}_{\varphi(t)\psi(x)\varphi(s)\psi(y)}(t,x,s,y)$ - непрерывны в области $G_3=\{(t,x,s,y): o\le s\le t\le T, o\le y\le x\le l\}$, для любых при $(t,x,s,y)\in G_3$ справедливо $a(s,y,o)b(s,y,o)-(\psi(x)-\psi(y))(\varphi(t)-\varphi(s))K^2(s,y,o,o)\ge 0$,

$$a''_{\varphi(\tau)\varphi(s)}(s,y,\tau)b''_{\psi(z)\psi(y)}(s,y,z)-\varphi(s)\psi(y)\,(K''_{\varphi(\tau)\psi(z)}(s,y,\tau,z))^2\ge 0,$$

$$K(s,y,o,o)-(\varphi(t)-\varphi(s))K'_{\varphi(s)}(s,y,o,o)-(\psi(x)-\psi(y))K'_{\psi(y)}(s,y,o,o)+$$

$+(\psi(x)-\psi(y))(\varphi(t)-\varphi(s))K''_{\varphi(s)\psi(y)}(s,y,o,o)\ge\alpha>0,$ где α - известное постоянное число;

4) для любых $(t,x,y,z)\in G_4=\{(t,x,y,z): 0\le t\le T, o\le z\le y\le x\le l\}$ справедливо $a'_{\varphi(t)}(t,y,o)b'_{\psi(z)}(t,y,z)+\psi(y)(\psi(x)-\psi(y))(K'_{\psi(z)}(t,y,o,z))^2\le 0$;

5) для любых $(t,x,s,\tau)\in G_5=\{(t,x,s,\tau): 0\le\tau\le s\le t\le T,\ o\le x\le l\}$ справедливо $a'_{\varphi(\tau)}(s,x,\tau)b'_{\psi(x)}(s,x,o)+\varphi(s)(\varphi(t)-\varphi(s))(K'_{\varphi(\tau)}(s,x,\tau,o))^2\le 0.$;

6) для любых $(t,x,s,y,\tau,z)\in G_6=\{(t,x,s,y,\tau,z): 0\le\tau\le s\le t\le T,\ o\le z\le y\le x\le l\}$ справедливо

$$K'_{\varphi(\tau)}(s,y,\tau,o)-(\varphi(t)-\varphi(s))K''_{\varphi(\tau)\varphi(s)}(s,y,\tau,o)-(\psi(x)-\psi(y))K''_{\varphi(\tau)\psi(y)}(s,y,\tau,o)+$$
$$+(\varphi(t)-\varphi(s))(\psi(x)-\psi(y))K'''_{\varphi(\tau)\varphi(s)\psi(y)}(s,y,\tau,o)\ge 0,$$

$$K'_{\psi(z)}(s,y,o,z)-(\varphi(t)-\varphi(s))K''_{\psi(z)\varphi(s)}(s,y,o,z)-(\psi(x)-\psi(y))K''_{\psi(z)\psi(y)}(s,y,o,z)+$$
$$+(\varphi(t)-\varphi(s))(\psi(x)-\psi(y))K'''_{\psi(z)\varphi(s)\psi(y)}(s,y,o,z)\ge 0,$$

$K''_{\varphi(\tau)\psi(z)}(s,y,\tau,z)-(\varphi(t)-\varphi(s))K'''_{\varphi(\tau)\psi(z)\varphi(s)}(s,y,\tau,z)-(\psi(x)-\psi(y))K'''_{\varphi(\tau)\psi(z)\psi(y)}(s,y,\tau,z)+$
$(\varphi(t)-\varphi(s))(\psi(x)-\psi(y))K^{IV}_{\varphi(\tau)\psi(z)\varphi(s)\psi(y)}(s,y,\tau,z)\geq 0.$

ТЕОРЕМА 3.4.1. Пусть выполняется условия 1) – 6). Тогда решение уравнения (3.4.1) единственно в пространстве $L^2_{\varphi,\psi}(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(t,x)$ - решение уравнения (3.4.1) и $u(t,x)\in L_2(G)$. Тогда уравнение (3.4.1) умножая на $u(t,x)$ и интегрируя по области $G_{tx}=\{(s,y):0\leq s\leq t,\,0\leq y\leq x\},\ (t,x)\in G$, получим

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s a(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)+\int_0^t\int_0^x\int_0^y b(s,y,z)u(s,z)u(s,y)d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y K(s,y,\tau,z)u(\tau,z)u(s,y)d\psi(z)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)=\int_0^t\int_0^x f(s,y)u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s). \qquad (3.4.2)$$

Преобразуем каждый из интегралов левой части (3.4.2) по формуле интегрирования по частям и применив формулу Дирихле:

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s a(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)=$$

$$=-\int_0^t\int_0^x\left[\int_0^s a(s,y,\tau)\frac{\partial}{\partial\varphi(\tau)}\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)d\varphi(\tau)\right]u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)=$$

$$=\int_0^t\int_0^x a(s,y,o)\left(\int_0^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s a'_{\varphi(\tau)}(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)u(s,y)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x a(t,y,o)\left(\int_0^t u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(y)-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x a'_{\varphi(s)}(s,y,0)\left(\int_0^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x a'_{\varphi(\tau)}(t,y,\tau)\left(\int_\tau^t u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(y)d\varphi(\tau)-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_\tau^t a''_{\varphi(\tau)\varphi(s)}(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\varphi(s)d\psi(y)d\varphi(\tau).$$

Отсюда применив формулу Дирихле, имеем

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s a(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)=\frac{1}{2}\int_0^x a(t,y,0)\left(\int_0^t u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(y)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x a'_{\varphi(s)}(s,y,o)\left(\int_0^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(y)d\varphi(s)+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x a'_{\varphi(\tau)}(t,y,\tau)\left(\int_\tau^t u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(y)d\varphi(\tau)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s a''_{\varphi(\tau)\varphi(s)}(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s). \qquad (3.4.3)$$

Аналогичным образом для второго слагаемого из (3.4.2) получим

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^y b(s,y,z)u(s,z)u(s,y)d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(s)=\frac{1}{2}\int_0^t b(s,x,0)\left(\int_0^x u(s,\nu)d\varphi(\nu)\right)^2 d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s b'_{\psi(y)}(s,y,o)\left(\int_0^y u(s,\nu)d\varphi(\nu)\right)^2 d\psi(y)d\varphi(s)+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x b'_{\psi(z)}(s,x,z)\left(\int_z^x u(s,\nu)d\varphi(\nu)\right)^2 d\psi(z)d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y b''_{\psi(z)\psi(y)}(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\varphi(\nu)\right)^2 d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(s). \qquad (3.4.4)$$

Для преобразования третьего интеграла из (3.4.2) сначала используем соотношение $CV_{\varphi(\tau)\psi(z)}=(CV)''_{\varphi(\tau)\psi(z)}-\left(C'_{\varphi(\tau)}V\right)'_{\psi(z)}-\left(C'_{\psi(z)}V\right)'_{\varphi(\tau)}+C''_{\varphi(\tau)\psi(z)}V$, далее интегрируем. Тогда имеем

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y K(s,y,\tau,z)u(\tau,z)u(s,y)d\psi(z)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)=$$

$$=\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y K(s,y,\tau,z)\frac{\partial^2}{\partial\varphi(\tau)\partial\psi(z)}\left(\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)\right)u(s,y)d\psi(z)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)=$$

$$=\int_0^t\int_0^x\left[\int_0^s\int_0^y\frac{\partial^2}{\partial\varphi(\tau)\partial\psi(z)}\left(K(s,y,\tau,z)\left(\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(s)\right)\right)d\psi(z)d\varphi(\tau)-\right.$$

$$-\int_o^s\int_o^y\frac{\partial}{\partial\psi(z)}\left(K'_{\varphi(\tau)}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)\right)d\psi(z)d\varphi(\tau)-$$

$$-\int_0^s\int_0^y\frac{\partial}{\partial\varphi(\tau)}\left(K'_{\psi(\tau)}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)\right)d\psi(z)d\varphi(\tau)+$$

$$\left.+\int_0^s\int_0^y K''_{\varphi(\tau)\psi(z)}(s,y,\tau,z)\left(\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)\right)d\psi(z)d\varphi(\tau)\right]u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)=$$

$$=\int_0^t\int_0^x K(s,y,o,o)\left(\int_0^s\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)\right)u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s K'_{\varphi(\tau)}(s,y,\tau,o)\left(\int_\tau^s\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)\right)u(s,y)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y K'_{\psi(z)}(s,y,o,z)\left(\int_0^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)\right)u(s,y)d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y K''_{\varphi(\tau)\psi(z)}(s,y,\tau,z)\left(\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)\right)u(s,y)d\psi(z)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s).$$

Отсюда для каждого слагаемого используя формулу

$$CVV''_{\varphi(s)\psi(y)}=\frac{1}{2}\left(CV^2\right)''_{\varphi(s)\psi(y)}-\frac{1}{2}\left(C'_{\varphi(s)}V^2\right)'_{\psi(y)}-\frac{1}{2}\left(C'_{\psi(y)}V^2\right)'_{\varphi(s)}+\frac{1}{2}C''_{\varphi(s)\psi(y)}V^2-CV'_{\psi(y)}V'_{\varphi(s)},$$

интегрируя и применяя формулу Дирихле, получим

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y K(s,y,\tau,z)u(\tau,z)u(s,y)d\psi(z)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)=\frac{1}{2}K(t,x,o,o)\left(\int_0^t\int_0^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)\right)^2-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t K'_{\varphi(s)}(s,x,o,o)\left(\int_0^s\int_0^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)\right)^2 d\varphi(s)-\frac{1}{2}\int_0^x K'_{\psi(y)}(t,y,o,o)\left(\int_0^t\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(y)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x K''_{\varphi(s)\psi(y)}(s,y,o,o)\left(\int_0^s\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(y)d\varphi(s)-$$

$$-\int_0^t\int_0^x K(s,y,o,o)\left(\int_0^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)\left(\int_0^y u(s,\nu)d\psi(\nu)\right)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^s K'_{\varphi(\tau)}(t,x,\tau,o)\left(\int_\tau^t\int_0^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)\right)^2 d\varphi(\tau)-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s K''_{\varphi(\tau)\varphi(s)}(s,x,\tau,o)\left(\int_\tau^s\int_0^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)\right)^2 d\varphi(\tau)d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x K''_{\varphi(\tau)\psi(y)}(t,y,\tau,o)\left(\int_\tau^t\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(y)d\varphi(\tau)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s K'''_{\varphi(\tau)\varphi(s)\psi(y)}(s,y,\tau,o)\left(\int_\tau^s\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)\right)^2 d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)-$$

$$-\int_0^t\int_0^x\int_0^s K'_{\varphi(\tau)}(s,y,\tau,o)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)\left(\int_0^y u(s,\nu)d\psi(\nu)\right)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^x K'_{\psi(z)}(t,x,o,z)\left(\int_0^t\int_z^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(s)\right)^2 d\psi(z)-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x K''_{\psi(z)\varphi(s)}(s,x,o,z)\left(\int_0^s\int_z^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(z)d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x\int_0^y K''_{\psi(z)\psi(y)}(t,y,o,z)\left(\int_0^t\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(z)d\psi(y)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y K'''_{\psi(z)\varphi(s)\psi(y)}(s,y,o,z)\left(\int_0^s\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(s)\right)^2 d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(s)-$$

$$-\int_0^t\int_0^x\int_0^y K'_{\psi(z)}(s,y,o,z)\left(\int_0^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\psi(\nu)\right)d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x K''_{\varphi(\tau)\psi(z)}(t,x,\tau,z)\left(\int_\tau^t\int_z^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(z)d\varphi(\tau)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s\int_0^y K'''_{\varphi(\tau)\psi(z)\varphi(s)}(t,y,\tau,z)\left(\int_\tau^s\int_z^x u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(z)d\varphi(\tau)d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s K'''_{\varphi(\tau)\psi(z)\psi(y)}(s,x,\tau,z)\left(\int_\tau^t\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(z)d\varphi(\tau)d\psi(y)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y K^{IV}_{\varphi(\tau)\psi(z)\varphi(s)\psi(y)}(s,y,\tau,z)\left(\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(s)\right)^2 d\psi(z)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)-$$

$$-\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y K''_{\varphi(\tau)\psi(z)}(s,y,\tau,z)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\psi(\nu)\right)d\psi(z)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s). \qquad (3.4.5)$$

Выражение (3.4.2) снова интегрируя по области $G_{t(x)}, (t,x) \in G$ и используя формулы (3.4.3),(3.4.4),(3.4.5) и формулу Дирихле, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x \left\{(\psi(x)-\psi(y))a(s,y,o)\left(\int_0^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 - 2(\varphi(t)-\varphi(s))(\psi(x)-\psi(y))K(s,y,o,o)\left(\int_o^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)\left(\int_o^y u(s,\nu)d\psi(\nu)\right)+\right.$$

$$\left.+(\varphi(t)-\varphi(s))b(s,y,o)\left(\int_o^y u(s,\nu)d\psi(\nu)\right)^2\right\}d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y \left\{\frac{(\varphi(t)-\varphi(s))(\psi(x)-\psi(y))}{\psi(y)}a'_{\varphi(s)}(s,y,o)\left(\int_o^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 -\right.$$

$$-2(\varphi(t)-\varphi(s))(\psi(x)-\psi(y))K'_{\psi(z)}(s,y,o,z)\left(\int_o^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\psi(\nu)\right)+$$

$$\left.+(\varphi(t)-\varphi(s))b'_{\psi(z)}(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\psi(\nu)\right)^2\right\}d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_o^t\int_0^x\int_0^s \left\{(\psi(x)-\psi(y))a'_{\varphi(\tau)}(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 -\right.$$

$$-2(\varphi(t)-\varphi(s))(\psi(x)-\psi(y))K'_{\varphi(\tau)}(s,y,\tau,o)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)\left(\int_0^y u(s,\nu)d\psi(\nu)\right)-$$

$$\left.-\frac{(\varphi(t)-\varphi(s))(\psi(x)-\psi(y))}{\varphi(s)}b'_{\psi(y)}(s,y,o)\left(\int_o^y u(s,\nu)d\psi(\nu)\right)^2\right\}d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y (\psi(x)-\psi(y))(\varphi(t)-\varphi(s))\left\{-\frac{1}{\psi(y)}a''_{\varphi(\tau)\varphi(s)}(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)^2 -\right.$$

$$-2K''_{\varphi(\tau)\psi(z)}(s,y,\tau,z)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\varphi(\xi)\right)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\psi(\nu)\right)-$$

$$\left.-\frac{1}{\varphi(s)}b''_{\psi(z)\psi(y)}(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\psi(\nu)\right)^2\right\}d\psi(z)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x \{K(s,y,o,o)-(\varphi(t)-\varphi(s))K'_{\varphi(s)}(s,y,o,o)-(\psi(x)-\psi(y))K'_{\psi(y)}(s,y,o,o)+$$

$$+(\varphi(t)-\varphi(s))(\psi(x)-\psi(y))K''_{\varphi(s)\psi(y)}(s,y,o,o)\}\int_0^s\int_0^y (u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi))^2 d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s\Big\{K'_{\varphi(\tau)}(s,y,\tau,o)-(\varphi(t)-\varphi(s))K''_{\varphi(\tau)\varphi(s)}(s,y,\tau,o)-(\psi(x)-\psi(y))K''_{\varphi(\tau)\psi(y)}(s,y,\tau,o)+$$

$$+(\varphi(t)-\varphi(s))(\psi(x)-\psi(y))K'''_{\varphi(\tau)\varphi(s)\psi(y)}(s,y,\tau,o)\Big\}\left(\int_\tau^s\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)\right)^2 d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y\Big\{K'_{\psi(z)}(s,y,o,z)-(\varphi(t)-\varphi(s))K''_{\psi(z)\varphi(s)}(s,y,o,z)-(\psi(x)-\psi(y))K''_{\psi(z)\psi(y)}(s,y,o,z)+$$

$$+(\varphi(t)-\varphi(s))(\psi(x)-\psi(y))K'''_{\psi(z)\varphi(s)\psi(y)}(s,y,o,z)\Big\}\left(\int_0^s\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(z)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y\Big\{K''_{\varphi(\tau)\psi(z)}(s,y,\tau,z)-(\varphi(t)-\varphi(s))K'''_{\varphi(\tau)\psi(z)\varphi(s)}(s,y,\tau,z)-(\psi(x)-\psi(y))K'''_{\varphi(\tau)\psi(z)\psi(y)}(s,y,\tau,z)+$$

$$+(\varphi(t)-\varphi(s))(\psi(x)-\psi(y))K^{IV}_{\varphi(\tau)\psi(z)\varphi(s)\psi(y)}(s,y,\tau,z)\Big\}\left(\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(s)\right)^2 d\psi(z)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)=$$

$$=\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y f(\tau,z)u(\tau,z)d\psi(z)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)\,. \qquad (3.4.6)$$

В силу условий 1) – 6) квадратичные формы в фигурных скобках в выражении (3.4.6) неотрицательны. Поэтому из (3.4.6) имеем

$$\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\Big\{K(s,y,o,o)-(\varphi(t)-\varphi(s))K'_{\varphi(s)}(s,y,o,o)-(\psi(x)-\psi(y))K'_{\psi(y)}(s,y,o,o)+$$

$$+(\varphi(t)-\varphi(s))(\psi(x)-\psi(y))K''_{\varphi(s)\psi(y)}(s,y,o,o)\Big\}\left(\int_0^s\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)\right)^2 d\psi(y)d\varphi(s)\le$$

$$\le\left|\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y f(\tau,z)u(\tau,z)d\psi(z)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s)\right|. \qquad (3.4.7)$$

Пусть $f(t,x)=0$, $(t,x)\in G.$ Тогда в силу 3) из (3.4.7) следует, что $\int_0^s\int_0^y u(\xi,\nu)d\psi(\nu)d\varphi(\xi)\equiv 0$, $(t,x)\in G$. Отсюда $u(t,x)\equiv 0,\ (t,x)\in G.$ Теорема доказана.

ПРИМЕР 3.4.1. Рассмотрим уравнение

$$\int_0^t \left(3-\sqrt{t}\right)\left(1+\sqrt{xs}\right)u(s,x)d\sqrt{s}+\int_0^x \left(3-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{ty}\right)u(t,y)d\sqrt{y}+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\left[1+\frac{1}{5}\sqrt{s}\sqrt{y}\left(4+\sqrt{tx}\right)\right]u(s,y)d\sqrt{y}\,d\sqrt{s}=f(t,x),\ \text{где } (t,x)\in G=[0;1]\times[0;1], \tag{3.4.8}$$

$\varphi(t)=\sqrt{t}\,,\psi(x)=\sqrt{x}$.

Нетрудно убедиться , что выполняются все условия 1) – 6). Здесь

$$a(t,x,s)=\left(3-\sqrt{t}\right)\left(1+\sqrt{xs}\right),\ b(t,x,y)=\left(3-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{ty}\right),\ K(t,x,s,y)=\left(1+\frac{1}{5}\sqrt{s}\sqrt{y}\left(4+\sqrt{tx}\right)\right).$$

Тогда 1) $a(t,x,0)=3-\sqrt{t}\geq 0,\ a''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,x,s)=-\sqrt{x}\leq 0$;

2) $b(t,x,0)=3-\sqrt{x}\geq 0,\ b''_{\psi(x)\psi(y)}(t,x,y)=-\sqrt{t}\leq 0$;

3) $a(s,y,0)b(s,y,0)-(\psi(x)-\psi(y))(\varphi(t)-\varphi(s))K^2(s,y,0,0)=\left(3-\sqrt{s}\right)\left(3-\sqrt{y}\right)-$

$-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{t}-\sqrt{s}\right)\cdot 1\geq 0$,

$$a''_{\varphi(\tau)\varphi(s)}(s,y,\tau)b''_{\psi(z)\psi(y)}(s,y,z)-\varphi(s)\psi(y)\left(K''_{\varphi(\tau)\psi(z)}(s,y,\tau,z)\right)^2=$$

$$=-\sqrt{y}\cdot\left(-\sqrt{s}\right)-\sqrt{s}\sqrt{y}\cdot\left[\frac{1}{5}\left(4+\sqrt{sy}\right)\right]^2\geq\sqrt{ys}-\sqrt{ys}\left[\frac{1}{5}(4+1\cdot 1)\right]^2=0,$$

$$K(s,y,0,0)-(\varphi(t)-\varphi(s))K'_{\varphi(s)}(s,y,0,0)-(\psi(x)-\psi(y))K'_{\psi(y)}(s,y,0,0)+$$

$$+(\psi(x)-\psi(y))(\varphi(t)-\varphi(s))K''_{\varphi(s)\psi(y)}(s,y,0,0)=1>0,\quad \alpha=1\ ;$$

4) $a'_{\varphi(t)}(t,y,0)b'_{\psi(z)}(t,y,z)+\psi(y)(\psi(x)-\psi(y))\left(K'_{\psi(z)}(t,y,0,z)\right)^2=-1\cdot\left(3-\sqrt{y}\right)\cdot\sqrt{t}+\sqrt{y}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\cdot 0=$

$=-\sqrt{t}\left(3-\sqrt{y}\right)+0=-\sqrt{t}\left(3-\sqrt{y}\right)\leq 0;$

5) $a'_{\varphi(\tau)}(s,x,\tau)b'_{\psi(x)}(s,x,0)+\varphi(t)(\varphi(t)-\varphi(s))K'_{\varphi(\tau)}(s,x,\tau,0)^2=$

$=\left(3-\sqrt{s}\right)\sqrt{x}\cdot(-1)+\sqrt{t}\left(\sqrt{t}-\sqrt{s}\right)\cdot 0=-\sqrt{x}\left(3-\sqrt{s}\right)\leq 0$;

6) $K'_{\varphi(\tau)}(s,y,\tau,0)-(\varphi(t)-\varphi(s))K''_{\varphi(\tau)\varphi(s)}(s,y,\tau,0)-(\psi(x)-\psi(y))K''_{\varphi(\tau)\psi(y)}(s,y,\tau,0)+$

$$+\left(\varphi(t)-\varphi(s)\right)\left(\psi(x)-\psi(y)\right)K'''_{\varphi(\tau)\varphi(s)\psi(y)}(s,y,\tau,0)=0,$$

$$K'_{\psi(z)}(s,y,0,z)-\left(\varphi(t)-\varphi(s)\right)K''_{\psi(z)\varphi(s)}(s,y,0,z)-\left(\psi(x)-\psi(y)\right)K''_{\psi(z)\psi(y)}(s,y,0,z)+$$

$$+\left(\varphi(t)-\varphi(s)\right)\left(\psi(x)-\psi(y)\right)K'''_{\psi(z)\varphi(s)\psi(y)}(s,y,0,z)=0,$$

$$K''_{\varphi(\tau)\psi(z)}(s,y,\tau,z)-\left(\varphi(t)-\varphi(s)\right)K'''_{\varphi(\tau)\psi(z)\varphi(s)}(s,y,\tau,z)-\left(\psi(x)-\psi(y)\right)K'''_{\varphi(\tau)\psi(z)\psi(y)}(s,y,\tau,z)+$$

$$+\left(\varphi(t)-\varphi(s)\right)\left(\psi(x)-\psi(y)\right)K^{IV}{}_{\varphi(\tau)\psi(z)\varphi(s)\psi(y)}(s,y,\tau,z)=\frac{1}{5}\left(4+\sqrt{sy}\right)-\frac{1}{5}\sqrt{y}\left(\sqrt{t}-\sqrt{s}\right)-\frac{1}{5}\sqrt{s}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)+$$
$$+\frac{1}{5}\left(\sqrt{t}-\sqrt{s}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=\frac{1}{5}\left[4+\sqrt{sy}+\left(\sqrt{t}-\sqrt{s}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)-\sqrt{s}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)-\sqrt{y}\left(\sqrt{t}-\sqrt{s}\right)\right]\geq$$

$$\geq\frac{1}{5}\left[4+\sqrt{sy}+\left(\sqrt{t}-\sqrt{s}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)-1-1\right]\geq\frac{2}{5}>0.$$

Таким образом, выполняются все условия теоремы 3.4.1. Поэтому решение уравнения ИУВС (3.4.8) единственно в пространстве $L_2\left([0;1]\times[0;1]\right)$.

3.5. Регуляризация и единственность решения линейного интегрального уравнение Вольтерра-Стилтьеса первого рода с двумя независимыми переменными

В этом разделе для линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса первого рода с двумя независимыми переменными построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и доказана теорема единственности в $C(G)$.

Рассмотрим уравнение

$$\int_{t_0}^{t}K(t,x,s)u(s,x)d\varphi(s)+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}N(t,x,s,y)u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)=f(t,x),\qquad (t,x)\in G,\quad (3.5.1)$$

где $u(t,x)$ - искомая функция , $K(t,x,s), N(t,x,s,y)$ - известные ядра, $f(t,x)$ - известная функция; $f(t_0,x)=0$ при $x\in[x_0,X]$; $G=\{(t,x): t_0\le t\le T, x_0\le x\le X\}$, $\varphi(t),\psi(x)$ - известные строго возрастающие непрерывные функции.

Известно, что множество $C(G)$ всех непрерывных действительных функций, определенных на G, с нормой $\|u\|_C=\max\limits_G|u|$ образует нормированное пространство.

Пусть выполняются следующие условия:

а) при любом фиксированном $(t,x)\in G$ функция $K(t,x,s)\in L_1([t_0,t])$, а функция $N(t,x,s,y)\in L_1([t_0,t]\times[x_0,x])$, функции $K(t,x,s)$ и $N(t,x,s,y)$ - непрерывные по совокупности (t,x) соответственно в областях $G_1=\{(t,x,s): t_0\le s\le t\le T, x_0\le x\le X\}$ и $G_3=\{(t,x,s,y): t_0\le s\le t\le T, x_0\le y\le x\le X\}$,

$K(t,x,t)\in L_1(G)$, $K(t,x,t)\ge 0$ при $(t,x)\in G$.

б) при $t>\tau$ для любых (t,x,s) и $(\tau,x,s)\in G_1$ справедливо

$|K(t,x,s)-K(\tau,x,s)|\le C\int\limits_\tau^t K(s,x,s)d\varphi(s)$, где $0<C$ - некоторая постоянная.

в) при $t>\tau$ для любых (t,x,s,y) и $(\tau,x,s,y)\in G_3$ справедливо

$$|N(t,x,s,y)-N(\tau,x,s,y)|\le C_1 l_1 l_2\int\limits_\tau^t K(s,x,s)d\varphi(s),$$

$N(t,x,t,y)\equiv 0$ при $(t,x,y)\in G_2=\{(t,x,y): t_0\le t\le T, x_0\le y\le x\le X\}$

где $0\le l_1$, $0\le l_2$ - постоянные.

Наряду с уравнением (3.5.1) будем рассматривать следующее сингулярно-возмущенное уравнение

$$\varepsilon v(t,x,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t} K(t,x,s)v(s,x,\varepsilon)d\varphi(s)+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} N(t,x,s,y)v(s,y,\varepsilon)d\psi(y)d\varphi(s)=f(t,x), \qquad (3.5.2)$$

где $0<\varepsilon$ - малый параметр, $(t,x)\in G$.

Решение уравнения (3.5.2) будем искать в виде

$$v(t,x,\varepsilon)=u(t,x)+\xi(t,x,\varepsilon), \qquad (3.5.3)$$

где $u(t,x)$ - решение уравнения (3.5.1).

Подставляя функцию $v(t,x,\varepsilon)$ в (3.5.2) и учитывая, что $u(t,x)$ - решение уравнения (3.5.1), имеем:

$$\varepsilon\xi(t,x,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t} K(t,x,s)\xi(s,x,\varepsilon)d\varphi(s)+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} N(t,x,s,y)\xi(s,y,\varepsilon)d\psi(y)d\varphi(s)+\varepsilon u(t,x)=0.$$

Последнее, разделив на ε и преобразовав, получим:

$$\xi(t,x,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} K(s,x,s)\xi(s,x,\varepsilon)d\varphi(s)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}[K(t,x,s)-K(s,x,s)]\xi(s,x,\varepsilon)d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} N(t,x,s,y)\xi(s,y,\varepsilon)d\psi(y)d\varphi(s)-u(t,x). \qquad (3.5.4)$$

Теперь применим резольвенту ядра $\left[-\frac{K(s,x,s)}{\varepsilon}\right]$:

$$R(t,x,s,\varepsilon)=-\frac{K(s,x,s)}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}.$$

Тогда последнее уравнение имеет вид

$$\xi(t,x,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}[K(t,x,s)-K(s,x,s)]\xi(s,x,\varepsilon)d\varphi(s)-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} N(t,x,s,y)\xi(s,y,\varepsilon)d\psi(y)d\varphi(s)-$$

$$-u(t,x)+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t} K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}\left\{\int_{t_0}^{s}[K(s,x,\tau)-K(\tau,x,\tau)]\xi(\tau,x,\varepsilon)d\varphi(\tau)+\right.$$

$$\left.+\int_{t_0}^{s}\int_{x_0}^{x} N(s,x,\tau,y)\xi(\tau,y,\varepsilon)d\psi(y)d\varphi(\tau)+\varepsilon u(s,x)\right\}d\varphi(s).$$

Относительно этого уравнения делаем следующие преобразования:

$$\xi(t,x,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}[K(t,x,s)-K(s,x,s)]\xi(s,x,\varepsilon)d\varphi(s)-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}N(t,x,s,y)\xi(s,y,\varepsilon)d\psi(y)d\varphi(s)-$$

$$-u(t,x)+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}[K(t,x,\tau)-K(\tau,x,\tau)]\xi(\tau,x,\varepsilon)d\varphi(\tau)d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}[K(t,x,\tau)-K(s,x,\tau)]\xi(\tau,x,\varepsilon)d\varphi(\tau)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\int_{x_0}^{x}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}N(t,x,\tau,y)\xi(\tau,y,\varepsilon)d\psi(y)d\varphi(\tau)d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\int_{x_0}^{x}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}[N(t,x,\tau,y)-N(s,x,\tau,y)]\xi(\tau,y,\varepsilon)d\psi(y)d\varphi(\tau)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}u(t,x)d\varphi(s)-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}[u(t,x)-u(s,x)]d\varphi(s).$$

Так как $\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}d\varphi(s)=1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t K(s,x,s)d\varphi(s)}$, то из последнего уравнения, получим

$$\xi(t,x,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}[K(t,x,s)-K(s,x,s)]\xi(s,x,\varepsilon)d\varphi(s)-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}N(t,x,s,y)\xi(s,y,\varepsilon)d\psi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}[K(t,x,\tau)-K(\tau,x,\tau)]\xi(\tau,x,\varepsilon)d\varphi(\tau)d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}[K(t,x,\tau)-K(s,x,\tau)]\xi(\tau,x,\varepsilon)d\varphi(\tau)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\int_{x_0}^{x}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}N(t,x,\tau,y)\xi(\tau,y,\varepsilon)d\psi(y)d\varphi(\tau)d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\int_{x_0}^{x}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}[N(t,x,\tau,y)-N(s,x,\tau,y)]\xi(\tau,y,\varepsilon)d\psi(y)d\varphi(\tau)d\varphi(s)-$$

$$-u(t,x)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t K(s,x,s)d\varphi(s)}-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}[u(t,x)-u(s,x)]d\varphi(s).$$

Сюда применяя формулу Дирихле, затем заменив τ на s получим

$$\xi(t,x,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}[K(t,x,s)-K(s,x,s)]\xi(s,x,\varepsilon)d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\left\{\int_s^t K(\tau,x,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}[K(t,x,s)-K(\tau,x,s)]d\varphi(\tau)\right\}\xi(s,x,\varepsilon)d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}N(t,x,s,y)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}\xi(s,y,\varepsilon)d\psi(y)d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\left\{\int_s^t K(\tau,x,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}[N(t,x,s,y)-N(\tau,x,s,y)]d\varphi(\tau)\right\}\xi(s,y,\varepsilon)d\psi(y)d\varphi(s)-$$

$$-u(t,x)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}[u(t,x)-u(s,x)]d\varphi(s)\ .$$

Отсюда

$$\xi(t,x,\varepsilon)=\int_{t_0}^{t}H(t,x,s,\varepsilon)\xi(s,x,\varepsilon)d\varphi(s)+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}N_1(t,x,s,y,\varepsilon)\xi(s,y,\varepsilon)d\psi(y)d\varphi(s)+\phi(t,x,\varepsilon)\ , \tag{3.5.5}$$

где

$$H(t,x,s,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}[K(t,x,s)-K(s,x,s)]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t K(\tau,x,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}[K(t,x,s)-K(\tau,x,s)]d\varphi(\tau), \tag{3.5.6}$$

$$N_1(t,x,s,y,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}N(t,x,s,y)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t K(\tau,x,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}\times$$

$$\times[N(t,x,s,y)-N(\tau,x,s,y)]d\varphi(\tau)\ , \tag{3.5.7}$$

$$\phi(t,x,\varepsilon)=-u(t,x)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}[u(t,x)-u(s,x)]d\varphi(s). \tag{3.5.8}$$

Предварительно докажем следующие предложения.

ЛЕММА 3.5.1. Пусть

$$\psi(t,x,\varepsilon)=-u(t,x)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t}K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}[u(t,x)-u(s,x)]d\varphi(s),$$

где $u(t,x)\in C(G)$, $u(t_0,x)=0$ при $x\in[x_0,X]$, $K(t,x,t)\in L_1(G)$, $K(t,x,t)>0$ для почти всех $(t,x)\in G$, функция $\varphi(t,x)=\int_{t_0}^{t}K(s,x,s)d\varphi(s)$ непрерывна по совокупности $(t,x)\in G$. Тогда справедлива оценка

$$\|\psi(t,x,\varepsilon)\|_C\le 3\|u(t,x)\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}}+\omega_{\bar u}(\varepsilon^{\beta})\equiv C_0(\varepsilon),$$

где β - произвольное число из интервала $(0,1)$,

$$\omega_{\bar u}(\delta)=\sup_{\substack{|z-z_0|<\delta\\ x\in[x_0,x]}}\left|u(\varphi^{-1}(z,x),x)-u(\varphi^{-1}(z_0,x),x)\right|,$$

$\varphi^{-1}(z,x)$ - обратная функция для функции $z=\varphi(t,x)$, $(t,x)\in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) если $t_0\le t\le\varphi^{-1}(\varepsilon^{\beta},x)$, $x_0\le x\le X$, то из (3.5.8) имеем

$$|\phi(t,x,\varepsilon)|\le\omega_{\bar u}(\varepsilon^{\beta})e^{-\frac{1}{\varepsilon}\varphi(t,x)}+\omega_{\bar u}(\varepsilon^{\beta})\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\varepsilon}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t}K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}d\varphi(s)=\omega_{\bar u}(\varepsilon^{\beta}). \qquad (3.5.9)$$

2) Если $\varphi^{-1}(\varepsilon^{\beta},x)\le t\le T$, $x_0\le x\le X$, то

$$|u(t,x)|\le e^{-\frac{1}{\varepsilon}\varphi(t,x)}\le\|u(t,x)\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}}, \qquad (3.5.10)$$

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\varphi^{-1}(\varphi(t,x)-\varepsilon^{\beta},x)}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t}K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}[u(t,x)-u(s,x)]d\varphi(s)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\varphi^{-1}(\varphi(t,x)-\varepsilon^{\beta},x)}^{t}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t}K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}[u(t,x)-u(s,x)]d\varphi(s)\right|\le$$

$$\leq 2\|u(t,x)\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}} + \omega_{\bar{u}}(\varepsilon^{\beta}). \qquad (3.5.11)$$

Из (3.5.9), (3.5.10) и (3.5.11) следует справедливость леммы 3.5.1.

ЛЕММА 3.5.2. Пусть функция $H(t,x,s,\varepsilon)$ определена по формуле (3.5.6) и выполняются условия а), б). Тогда справедлива следующая оценка $|H(t,x,s,\varepsilon)| \leq C_2$, где $C_2 = C(1+e^{-1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом условия б) из (3.5.6) получим

$$|H(t,x,s,\varepsilon)| \leq \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)} C\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau) +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t K(\tau,x,\tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)} \left\{C\int_s^t K(\nu,x,\nu)d\varphi(\nu)\right\} d\varphi(\tau).$$

Для первого слагаемого

$$Ce^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)\right) = \left|\eta = \frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)\right| = C\eta e^{-\eta} \leq Ce^{-1},$$

для второго

$$C\int_s^t \frac{1}{\varepsilon} K(\tau,x,\tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\nu,x,\nu)d\varphi(\nu)\right)d\varphi(\tau) =$$

$$= \left|\begin{matrix} \eta = \frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau) \\ \frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau) \leq \eta \leq 0 \end{matrix}\right| = -C\int_{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}^{t_0} \eta e^{-\eta}d\eta \leq C\int_{t_0}^{\infty}\eta e^{-\eta}d\eta \leq C.$$

Следовательно, справедлива лемма 3.5.2.

ЛЕММА 3.5.3. Пусть функция $N_1(t,x,s,y,\varepsilon)$ определяется по формуле (3.5.7). Если выполняются условия а) - в), то справедлива следующая оценка: $\left|N_1(t,x,s,y,\varepsilon)\right| \le C_3\, l_1\, l_2$, где $C_3 = C_2\left(1+e^{-1}\right)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Принимая во внимание условия а) - в), из (3.5.7) получим требуемую оценку.

Далее, в силу лемм 3.5.1, 3.5.2 и 3.5.3 из (3.5.5) имеем:

$$\left|\xi(t,x,\varepsilon)\right| \le C_0(\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} C_2\left|\xi(s,x,\varepsilon)\right| d\varphi(s) + \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} C_3 l_1 l_2 \left|\xi(s,y,\varepsilon)\right| d\psi(y)\, d\varphi(s).$$

Обозначим $a(t,x,\varepsilon) = C_0(\varepsilon) + C_3 l_1 l_2 \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\left|\xi(s,y,\varepsilon)\right| d\psi(y)\, d\varphi(s).$

Тогда

$$\left|\xi(t,x,\varepsilon)\right| \le a(t,x,\varepsilon) + C_2\int_{t_0}^{t}\left|\xi(s,x,\varepsilon)\right| d\varphi(s). \qquad (3.5.12)$$

Разрешая интегральное неравенство (3.5.12) аналогично теореме 1.1.2 [47, с. 11-13] , получим :

$$\left|\xi(t,x,\varepsilon)\right| \le a(t,x,\varepsilon) + C_2\int_{t_0}^{t} a(s,x,\varepsilon)\, e^{\int_s^t d\varphi(\tau)}\, d\varphi(s) = a(t,x,\varepsilon) + C_2\int_{t_0}^{t} a(s,x,\varepsilon)\, e^{(t-s)} d\varphi(s)$$

или

$$\left|\xi(t,x,\varepsilon)\right| \le C_0(\varepsilon) + C_3 l_1 l_2 \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\left|\xi(s,y,\varepsilon)\right| d\psi(y)\, d\varphi(s) + C_2 C_0(\varepsilon)\int_{t_0}^{t} e^{(t-s)} d\varphi(s) +$$

$$+ C_2 C_3 l_1 l_2 \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\int_{x_0}^{x} e^{(t-s)}\left|\xi(\tau,y,\varepsilon)\right| d\psi(y)\, d\varphi(\tau)\, d\varphi(s).$$

К тройному интегралу, применив формулу Дирихле, затем заменив τ на s и учитывая, что $C_0(\varepsilon)$ - постоянная, из последнего имеем

$$|\xi(t,x,\varepsilon)| \le C_0(\varepsilon)\left[1+C_3Te^T\right]+C_3l_1l_2\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\left[1+e^T(T-s)\right]|\xi(\tau,y,\varepsilon)|d\psi(y)d\varphi(s),$$

или

$$|\xi(t,x,\varepsilon)| \le a_1(\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}K_1(T,s,y)|\xi(s,y,\varepsilon)|d\psi(y)d\varphi(s), \tag{3.5.13}$$

где $a_1(\varepsilon)=C_0(\varepsilon)\left[1+C_3Te^T\right]$, $\quad K_1(T,s,y)=C_3\,l_1\,l_2\left[1+e^T(T-s)\right]$.

ЛЕММА 3.5. 4. Пусть $\xi(t,x,\varepsilon)$ - непрерывна, неотрицательна в G и выполняется неравенство (3.5.13). Тогда справедлива

$$\xi(t,x,\varepsilon)\le a_1(\varepsilon)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}K_1(T,s,y)d\psi(y)d\varphi(s)\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$R(t,x,\varepsilon)=a_1(\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}K_1(T,s,y)\xi(s,y,\varepsilon)d\psi(y)d\varphi(s). \tag{3.5.14}$$

Введем функцию

$$G(R)=\int_{a_1}^{R}\frac{d\xi}{\xi}. \tag{3.5.15}$$

Тогда в силу (3.5.13)

$$\frac{\partial^2 R}{\partial t\partial x}=K_1(T,t,x)\xi(t,x,\varepsilon)\le K_1(T,t,x)R(t,x,\varepsilon). \tag{3.5.16}$$

Находим

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}[G(R)] = G'(R)\frac{\partial^2 R}{\partial t\partial x} + G''(R)\frac{\partial R}{\partial t}\cdot\frac{\partial R}{\partial x}. \qquad (3.5.17)$$

На основании (3.5.16) из (3.5.17) следует

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}[G(R)] - G''(R)\frac{\partial R}{\partial t}\cdot\frac{\partial R}{\partial x} \le G'(R)K_1(T,t,x)R(t,x,\varepsilon). \qquad (3.5.18)$$

Согласно (3.5.15) $G'(R) = \frac{1}{R}$, $G''(R) \le 0$, кроме того, из (3.5.14) следует,

что $\frac{\partial R}{\partial t}$ и $\frac{\partial R}{\partial x}$ неотрицательны.

Тогда из (3.5.18) имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}[G(R)] \le K_1(T,t,x) .$$

Проинтегрируем

$$G(R(t,x,\varepsilon)) - G(R(t_0,x,\varepsilon)) + G(R(t_0,x_0,\varepsilon)) \le \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} K_1(T,s,y)\,d\psi(y)\,d\varphi(s) ,$$

или $G(R(t,x,\varepsilon)) \le \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} K_1(T,s,y)\,d\psi(y)\,d\varphi(s)$.

Следовательно, $R(t,x,\varepsilon) \le G^{-1}\left(\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} K_1(T,s,y)\,d\psi(y)\,d\varphi(s)\right)$.

Исходя из (3.5.15), получим $G^{-1}(\lambda) = a_1(\varepsilon)e^{\lambda}$.

Таким образом, $R(t,x,\varepsilon) \le a_1(\varepsilon)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} K_1(T,s,y)\,d\psi(y)\,d\varphi(s)\right)$.

Отсюда вытекает справедливость леммы 3.5.4.

В силу леммы 3.5.4 из (3.5.13) имеем

$$|\xi(t,x,\varepsilon)| \le C_4\, C_0(\varepsilon), \tag{3.5.19}$$

где $C_4 = \left(1 + C_3 T\, e^T\right)\exp\left\{C_3\, l_1 l_2 \left(1 + Te^T\right)\right\}$.

Таким образом, доказана следующая

ТЕОРЕМА 3.5.1. Пусть выполняются условия а) - в) и уравнение (3.5.1) имеет непрерывное решение $u(t,x)$ на G и $u(t_0,x)=0$ при $x\in[x_0,X]$, кроме того, пусть $K(t,x,t)>0$ для почти всех $(t,x)\in G$. Тогда решение уравнения (3.5.2) представимо в виде (3.5.3), причем это решение при $\varepsilon\to 0$ сходится к непрерывному решению уравнения (3.5.1) в области G и справедлива оценка (3.5.19).

Теперь покажем, что решение уравнения (3.5.1) единственно в пространстве $C(G)$. Следуя по вышеизложенному методу, из (3.5.2) получим:

$$u(t,x,\varepsilon) = \int_{t_0}^{t} H(t,x,s,\varepsilon)u(s,x,\varepsilon)d\varphi(s) + \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} N_1(t,x,s,y,\varepsilon)u(s,y,\varepsilon)d\psi(y)d\varphi(s) + F_1(t,x,\varepsilon), \tag{3.5.20}$$

где $H(t,x,s,\varepsilon)$ и $N_1(t,x,s,y,\varepsilon)$ определены по формулам (3.5.6) и (3.5.7) соответственно,

$$F_1(t,x,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} f(t,x) - \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t} K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)} f(s,x)d\varphi(s). \tag{3.5.21}$$

Предварительно докажем следующую лемму.

ЛЕММА 3.5.5. Если функция $F_1(t,x,\varepsilon)$ определена формулой (3.5.21), то для нее справедлива оценка

$$|F_1(t,x,\varepsilon)| \le \frac{2\|f(t,x)\|_C}{\varepsilon}, \quad (t,x)\in G. \tag{3.5.22}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из (3.5.21) имеем

$$|F_1(t,x,\varepsilon)| \le \frac{\|f(t,x)\|}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t} K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)} |f(s,x)d\varphi(s)| \le$$

$$\le \frac{\|f(t,x)\|}{\varepsilon}+\frac{\|f(t,x)\|}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\varepsilon}K(s,x,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)}d\varphi(s)\le \frac{2\|f(t,x)\|_C}{\varepsilon}.$$

Лемма 3.5.5 доказана.

ТЕОРЕМА 3.5.2. Пусть выполняются условия а) - в) и $\int_{t_0}^{t}K(s,x,s)d\varphi(s)>0$ при $(t,x)\in G$. Тогда решение уравнения (3.5.1) в пространстве непрерывных функций на G единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(t,x)$- ненулевое решение уравнения (3.5.1) при $f(t,x)\equiv 0$. Тогда в силу условий а) -в) можно показать, что $u(t_0,x)=0$ на $[x_0,X]$. В самом деле, пусть

$$\int_{t_0}^{t}K(t,x,s)u(s,x)d\varphi(s)+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}N(t,x,s,y)u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)\equiv 0 \text{ при } (t,x)\in G.$$

Последнее преобразуем к эквивалентному уравнению

$$u(t_0,x)\int_{t_0}^{t}K(s,x,s)d\varphi(s)=-\int_{t_0}^{t}[K(t,x,s)-K(s,x,s)]u(s,x)d\varphi(s)-$$

$$-\int_{t_0}^{t}K(t,x,s)[u(s,x)-u(t_0,x)]d\varphi(s)-\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}[N(t,x,s,y)-N(s,x,s,y)]u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s).$$

В силу условий а) - в) отсюда имеем

$$|u(t_0,x)|\int_{t_0}^{t}K(s,x,s)d\varphi(s)\le \|u(t,x)\|_C C\int_{t_0}^{t}\int_{s}^{t}K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)d\varphi(s)+$$

$$+\sup_{\substack{s\in[t_0,t]\\ x\in[x_0,x]}}|u(s,x)-u(t_0,x)|\int_{t_0}^{t}K(s,x,s)d\varphi(s)+\|u(t,x)\|_C C_1 l_1 l_2\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\int_{s}^{t}K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)d\psi(y)d\varphi(s).$$

Отсюда применяя формулу Дирихле, затем заменив τ на s и в силу теоремы о среднем имеем

$$\left|u(t_0,x)\right|\int_{t_0}^{t}K(s,x,s)d\varphi(s)\le\|u(t,x)\|_C C\int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{t}K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)\right]d\varphi(s)+$$

$$+\sup_{\substack{s\in[t_0,t]\\ x\in[x_0,x]}}\left|u(s,x)-u(t_0,x)\right|\int_{t_0}^{t}K(s,x,s)d\varphi(s)+C_1l_1l_2\|u(t,x)\|_C\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\left[\int_{t_0}^{t}K(\tau,x,\tau)d\varphi(\tau)\right]d\psi(y)d\varphi(s).$$

По условию теоремы $\int_{t_0}^{t}K(s,x,s)d\varphi(s)>0$ при $x\in[x_0,X]$.

Тогда имеем

$$\left|u(t_0,x)\right|\le C\|u(t,x)\|_C[\varphi(t)-\varphi(t_0)]+\sup_{\substack{s\in[t_0,t]\\ x\in[x_0,x]}}\left|u(s,x)-u(t_0,x)\right|+$$

$$+C_1\,l_1\,l_2\|u(t,x)\|_C[\psi(x)-\psi(x_0)][\varphi(t)-\varphi(t_0)],\qquad (t,x)\in G.$$

Отсюда, переходя к пределу при $t\to 0$,получим $u(t_0,x)=0$ при $x\in[x_0,X]$.

Далее, учитывая леммы 3.5.2, 3.5.3 и 3.5.5, используя лемму 3.5.4, из (3.5.20) имеем

$$u(t,x)\equiv 0 \text{ на } G \text{ при } f(t,x)\equiv 0.$$

Тогда в силу (3.5.19) из (3.5.3) имеем

$$\|u(t,x)\|_C\le C_4\,C_0(\varepsilon),$$

где $0<\varepsilon<\varepsilon_0$.

Отсюда при $\varepsilon\to 0$вытекает, что $u(t,x)\equiv 0$ на G при $f(t,x)\equiv 0$.

Теорема 3.5.2 доказана.

ПРИМЕР 3.5.1. Рассмотрим уравнение

$$\int_0^t\left(6+\left(\sqrt[3]{t^2}-\sqrt[3]{s^2}\right)x\right)u(s,x)\,d\sqrt[3]{s}+\int_0^t\int_0^x(t-s)\sqrt[3]{xy}\;u(s,y)d\sqrt[3]{y}\,d\sqrt[3]{s}=f(t,x),\qquad(3.5.23)$$

где $\varphi(t)=\sqrt[3]{t}$, $\quad \psi(x)=\sqrt[3]{s}$, $\quad (t,x)\in G=[0;1]\times[0;1]$,

Нетрудно убедиться , что выполняются все условия а) - в). Здесь

$K(t,x,s)=6+\left(\sqrt[3]{t^2}-\sqrt[3]{s^2}\right)x, \qquad N(t,x,s,y)=(t-s)\sqrt[3]{xy}$.

Тогда а) при $(t,x)\in G=[0;1]\times[0;1], \quad K(t,x,t)=6+\left(\sqrt[3]{t^2}-\sqrt[3]{t^2}\right)x=6>0$,

б) при $t>\tau, \quad |K(t,x,s)-K(\tau,x,s)|\le C\int\limits_{\tau}^{t}K(s,x,s)d\varphi(s)$, где $0<C$,

$$|K(t,x,s)-K(\tau,x,s)|=\left|\left[6+\left(\sqrt[3]{t^2}-\sqrt[3]{s^2}\right)x\right]-\left[6+\left(\sqrt[3]{\tau^2}-\sqrt[3]{s^2}\right)x\right]\right|=$$

$$=\left|\left(\sqrt[3]{t^2}-\sqrt[3]{\tau^2}\right)x\right|=\left|\left(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{\tau}\right)\left(\sqrt[3]{t}+\sqrt[3]{\tau}\right)x\right|\le 2\left|\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{\tau}\right|\le\frac{2}{6}\cdot 6\left|\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{\tau}\right|;$$

$$\int\limits_{\tau}^{t}K(s,x,s)d\varphi(s)=\int\limits_{\tau}^{t}\left(6+\left(\left(\sqrt[3]{s^2}-\sqrt[3]{s^2}\right)x\right)d\sqrt[3]{s}=6\int\limits_{\tau}^{t}d\sqrt[3]{s}=6\sqrt[3]{s}\Big|_{\tau}^{t}=6\left(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{\tau}\right)>0;$$

$$\frac{2}{6}\cdot 6\left|\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{\tau}\right|\le\frac{1}{3}\int\limits_{\tau}^{t}K(s,x,s)d\varphi(s), \qquad C=\frac{1}{3};$$

в) $|N(t,x,s,y)-N(\tau,x,s,y)|\le C_1\int\limits_{\tau}^{t}K(s,x,s)d\varphi(s), \ \text{\textit{при}} \ \ t>\tau;$

$$\left|(t-s)\sqrt[3]{xy}-(\tau-s)\sqrt[3]{xy}\right|=\left|t\sqrt[3]{xy}-\tau\sqrt[3]{xy}\right|=\left|\sqrt[3]{xy}\,(t-\tau)\right|=$$

$$=\left|\sqrt[3]{xy}\left(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{\tau}\right)\left(\sqrt[3]{t^2}+\sqrt[3]{t\tau}+\sqrt[3]{\tau^2}\right)\right|\le\frac{3}{6}\cdot 6\left|\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{\tau}\right| ;$$

$$\int\limits_{\tau}^{t}K(s,x,s)d\varphi(s)=\int\limits_{\tau}^{t}\left(6+\left(\sqrt[3]{s^2}-\sqrt[3]{s^2}\right)x\right)d\sqrt[3]{s}=6\int\limits_{\tau}^{t}d\sqrt[3]{s}=6\sqrt[3]{s}\Big|_{\tau}^{t}=6\left(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{\tau}\right);$$

$$\frac{3}{6}\cdot 6\left|\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{\tau}\right|\le\frac{1}{2}\int\limits_{\tau}^{t}K(s,x,s)d\varphi(s), \qquad C_1=\frac{1}{2}.$$

3.6. Заключение по главе 3

Установлены достаточные условия абсолютной и квадратичной суммируемости на бесконечном секторе решения слабо нелинейного ИУВС второго рода с двумя независимыми переменными; для оценки и ограниченности решения линейного и слабо нелинейного ИУВС второго рода с двумя независимыми переменными в бесконечной полосе, при этом существенно используется возрастание функции интегрирования по пространственной переменной, в случае ограниченности свободного члена этих уравнений; единственности решения линейного ИУВС первого рода с двумя независимыми переменными в пространстве квадратично суммируемых функций в заданном прямоугольнике; регуляризируемости по М.М. Лаврентьеву и единственности решения линейного ИУВС первого рода с двумя независимыми переменными в пространстве непрерывных функций в заданном прямоугольнике.

Во всех разделах главы построены иллюстративные примеры, показывающие естественность доказанных теорем и некоторых следствий из них.

ВЫВОДЫ

В настоящей диссертационной работе развитием методов преобразования уравнений, весовых и срезывающих функций, интегрирования по частям, интегральных неравенств с интегралом Стилтьеса, неотрицательных квадратичных форм, разработанных в ИМ НАН КР, установлены достаточные условия абсолютной и квадратичной интегрируемости на полуоси решения линейного ИУВС второго рода без предположения, что этими свойствами обладает его свободный член, при этом доказана общая теорема и из нее выведены множество следствий - коэффициентных признаков; для оценки, ограниченности, абсолютной и квадратичной интегрируемости на полуоси, стремления к нулю любого решения слабо нелинейного ИДУВС первого порядка; ограниченности на полуоси любого решения и его первой производной слабо нелинейного ИДУВС второго порядка, оценки, абсолютной и квадратичной интегрируемости на полуоси, стремления к нулю первой производной любого решения этого уравнения; абсолютной и квадратичной суммируемости на бесконечном секторе решения слабо нелинейного ИУВС второго рода с двумя независимыми переменными; для оценки и ограниченности решения линейного и слабо нелинейного ИУВС второго рода с двумя независимыми переменными в бесконечной полосе, при этом существенно используется возрастание функции интегрирования по пространственной переменной, в случае ограниченности свободного члена этих уравнений; единственности решения линейного ИУВС первого рода с двумя независимыми переменными в пространстве квадратично суммируемых функций в заданном прямоугольнике; регуляризируемости по М.М. Лаврентьеву и единственности решения линейного ИУВС первого рода с двумя независимыми переменными в пространстве непрерывных функций в заданном прямоугольнике.

Отметим, что в разделах 2.2, 2.3 рассматриваются случаи, когда производная возрастающей функции, по которой в ИДУВС (2.2.1), (2.3.1) ведется интегрирование, может быть разрывной в некоторых точках полуоси, что удается достичь за счет введенной неотрицательной весовой функции. Отметим также в ИУВС (2.1.1) и ИДУВС (2.2.1), (2.3.1) слагаемые ядра $K(t,\tau)$ и свободного члена $f(t)$ могут быть недифференцируемыми по обеим аргументам на некоторых точках полуоси, что удается за счет введения некоторых срезывающих функций. Для достижения этих случаев использован метод весовых и срезывающих функций С. Искандарова [28].

На все теоремы и на некоторые следствия из них построены иллюстративные примеры, подтверждающие выполнимость налагаемых условий.

Результаты настоящей работы могут найти применение в общей и качественной теории ИУВС и ИДУВС, а также при анализе и прогнозировании некоторых процессов механики с импульсным воздействием, оптимального управления, динамической теории кинетических уравнений для классических и квантовых систем, обратных задач теории рассеяния.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдукаримов А. Квадратичная суммируемость решения линейного двумерного интегрального уравнения Вольтерра второго рода на бесконечной области [Текст] / А. Абдукаримов // Исслед. по интегро-дифференц.уравнениям. – Бишкек: Илим, 2001. – Вып.30. – С.89-93.
2. Абдукаримов А. Квадратичная суммируемость решения векторного линейного двумерного интегрального уравнения Вольтерра второго рода на бесконечной области [Текст] / А. Абдукаримов // Исслед. по интегро-дифференц.уравнениям. – Бишкек: Илим, 2001. – Вып.31. – С.187-192.
3. Азбелев Н.В. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений [Текст] / Н.В. Азбелев, В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматуллина. – М.:Наука,1991. – 280 с.
4. Азбелев Н.В. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения [Текст] / Н.В. Азбелев, В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматуллина. – М., Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002. – 395 с.
5. Азбелев Н.В. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными [Текст] / Н.В. Азбелев, П.М. Симонов. – Пермь: Изд-во Пермск. ун-та, 2001. – 230 с.
6. Артемьев М.И. Оценка роста решений одного класса функционально-дифференциальных уравнений [Текст] / М.И. Артемьев , Ю.Н. Смолин // Функционально- дифференц. уравнения: Межвуз. сб. науч.тр. – Пермь: Пермск. политехн. ин-т, 1985. – С.30-33.
7. Асанов А. Регуляризация и достаточные условия единственности решения линейного интегрального уравнения типа Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными в пространстве непрерывных функций [Текст] / А. Асанов // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1979. – С. 154-165.

8. Асанов А. Регуляризация и единственность решения линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными [Текст] / А. Асанов // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.– Фрунзе: Илим, 1980. – Вып.13. – С.207–215.
9. Асанов А. Об одном классе систем интегральных уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / А. Асанов //Функц. анализ и его приложения. – 1983. – Т.17, Вып .4. – С.73-74.
10. Асанов А. Регуляризация операторного уравнения Вольтерра в шкале банаховых пространств [Текст] / А. Асанов // Исслед. по интегро-дифференц.уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1984. – Вып.17. – С.205-210.
11. Асанов А. О единственности решения операторных уравнений Вольтерра [Текст] / А. Асанов // Изв. АН. Киргиз. ССР. Физ.-техн. и мат. науки. – 1988. – № 1. – С.13-18.
12. Асанов А. Единственность решения операторных уравнений Вольтерра [Текст] / А. Асанов // Изв.АН Кирг.ССР. – 1988. – №11. – С.58-61.
13. Асанов А. Производная функции по возрастающей функции [Текст] / А. Асанов // Табигый илимдер журналы. – Бишкек: Кыргызско-Турецкий университет «Манас», 2001. – С. 18-64.
14. Асанов А. Система интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса. [Текст] / А.Асанов // Табигый илимдер журналы / Кыргызско-Турецкий ун-т «Манас». – Бишкек: 2003. – С.65-78.
15. Асанов А. Квадратичная интегрируемость решения линейного двумерного интегрального уравнения Вольтерра-Стилтьеса второго рода на бесконечной области [Текст] / А. Асанов, А.М. Абдукаримов // Исслед. по интегро-дифференц.уравнениям. – Бишкек: Илим, 2010. – Вып.42. – С.57-63.
16. Асанов А. Ограниченность решений интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса второго рода с двумя независимыми переменными [Текст] / А. Асанов, А.М. Байгесеков // Наука и новые технологии. – Бишкек, 2014. – №7. – С.43-46.

17. Асанов А. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка Вольтерра-Стилтьеса на полуоси [Текст] / А. Асанов, Ж.О. Толубаев // Наука и новые технологии. – Бишкек, 2013.– №4. – С.75-81.
18. Байгесеков А.М. О квадратичной интегрируемости на полуоси решения линейного интегрального уравнения Вольтерра-Стилтьеса второго рода с вырожденным ядром [Текст] / А.М. Байгесеков // Наука и новые технологии. – Бишкек, 2014. – №7. – С.47-49.
19. Байгесеков А.М. Степенная абсолютная суммируемость решений слабо нелинейного интегрального уравнения Вольтерра-Стилтьеса второго рода с двумя независимыми переменными [Текст] / А.М. Байгесеков // Известия вузов Кыргызстана. – Бишкек, 2015. – №11. – С. 8-11.
20. Байгесеков А.М. Один класс линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса первого рода с двумя независимыми переменными [Текст] / А.М. Байгесеков // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук.–М., 2016. –№02 (85),Ч.1. – С.11-16. (РИНЦ, РФ).
21. Байгесеков А.М. Линейное интегральное уравнение Вольтерра-Стилтьеса первого рода с двумя независимыми переменными [Текст] / А.М. Байгесеков // Проблемы современной науки и образования.–Иваново, 2016. –№3 (45). – С.35-44. (РИНЦ, РФ).
22. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости [Текст] / Е.А. Барбашин. – М: Наука , 1967. – 224с.
23. Березанский Л.М. Признаки экспоненциальной устойчивости линейных интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / Л.М. Березанский //Функционально-дифференц. уравнения: Межвуз. сб. науч.тр. – Пермь: Пермск. политехн. ин-т,1988. – С.66-69.
24. Бухгейм А. Л. Операторные уравнения Вольтерра в шкалах банаховых пространств [Текст] / А.Л. Бухгейм // Докл. АН СССР. – 1978 . – Т.242,№2. – С.272-276.

25. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / М.И. Иманалиев, А. Асанов // Докл. АН СССР.–1989.–Т.309, №5.–С.1052-1055.
26. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных двумерных интегральных уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / М.И. Иманалиев, А. Асанов // Докл. АН СССР.–1991. – Т.317, №1. – С.32-35.
27. Искандаров С. О принадлежности пространству $L^2[t_{0,}\infty)$ решения интегрального уравнения Вольтерра [Текст] / С. Искандаров // Тез. докл. Всесоюз. конф. по асимптотическим методам в теории сингулярно-возмущенных уравнений. – Алма-Ата: Наука, 1979. – Ч.1. – С.150-151.
28. Искандаров С. Достаточные условия ограниченности и устойчивости решений слабо нелинейных интегро-дифференциальных уравнений первого и второго порядка типа Вольтерра. Неограниченность решений линейных однородных уравнений первого порядка [Текст] / С. Искандаров // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим,1980. – Вып. 13. – С. 149-184.
29. Искандаров С. К вопросу о принадлежности пространству $L^2[t_{0,}\infty)$ решения линейного интегрального уравнения типа Вольтерра [Текст] / С. Искандаров // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим,1980. – Вып. 13. – С. 193-198.
30. Искандаров С. Об асимптотических свойствах первых производных решений линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра [Текст] / С. Искандаров // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим,1984. – Вып. 17. – С. 161-165.
31. Искандаров С. Об асимптотических свойствах решения системы линейных интегральных уравнений типа Вольтерра [Текст] / С. Искандаров // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим,1984. – Вып. 17. – С. 166-174.

32. Искандаров С. Леммы об интегральных неравенствах с интегралом Стилтьеса и первого рода с негладким ядром и их применения[Текст] /С.Искандаров // Исслед. по интегро-дифференц.уравнениям. – Бишкек: Илим, 1999. – Вып.28. – С.53-63.
33. Искандаров С. О леммах с интегралом Стилтьеса и их применении к изучению асимптотических свойств решений вольтерровых интегро-дифференциальных и интегральных уравнений [Текст] /С.Искандаров // Исслед. по интегро-дифференц.уравнениям. – Бишкек: Илим, 1999. – Вып.28. – С.64-74.
34. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра [Текст] / С. Искандаров. – Бишкек: Илим, 2002. – 216 с.
35. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений уравнений типа Вольтерра [Текст] :Автореф. дисс. …докт.физ.-мат.наук: 01.01.02 / С. Искандаров. – Бишкек, 2003. – 34 с.
36. Искандаров С. Асимптотическая устойчивость двух классов интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерры [Текст] /С.Искандаров //Дифференц. уравнения. – М.,2008. – Т.44, №7. – С. 883 - 895.
37. Искандаров С. Об абсолютной и квадратичной интегрируемости на полуоси решения линейного интегрального уравнения Вольтерра-Стилтьеса второго рода [Текст] / С.Искандаров, А.М. Байгесеков // Наука,новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2015. – №7. – С.6-9.
38. Искандаров С. Об оценке и асимптотических свойствах решений слабо нелинейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка Вольтерра-Стилтьеса на полуоси [Текст] / С.Искандаров, А.М. Байгесеков

// Наука,новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2016. – №7. – С.7-11.

39. Искандаров С. О степенной абсолютной интегрируемости на полуоси решения линейного интегрального уравнения Вольтерра-Стилтьеса второго рода [Текст] / С.Искандаров, А.М. Байгесеков // Наука,новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2016. –№8(2). – С.33-36.
40. Искандаров С. Об асимптотических свойствах решений слабо нелинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка Вольтерра-Стилтьеса на полуоси [Текст] / С.Искандаров, А.М. Байгесеков // Известия вузов Кыргызстана. – Бишкек, 2016. –№9. – С.3-8.
41. Карнишин С.Г. Об устойчивости по части переменных решений линейного функционально-дифференциального уравнения [Текст] / С. Г. Карнишин // III Уральск. регион. конф. «Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения», февр. 1988 г., Пермь: Тез. докл. – Пермь, 1988. – С. 116.
42. Керимов М.К. Библиография некоторых новых работ по интегральным и интегро-дифференциальным уравнениям [Текст] / М. К. Керимов // Доп. к моногр.: Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений: Пер. с англ. – М.:Наука,1982. – С. 257-304.
43. Колмановский В.Б. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием [Текст] / В.Б. Колмановский, В.Р. Носов. – М.:Наука, 1981. – 448 с.
44. Корытов С.Г. К вопросу об оптимальном управлении системами, описываемыми линейными функционально-дифференциальными уравнениями [Текст] / С. Г. Корытов // Краевые задачи : Межвуз. сб.науч.тр. – Пермь : Пермск. политехн. ин-т, 1986. – С. 36-40.
45. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода [Текст] / М. М. Лаврентьев // Докл. АН СССР. – 1959. – Т.127, №1. – С.31- 33.

46. Лаврентьев М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа [Текст] / М. М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. – М. : Наука, 1980. – 288 с.
47. Лакшмикантам В. Устойчивость движения: метод сравнения [Текст] / В.Лакшмикантам, С. Лила, А.А. Мартынюк. – Киев: Наук. думка, 1991. – 248 с.
48. Мухамадиев Э.М. Об одном классе линейных операторов в пространстве непрерывных функций [Текст] / Э.М. Мухамадиев // Тез. докл. Всесоюз. конф. по теории и приложениям функционально- дифференц. уравнений, сент. 1987 г., Душанбе:– Душанбе, 1987.– Ч.2. – С. 36-37.
49. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом [Текст] / А.Д.Мышкис. – Изд. второе.– М.:Наука,1972.– 352 с.
50. Печень А.Н. Метод стохастической асимптотики в квантовой динамике [Текст]: Автореф. дисс. . . . канд. физ.- мат. наук : 01.01.03 / А.Н. Печень. – М. , 2004. – 18 с.
51. Саадабаев А. Методы решения интегральных уравнений первого рода [Текст]:учеб. пособие / А. Саадабаев. – Фрунзе, 1986. – 95 с.
52. Сахнович Л.А. Нелинейные уравнения и обратные задачи на полуоси [Текст] / Л.А. Сахнович. – Препринт / ИМ АН Укр. ССР. – Киев, 1987. – № 87.30. – 56 с.
53. Сергеев В.О. Регуляризация уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / В.О. Сергеев //Докл. АН СССР. – 1971. – Т.197, №3. – С.531- 534.
54. Смолин Ю.Н. Оценка решений функционально-дифференциальных уравнений [Текст] / Ю.Н. Смолин // VII Всесоюз. конф. «качественная теория дифференц. уравнений», апр. 1989 г., Юрмала: Тез. докл. – Рига, 1989. – С. 207.
55. Тихонов А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач [Текст] / А.Н. Тихонов // Докл. АН СССР. – 1963. – Т.153, №1. – С.49-52.
56. Толубаев Ж.О. К вопросу о принадлежности пространству $L_g^2[t_0,\infty)$ решения линейного интегрального уравнения Вольтерра-Стилтьеса

[Текст] / Ж.О.Толубаев // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2010. – Вып. 42. – С.64-71.

57. Толубаев Ж.О. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра-Стильтьеса на полуоси [Текст] / Ж.О.Толубаев // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим,2010. – Вып. 43. – С. 40-45.
58. Толубаев Ж.О. Ограниченность и квадратичная суммируемость решений интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра-Стилтьеса [Текст]: Дисс. . . . канд.физ. – мат. наук: 01.01.02 / Ж.О.Толубаев. – Бишкек 2016. – 108 с.
59. Тышкевич В.А. Критерии разрешимости задачи о накоплении возмущений для линейного функционально-дифференциального уравнения [Текст] / В.А. Тышкевич // Проблемы устойчивости движения, аналитической механики и управления движением. – Новосибирск: Сибирск. отд. изд-ва «Наука», 1979. – С. 43-50.
60. Тышкевич В.А. Некоторые вопросы теории устойчивости функционально-дифференциальных уравнений [Текст] / В.А. Тышкевич . – Киев: Наука. думка, 1981. –80с.
61. Халанай А. Асимптотические поведение решений некоторых нелинейных интегральных уравнений [Текст] / А. Халанай // Rev. Roum. de. Math. Pures et appl. – 1965. –Т.10, N6. – 765-777.
62. Шелест А.В. Метод Боголюбова в динамической теории кинетических уравнений [Текст] / А.В. Шелест. – М. : Наука, 1990. – 160 с.
63. Corduneanu C. Integral Equations and Stability of Feedback Systems [Текст] / C. Corduneanu. – N.Y., London: Acad. Press, 1973. –238 p.
64. Hönig C.S. Volterra – Stiltjes integal equations [Текст] / C.S. Hönig // Lecture Notes in Math. – 1980. – Vol. 799. – P. 173-216.
65. Levin J.J. Boundedness and oscillation of some Volterra and delay eguations [Текст] / J.J. Levin // J. differential eguations. – 1969. – Vol. 5. – P. 369-398.

66. Levin J.J. Remarks on a Volterra eguation [Текст] / J.J. Levin // Delay and Functional Differential Eguations and Their Applications / Edited by K. Schmitt. – N .Y., London: Acad. Press, 1972. – P. 233-255.