НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. Ж.БАЛАСАГЫНА

Диссертационный совет Д 01.17.560

На правах рукописи

УДК 517.968.72+74

БАЙГЕСЕКОВ АБДИБАИТ МАЖИТОВИЧ

РАЗВИТИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛТЬЕСА

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Бишкек – 2017

Работа выполнена на кафедре естественные науки и информационных технологий Сулюктинского регионального института Баткенского государственного университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Асанов А.**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор,член-корр. НАН КР **Алымкулов К.,**

кандидат физико-математических наук **Темиров М.А.**

Ведущая организация: Жалал-Абадский государственный университет Адрес: 715600. г.Жалал-Абад. ул. Ленина № 57

Защита диссертации состоится 23 января 2018 г. в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.17.560 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук при Институте математики НАН Кыргызской Республики и Кыргызском Национальном университете им. Ж.Баласагына по адресу: Кыргызская Республика, 720054, г. Бишкек, ул. Абдымомунова 328, лабораторный корпус № 6 КНУ, аудитория 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН КР, Кыргызская Республика, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а и на сайте: www.math.aknet.kg Института математики НАН КР.

Автореферат разослан «___ » ____________ 2017 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета, д.ф.-м.н., профессор Байзаков А.Б.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации.

Литературный анализ показывает, что интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра-Стилтьеса (ИДУВС) и интегральные уравнения Вольтерра-Стилтьеса (ИУВС) становятся удобными математическими моделями для описания, изучения и прогнозирования процессов из многих отраслей науки и техники. Например, они применены для математического моделирования изучения устойчивости процессов с импульсным воздействием, процессов из оптимального управления, обратных задач теории рассеяния, процессов из динамической теории кинетических уравнений для классических и квантовых систем.

Изучение устойчивости и стабилизации таких процессов по истечении времени приводят к развитию исследований по качественной теории ИДУВС и ИУВС на полуоси. Во многих работах, в частности, в монографиях А.Д. Мышкиса (1972, 2-е изд.), Е.А. Барбашина (1967), В.Б. Колмановского, В.Р. Носова (1981), А.В.Шелеста (1990), Н.В. Азбелева, В.П. Максимова, Л.Ф. Рахматуллиной (1991,2002), Н.В. Азбелева, П.М. Симонова (2001), в обзорной статье C.S. Hönig's (1980), в препринте Л.А. Сахновича (1987) развита общая и качественная теория некоторых классов этих уравнений, разработаны методы и указаны новые направления исследований. Исследования из монографии Е.А. Барбашина (1967) по операторным уравнениям Вольтерра-Стилтьеса справедливы для решений некоторых частных классов ИУВС с двумя и несколькими независимыми переменными.

Исследования А.Н. Тихонова (1963), М.М. Лаврентьева, В.Г. Романова, С.П. Шишатского (1980), проведенные в связи с обратными задачами, показывают актуальность исследований по регуляризации и единственности решения интегральных уравнений Вольтерра и ИУВС с одним и несколькими независимыми переменными.

Отметим, что А. Асановым (2001) введено определение интеграла Стилтьеса по возрастающей функции и им же показано (2003), что исследование асимптотических свойств решений ИДУВС с одним и несколькими независимыми переменными существенно облегчается.

В кандидатской диссертации Ж.О. Толубаева (2016) исследованы ограниченность и квадратичная суммируемость решений скалярных и векторных ИДУВС, а также квадратичная суммируемость решения ИУВС второго рода по возрастающей функции первого и второго порядков на полуоси.

Более тщательный анализ работ других авторов показывает, что исследования по общей и качественной теории ИДУВС и ИУВС являются актуальными.

В предлагаемой диссертационной работе, во-первых, проводятся исследования по ограниченности и другим асимптотическим свойствам решений новых классов скалярных ИДУВС первого и второго порядков и

ИУВС второго рода на полуоси, отличных от исследований Ж.О. Толубаева (2016), во-вторых, проводятся исследования по ограниченности и квадратичной суммируемости решений ИУВС второго рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях, по единственности и регуляризации решения ИУВС первого рода с двумя независимыми переменными в ограниченных областях.

Следовательно, тема исследований настоящей работы - актуальная.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами.

Работа выполнена в рамках проектов НИР Института математики НАН КР: «Развитие и приложения компьютерного моделирования, асимптотических и аналитических методов в теории динамических систем, обратных и оптимизационных экономических задач в анализе геофизических данных для оперативного прогноза землетрясений» 2012-2014), номер гос. регистрации № 0005756, «Развитие и приложения компьютерного моделирования, асимптотических, топологических и аналитических методов в теории устойчивости динамических систем, разрешимости обратных задач, экономических и геофизических процессов» (2015-2017), номер гос. регистрации № 0007125 и включены в отчеты по этим проектам.

Цель и задачи исследования.

Применением и развитием качественных методов, разработанных в ИМ НАН КР, получить достаточные условия для степенной абсолютной интегрируемости на полуоси решения линейного ИУВС, оценки и асимптотических свойств решений и их первых производных слабо нелинейных ИДУВС первого и второго порядков соответственно на полуоси; квадратичной суммируемости и ограниченности на полуоси решений линейных и слабо нелинейных ИУВС второго рода с двумя независимыми переменными; регуляризации и единственности решения линейных ИУВС первого рода с двумя независимыми переменными.

Методика исследования.

Применяются и развиваются метод преобразования уравнений, метод весовых и срезывающих функций, метод интегральных неравенств с интегралом Стилтьеса, метод неотрицательных квадратичных форм, разработанные в ИМ НАН КР.

Научная новизна работы.

Установлены достаточные условия абсолютной и квадратичной интегрируемости на полуоси решения линейного ИУВС второго рода без предположения, что этими свойствами обладает его свободный член, при этом доказана общая теорема и из нее выведены множество следствий - коэффициентных признаков; для оценки, ограниченности, стремления к нулю, абсолютной и квадратичной интегрируемости на полуоси любого решения слабо нелинейного ИДУВС первого порядка, при этом рассматривается случай, когда производная возрастающей функции, по которой ведется интегрирование, может быть разрывной в некоторых точках полуоси; ограниченности на полуоси любого решения и его первой производной слабо нелинейного ИДУВС второго порядка, также оценки, абсолютной и квадратичной интегрируемости на полуоси, стремления к нулю первой производной любого решения этого уравнения, при этом рассматривается случай, когда производная возрастающей функции, по которой ведется интегрирование, может быть разрывной в некоторых точках полуоси; абсолютной и квадратичной суммируемости на бесконечном секторе решения слабо нелинейного ИУВС второго рода с двумя независимыми переменными; для оценки и ограниченности решения линейного и слабо нелинейного ИУВС второго рода с двумя независимыми переменными в бесконечной полосе, при этом существенно используется возрастание функции интегрирования по пространственной переменной; единственности решения линейного ИУВС первого рода с двумя независимыми переменными в пространстве квадратично суммируемых функций в заданном прямоугольнике; регуляризируемости по М.М. Лаврентьеву и единственности решения линейного ИУВС первого рода с двумя независимыми переменными в пространстве непрерывных функций в заданном прямоугольнике.

В главе 2 и в разделах 3.1, 3.4, 3.5 установлены условия преимущественно типа знака функций.

Теоретическая и практическая ценность.

Настоящая работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть применены в общей и качественной теории ИДУВС и ИУВС, а также при анализе и прогнозировании некоторых процессов механики с импульсным воздействием, оптимального управления, динамической теории кинетических уравнений для классических и квантовых систем, обратных задач теории рассеяния.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

Установление достаточных условий:

– абсолютной и квадратичной интегрируемости на полуоси решения линейного ИУВС второго рода без предположения, что этими свойствами обладает его свободный член, при этом доказана общая теорема и из нее выведены множество следствий - коэффициентных признаков;
– для оценки, ограниченности, абсолютной и квадратичной интегрируемости на полуоси, стремления к нулю любого решения слабо нелинейного ИДУВС первого порядка, при этом рассматривается случай, когда производная возрастающей функции, по которой ведется интегрирование, может быть разрывной в некоторых точках полуоси;
– ограниченности на полуоси любого решения и его первой производной слабо нелинейного ИДУВС второго порядка, оценки, абсолютной и квадратичной интегрируемости на полуоси, стремления к нулю первой производной любого решения этого уравнения, при этом рассматривается случай, когда производная возрастающей функции, по которой ведется интегрирование, может быть разрывной в некоторых точках полуоси;
– абсолютной и квадратичной суммируемости на бесконечном секторе решения слабо нелинейного ИУВС второго рода с двумя независимыми переменными;

– для оценки и ограниченности решения линейного и слабо нелинейного ИУВС второго рода с двумя независимыми переменными в бесконечной полосе, при этом существенно используется возрастание функции интегрирования по пространственной переменной, в случае ограниченности свободного члена этих уравнений;
– единственности решения линейного ИУВС первого рода с двумя независимыми переменными в пространстве квадратично суммируемых функций в заданном прямоугольнике;
– регуляризируемости по М.М. Лаврентьеву и единственности решения линейного ИУВС первого рода с двумя независимыми переменными в пространстве непрерывных функций в заданном прямоугольнике.

Личный вклад соискателя.

Проблемы исследования по теме диссертационной работы поставлены научным руководителем А.Асановым. Все материалы, включенные в диссертацию, принадлежат автору.

Апробация результатов диссертации.

Результаты диссертационной работы доложены и обсуждены на:
– семинаре Отделения математики КТУ «Манас» (рук. семинара д.ф.-м.н., проф. Асанов А., 2014-2017 гг., г. Бишкек);
– семинаре кафедры дифференциальных уравнений КНУ им. Ж. Баласагына (рук. семинара д.ф.-м.н., с.н.с. Байзаков А.Б., 15 мая 2015 г., г. Бишкек);
– V Международной научной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике», посв.85-летию академика М.И. Иманалиева (13 сент. 2016 г., г. Бишкек);
– научно-теоретической конференции «Кыргызстандын түштүк-батыш чөлкөмүндө илимий изилдөө иштери: багыттары жана көйгөйлөрү», посв. 20 - летнему юбилею СГЭИ БатГУ (12 нояб. 2016 г., г Сулюкта КР).
– VI Конгрессе математического общества Тюркского мира (2-5 окт. 2017 г., г. Астана).

Публикации по теме диссертации.

Основное содержание диссертационной работы опубликовано в 9 статьях [1-9], приведенных в конце автореферата. В совместных статьях: [1] постановка задачи принадлежит научному руководителю А. Асанову, [3,7-9] обсуждение результатов – соавтору С. Искандарову, доказательство теорем, вывод следствий и построение иллюстративных примеров – автору.

Структура и объем диссертации:

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, содержащих 13 разделов, выводов и списка использованной литературы из 66 наименований, 95 стр. компьютерного текста.

В диссертации принята тройная нумерация внутри каждого раздела главы. Например, теорема 2.2.1 означает первую теорему раздела 2 главы 2; (3.4.2) - вторая формула раздела 4 главы 3. Такая нумерация сохранена и в автореферате.

В настоящей работе все фигурирующие функции, зависящие от t, (t,τ), x, y, z, являются непрерывными при $t \ge t_0$, $t \ge \tau \ge t_0$, $|x|,|y|,|z| < \infty$, $J = [t_0, \infty)$;

$$x(t) \in L_g^p(J,R) \Leftrightarrow \int_{t_0}^{\infty} |x(t)|^p dg(t) < \infty, \quad x(t) \notin L_g^p(J,R) \Leftrightarrow \int_{t_0}^{\infty} |x(t)|^p dg(t) = \infty \quad (p>0),$$ где

$g(t)$ - возрастающая на J функция; $x(t) = O(1), t \in J \Leftrightarrow \exists M = const > 0$ такая, что $|x(t)| \le M$. В этом случае говорят, что функция $x(t)$ ограничено на полуинтервале J; $x(t)$ стремится к нулю при $t \to \infty$ означает: $\lim x(t) = 0, t \to \infty$; под $u(t,x) \in L_{\varphi,\psi}^p(G_1)$ $(p>0)$ понимается: $\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} |u(t,x)|^p d\varphi(t) d\psi(x) < \infty$ $(p>0)$, где $(t,x) \in G_1 = \{(t,x) : o \le t < \infty, o \le x < \infty\}$- бесконечный сектор, из которого при $p=1$ $\Rightarrow$абсолютная суммируемость функции $u(t,x)$ на бесконечном секторе G_1, а при $p=2$ $\Rightarrow$ квадратичная суммируемость функции $u(t,x)$ на бесконечном секторе G_1; ограниченность функции $u(t,x)$ для $(t,x) \in G = J \times [a,b]$ означает: $\sup_{(t,x)\in G} |u(t,x)| < \infty$. где $a, b \in R$.

Краткое содержание диссертации:

В главе 1, состоящей из трех разделов, приводятся обзор работ по асимптотическим свойствам решений интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра-Стилтьеса с одной независимой переменной на полуоси, а также по регуляризации и единственности решения интегральных уравнений Вольтерра и Вольтерра-Стилтьеса с двумя независимыми переменными; леммы о преобразованиях двойного интеграла Вольтерра-Стилтьеса, об интегрировании неравенства по возрастающей функции и об интегральных неравенствах Вольтерра-Стилтьеса на полуоси, и заключение.

Глава 2, состоящая из четырех разделов, посвящена исследованиям по степенной абсолютной интегрируемости, оценке и ограниченности и другим асимптотическим свойствам решений скалярных ИУВС второго рода и ИДУВС первого и второго порядков на полуоси.

Всюду в этой главе, следуя С. Искандарову (1980, 2002), предположим:

$0 < \varphi(t)$ - некоторая весовая функция,

$$K(t,\tau) = \sum_{i=1}^{n} K_i(t,\tau), \tag{K}$$

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} f_i(t), \tag{f}$$

$\psi_i(t)$ $(i = 1 \ldots n)$- некоторые срезывающие функции,

$R_i(t,\tau) \equiv \varphi(t) K_i(t,\tau) (\psi_i(t)\psi_i(\tau))^{-1}$, $\quad E_i(t) \equiv \varphi(t) f_i(t) (\psi_i(t))^{-1}$ $(i = 1 \ldots n)$;

$c_i(t)$ $(i = 1 \ldots n)$ - некоторые функции.

Введем следующие условия:

условие (R):

I) $R_i(t,t_0)\ge 0$, $R'_{ig(t)}(t,t_0)\le 0$, существуют функции $c_i(t)$ такие, что $(E_i(t))^2 \le R_i(t,t_0)c_i(t)$, $\left(E'_{ig(t)}(t)\right)^2 \le R'_{ig(t)}(t,t_0)\, c'_{ig(t)}(t)$ $(i=1\ldots n)$;
II) $R'_{ig(\tau)}(t,\tau)\ge 0$, $R''_{ig(t)g(\tau)}(t,\tau)\le 0$ $(i=1\ldots n)$;

условие (β): существует функция $\beta(t)>0$ такая, что $g'(t)\varphi(t)\ge \beta(t)$.

условие (Δ): $\Delta(t)\equiv 2\varphi(t)a(t)-\dfrac{d}{dg(t)}[g'(t)\varphi(t)]\ge 0$.

В разделе 2.1 установлены достаточные условия принадлежности пространствам $L_g^p(J,R)$ $(p=1,2)$ решения ИУВС:

$$x(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)x(\tau)dg(\tau)=f(t),\qquad t\ge t_0 \tag{2.1.1}$$

без предположения, что его свободный член $f(t)\in L_g^p(J,R)$ $(p=1,2)$, где $g(t)$- возрастающая функция.

ТЕОРЕМА 2.1.1. Пусть 1) $g(t)$ - возрастающая функция; $\varphi(t)\ge 0$; выполняются условия $(K),(f)$, (R); 2) $\varphi(t)(f_0(t))^2\in L_g^1(J,R_+)$.
Тогда для решения $x(t)\in C(J,R)$ ИУВС (2.1.1) имеет место утверждение:

$$\int_{t_0}^{t}\varphi(s)(x(s))^2dg(s)\le c_{**},\quad c_{**}=c_*+\int_{t_0}^{\infty}\varphi(t)(f_0(t))^2dg(t)<\infty. \tag{2.1.4}$$

СЛЕДСТВИЕ 2.1.1. Если 1) выполняются все условия теоремы 2.1.1;
2) $(\varphi(t))^{-1}\in L_g^1(J,R_+/\{0\})$ (соответственно $\varphi(t)\ge\varphi_0>0$), то решение ИУВС (2.1.1) $x(t)\in L_g^1(J,R)$ (соответственно $x(t)\in L_g^2(J,R)$).

СЛЕДСТВИЕ 2.1.5. Если 1) выполняются условия

$$K(t,\tau)=\sum_{i=1}^{n}P_i(t)Q_i(t),\ f(t)=\sum_{i=1}^{n}f_i(t),\ n\ge m,\ R_i(t)\equiv P_i(t)(Q_i(t))^{-1}\ \ (i=1,\ldots,m)$$

$T_i(t)\equiv Q_i(t)(P_i(t))^{-1}$ $(i=m+1,\ldots,n)$, $E_i(t)\equiv f_i(t)(Q_i(t))^{-1}$ $(i=1,\ldots,m)$,
$c_i(t)$ $(i=1,\ldots,m)$ - некоторые функции;
2) $R_i(t)\ge 0$, $R'_{ig(t)}(t)\le 0$, существуют функции $c_i(t)$ такие, что
$(E_i(t))^2\le R_i(t)\,c_i(t)$, $\left(E'_{ig(t)}(t)\right)^2\le R'_{ig(t)}(t)\,c'_{ig(t)}(t)$ $(i=1,\ldots,m)$;
3) $T_i(t_0)\ge 0$, $T'_{ig(t)}(t)\ge 0$ $(i=m+1,\ldots,n)$,
то решение $x(t)$ ИУВС (2.1.1) принадлежит пространству $L^2_{g(t)}(J,R)$.

ПРИМЕР 2.1.1. Для ИУВС

$$x(t)+\int_0^t\frac{e^{-t+t^2+\tau^2}}{\sqrt{t}-\sqrt{\tau}+2}x(\tau)d\left(\sqrt{\tau}\right)=-\frac{e^{-t+t^2}}{\sqrt{t}+3},\ t\ge 0$$

выполняются все условия следствия 2.1.1 при $a(t)\equiv e^t$, $b(t)\equiv e^{t^2}$, здесь $t_0=0$, $c(t)\equiv\dfrac{1}{\sqrt{t}+2}$. Значит решение этого ИУВС $x(t)\in L^1_{\sqrt{t}}(R_+,R)$, хотя его свободный член $\notin L^1_{\sqrt{t}}(R_+,R)$.

ПРИМЕР 2.1.4. ИУВС:

$$x(t)+\int_0^t\left[\left(\sqrt{t}+3\right)\left(\sqrt{\tau}+2\right)+\left(\sqrt{t}+2\right)\left(\sqrt{\tau}+1\right)\right]x(\tau)d\sqrt{\tau}=-5\left(\sqrt{t}+4\right),\ t\ge 0$$

удовлетворяет все условиям теоремы 2.1.1 и следствия 2.1.5, здесь $t_0=0$, $g(t)=\sqrt{t}$, $n=2$, $m=1$, $R_1(t)\equiv\left(\sqrt{t}+3\right)\left(\sqrt{t}+2\right)^{-1}$, $E_1(t)\equiv-5\left(\sqrt{t}+4\right)\left(\sqrt{t}+2\right)^{-1}$, $c_1(t)\equiv 25\left(\sqrt{t}+22\right)\left(\sqrt{t}+2\right)^{-1}$, $T_2(t)\equiv\dfrac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}+2}$. Значит, решение этого ИУВС $x(t)\in L^2_{\sqrt{t}}(R_+,R)$.

В разделе 2.2 установлены достаточные условия для оценки, ограниченности на полуинтервале J, стремления к нулю при $t\to\infty$, принадлежности пространствам $L^p_g(J,R)\,(p=1,2)$ любого решения ИДУВС вида

$$x'(t)+a(t)x(t)+\int_{t_0}^t K(t,\tau)x(\tau)dg(\tau)=f(t)+F\left(t,x(t),\int_{t_0}^t H(t,\tau,x(\tau))dq(\tau)\right),\ t\ge t_0,\quad (2.2.1)$$

где $g(t), q(t)$- возрастающие функции, функции $F(t,x,y), H(t,\tau,x)$ удовлетворяют по пространственным переменным следующим условиям слабой нелинейности:

$$|F(t,x,y)|\le l(t)|x|+l_1(t)|y|,\ |H(t,\tau,x)|\le h(t,\tau)|x| \qquad (F,H)$$

с неотрицательными «коэффициентами Липшица» $l(t), l_1(t), h(t,\tau)$.

Ниже: $\Delta(t)\equiv 2\varphi(t)a(t)-\dfrac{d}{dg(t)}[g'(t)\varphi(t)]$, $G(t,\tau)\equiv l_1(t)h(t,\tau)$.

ТЕОРЕМА 2.2.1. Пусть 1) $g(t), q(t)$- возрастающие функции; $\varphi(t)\ge 0$; выполняются условия (F,H), (K),(f) с $f_0(t)\equiv 0$, (R), (β), (Δ);

2) $\int_{t_0}^{\infty}\varphi(t)\left[l(t)(\beta(t))^{-1}+(\beta(t))^{-\frac{1}{2}}\int_{t_0}^t G(t,\tau)(\beta(\tau))^{-\frac{1}{2}}dq(\tau)\right]dg(t)<\infty$.

Тогда для любого решения $x(t)\in C^1(J,R)$ с любым начальным данным $x(t_0)$ справедливы утверждения:

$$x(t)=(\beta(t))^{-\frac{1}{2}}O(1), \qquad (2.2.6)$$

$$\Delta(t)(x(t))^2\in L^1{}_g\,(J,R_+). \qquad (2.2.7)$$

Из доказанной теоремы 2.2.1 вытекают следующие предложения.

СЛЕДСТВИЕ 2.2.1. Если выполняются все условия теоремы 2.2.1 и $\beta(t)\ge\beta_0>0$, то любое решение ИДУВС (2.2.1) ограничено на J.

СЛЕДСТВИЕ 2.2.2. Если выполняются все условия теоремы 2.2.1 и $\lim\limits_{t\to\infty}\beta(t)=\infty$, то любое решение ИДУВС (2.2.1) $x(t)\to 0$ при $t\to\infty$.

СЛЕДСТВИЕ 2.2.3. Если выполняются все условия теоремы 2.2.1 и $\Delta(t)>0$, $(\Delta(t))^{-1}\in L^1_g(J,R_+/\{0\})$ (соответственно $\Delta(t)\ge\Delta_0>0$), то любое решение ИДУВС (2.2.1) $x(t)\in L^1_g(J,R)$ (соответственно $x(t)\in L^2_g(J,R)$).

ПРИМЕР 2.2.1. Для ИДУВС

$$x'(t)+\left(e^t+\sqrt{t}\right)x(t)+\int_0^t\left\{\frac{e^{\sqrt[3]{t\cos t}+\sqrt[3]{\tau\cos\tau}+t+\tau}\sin\sqrt{t}\sin\sqrt{\tau}}{(t+1)\sqrt{t}\left(\sqrt{t}-\sqrt{\tau}+9\right)}+(t+1)(\tau+1)^2\sqrt{\tau}\right\}x(\tau)d\sqrt{\tau}=$$

$$=-\frac{5e^{t+\sqrt[3]{t\cos t}}\sin\sqrt{t}}{(t+1)\sqrt{t}\left(\sqrt{t}+12\right)}-\frac{e^{-t}x^2}{|x|+2}+\int_0^t\frac{x(\tau)\sin x(\tau)}{(t+\tau+3)^{10}}d\sqrt[3]{\tau}, \quad t\ge 0$$

выполняются все условия теоремы 2.2.1 и следствий 2.2.1-2.2.3 при $\varphi(t)\equiv(t+1)\sqrt{t}$, здесь $t_0=0$, $g(t)=\sqrt{t}$, $g'(t)\varphi(t)=\frac{1}{2}(t+1)\equiv\beta(t)$, $\frac{d}{d\sqrt{t}}[g'(t)\varphi(t)]=\sqrt{t}$,

$\Delta(t)\equiv 2e^t+\sqrt{t}$, $n=2$, $\psi_1(t)\equiv e^{t+\sqrt[3]{t\cos t}}\sin\sqrt{t}$, $R_1(t,\tau)\equiv\frac{1}{\sqrt{t}-\sqrt{\tau}+9}$, $E_1(t)=-\frac{5}{\sqrt{t}+12}$,

$c_1(t)\equiv\frac{25}{\sqrt{t}+12}$, $\psi_2(t)\equiv(t+1)^2\sqrt{t}$, $R_2(t,\tau)\equiv 1$, $E_2(t)\equiv c_2(t)\equiv 0$, $q(t)=\sqrt[3]{t}$, $l(t)\equiv e^{-t}$,

$G(t)\equiv\frac{1}{(t+\tau+3)^{10}}$.

Итак найден класс ИДУВС вида (2.2.1), для которого наша задача решаема. Заметим, что нам также удалось снять условие $g'(t)\in C(J,R_+)$ из кандидатской диссертации Ж.О. Толубаева (2016, с. 50-54), что достигли за счет введения некоторой весовой функции $\varphi(t)\ge 0$.

Раздел 2.3 посвящен установлению достаточных условий ограниченности на полуинтервале J решений и их первых производных, оценке, принадлежности пространствам $L_g^p(J,R)\,(p=1,2)$, стремлению к нулю при $t\to\infty$ первых производных решений ИДУВС второго порядка вида

$$x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)+\int_{t_0}^t K(t,\tau)x'(\tau)dg(\tau)=f(t)+$$

$$+F_2\left(t,x(t),x'(t),\int_{t_0}^t H_2(t,\tau,x(\tau),x'(\tau))dq(\tau)\right),\quad t\ge t_0, \tag{2.3.1}$$

где $g(t)$, $q(t)$- возрастающие функции , функции $F_2(t,x,y,z)$, $H_2(t,\tau,x,y)$ удовлетворяют по x,y,z следующим условиям слабой нелинейности:

$$|F_2(t,x,y,z)|\le l_0(t)|x|+l_1(t)|y|+l_2(t)|z|,\ |H_2(t,\tau,x,y)|\le h_0(t,\tau)|x|+h_1(t,\tau)|y| \qquad (F_2,H_2)$$

с неотрицательными «коэффициентамиЛипшица» $l_k(t),h_\nu(t,\tau)$ $(k=0,1,2;\nu=0,1)$

Ниже: $\Delta(t)$-такая же, как в разделе 2.2; $G_k(t,\tau)\equiv l_2(t)\,h_k(t,\tau)$ $(k=0,1)$.

ТЕОРЕМА 2.3.1. Пусть 1) $g(t),q(t)$- возрастающие функции; $\varphi(t)\ge 0$; выполняются условия (F_2,H_2), (K),(f) с $f_0(t)\equiv 0$, (R), (β), (Δ);

2) $g'(t)b(t)\varphi(t)\ge b_0>0$, $\frac{d}{dg(t)}[g'(t)b(t)\varphi(t)]\le 0$;

3) $\int_{t_0}^\infty\varphi(s)(\beta(s))^{-\frac{1}{2}}\left\{l_0(s)+l_1(s)(\beta(s))^{-\frac{1}{2}}+\int_{t_0}^t\left[G_0(s,\tau)+G_1(s,\tau)(\beta(\tau))^{-\frac{1}{2}}\right]dq(\tau)\right\}dg(s)<\infty$.

Тогда для любого решения $x(t)\in C^2(J,R)$ с любым начальными данными $x^{(k)}(t_0)$ $(k=0,1)$ верны следующие утверждения:

$$x(t)=O(1), \tag{2.3.8}$$

$x'(t)=(\beta(t))^{-\frac{1}{2}}O(1)$, $(2.3.9)$

$\Delta(t)(x'(t))^2 \in L^1{}_{g(t)}(J,R)$. $(2.3.10)$

Из теоремы 2.3.1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 2.3.1. Если выполняются все условия теоремы 2.3.1 и $\beta(t)\ge\beta_0>0$, то любое решение $x(t)$ и его первая производная $x'(t)$ ИДУВС (2.3.1) ограничены на J.

СЛЕДСТВИЕ 2.3.2. Если выполняются все условия теоремы 2.3.1 и $\lim\limits_{t\to\infty}\beta(t)=\infty$, то первая производная любого решения $x(t)$ ИДУВС (2.3.1) стремится к нулю при $t\to\infty$, т.е. $x'(t)\to 0,\ t\to\infty$.

СЛЕДСТВИЕ 2.3.3. Если выполняются все условия теоремы 2.3.1 и $\Delta(t)>0$, $(\Delta(t))^{-1}\in L^1_g(J,R_+/\{0\})$ (соответственно $\Delta(t)\ge\Delta_0>0$), то для любого решения $x(t)$ ИДУВС (2.3.1) его первая производная $x'(t)\in L^1_g(J,R)$ (соответственно $x'(t)\in L^2_g(J,R)$).

ПРИМЕР 2.3.1. ИДУВС $x''(t)+\left(t^4+1+(t+3)\sqrt[3]{t^2}\right)x'(t)+\dfrac{3}{(t+3)^2}x(t)+$

$$+\int_0^t\left\{\frac{e^{9(t+\tau)}\sin\sqrt[3]{t^2}\sin\sqrt[3]{\tau^2}}{\sqrt[3]{t^2}(t+3)^2\left(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{\tau}+5\right)}+e^{\sqrt{t}+\sqrt{\tau}}\sqrt[3]{\tau^2}(\tau+3)^2\right\}x'(\tau)d\sqrt[3]{\tau}=$$

$$=\frac{e^{9t}\sin\sqrt[3]{t^2}}{\sqrt[3]{t^2}(t+3)^2\left(\sqrt[3]{t}+2\right)}-e^{\sqrt{t}}+e^{-5t}x\sin x-\frac{|x'|x'}{(|x'|+1)(t+6)^{10}}+$$

$$+\int_0^t\left[\frac{e^{-t-\tau}x^3(\tau)}{x^2+1}-\frac{e^{-2t}|x'(\tau)|^5\cos x'(\tau)}{\left[(x'(\tau))^4+7\right](t+\tau+1)}\right]d\sqrt{\tau},\quad t\ge 0$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 2.3.1 и следствий 2.3.1-2.3.3 при $\varphi(t)\equiv\sqrt[3]{t^2}(t+3)^2$, здесь $t_0=0$, $g(t)=\sqrt[3]{t}$, $g'(t)\varphi(t)=\frac{1}{3}(t+3)^2\equiv\beta(t)$, $\dfrac{d}{dg(t)}[g'(t)\varphi(t)]\equiv 2(t+3)\sqrt[3]{t^2}$, $\Delta(t)\equiv 2(t^4+1)$, $n=2$, $\psi_1(t)\equiv e^{9t}\sin\sqrt[3]{t^2}$, $\psi_2(t)\equiv\sqrt[3]{t^2}(t+3)^2e^{\sqrt{t}}$, $R_1(t,\tau)\equiv\dfrac{1}{\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{\tau}+5}$, $E_1(t)\equiv\dfrac{1}{\sqrt[3]{t}+2}$, $c_1(t)\equiv\dfrac{1}{\sqrt[3]{t}+5}$, $R_2(t,\tau)\equiv 1$, $E_2(t)\equiv c_2(t)\equiv 1$, $l_0(t)\equiv e^{-5t}$, $l_1(t)\equiv\dfrac{1}{(t+6)^{10}}$, $l_2(t)\equiv 1$, $h_0(t,\tau)\equiv e^{-t-\tau}$, $h_1(t,\tau)\equiv\dfrac{e^{-2t}}{t+\tau+1}$.

Таким образом, мы нашли класс ИДУВС вида (2.3.1), для которого выше поставленная задача 2.3.1 решаема, при этом нам также удалось снять условие $g'(t)\in C(J,R_+)$ из кандидатской диссертации Ж.О. Толубаева (2016,с. 60-66), что достигается за счет введения некоторой весовой функции $\varphi(t)\ge 0$.

В главе 3, состоящей из шести разделов, проводятся исследования по ограниченности и квадратичной суммируемости решений ИУВС второго рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях, по единственности и регуляризации решения ИУВС первого рода с двумя независимыми переменными в ограниченных областях.

В разделе 3.1 установлены достаточные условия принадлежности пространствам $L^p_{\varphi,\psi}(G)$ $(p=1,2)$ любого решения слабо нелинейного ИУВС второго рода с двумя независимыми переменными:

$$m(t,x)u(t,x)+\int_0^t a(t,x,s)u(s,x)d\varphi(s)+\int_0^x b(t,x,y)u(t,y)d\psi(y)=f(t,x)+F(t,x,u), \qquad (3.1.1)$$

где $(t,x)\in G=\{(t,x): o\le t<\infty,\ o\le x<\infty\}$, $m(t,x)$, $a(t,x,s)$, $b(t,x,y)$, $f(t,x)$ - известные функции, причем $m(t,x)>0$, $u(t,x)$ - неизвестная функция. $\varphi(t),\psi(x)$ - известные строго возрастающие непрерывные функции. $\varphi(0)=0$, $\psi(0)=0$; $F(t,x,u)$ – известная непрерывная функция, удовлетворяющая в области G_1 следующего условия слабой нелинейности:

$|F(t,x,u)|\le g(t,x)|u|$ $\qquad (F)$ с неотрицательной $g(t,x)$.

ТЕОРЕМА 3.1.1. Пусть выполняются 1) условия A) функции $a(t,x,s)$, $a'_{\varphi(t)}(t,x,s)$ и $a''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,x,s)$ -непрерывны в области G_1, где $G_1=\{(t,x,s): o\le s\le t<\infty, o\le x<\infty\}$, $a(t,x,o)\ge 0$ и $a'_{\varphi(t)}(t,x,o)\le 0$ при $(t,x)\in G$, $a'_{\varphi(s)}(t,x,s)\ge 0$ и $a''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,x,s)\le 0$ при $(t,x,s)\in G_1$; B) функции $b(t,x,y)$, $b'_{\psi(y)}(t,x,y)$ и $b''_{\psi(x)\psi(y)}(t,x,y)$ - непрерывны в области $G_2=\{(t,x,y): o\le t<\infty, o\le y\le x<\infty\}$, $b(t,x,o)\ge 0$ и $b'_{\psi(x)}(t,x,o)\le 0$ при $(t,x)\in G$, $b'_{\psi(y)}(t,x,y)\ge 0$ и $b''_{\psi(x)\psi(y)}(t,x,y)\le 0$ при $(t,x,y)\in G_2$; 2) (F); 3) $m(t,x)>0$, $\dfrac{f(t,x)}{\sqrt{m(t,x)}}\in L^2_{\varphi,\psi}(G)$; 4) $\Delta(t,x)\equiv m(t,x)-2g(t,x)\ge\Delta_0>0$ (соответственно $\Delta(t,x)>0$, $(\Delta(t,x))^{-1}\in L^1_{\varphi,\psi}(G)$).Тогда любое решение уравнения (3.1.1) принадлежит $L^2_{\varphi,\psi}$ (G) (соответственно $L^1_{\varphi,\psi}$ (G)).

ПРИМЕР 3.1.1. Для интегрального уравнения

$$e^{t+x}u(t,x)+\int_0^t e^{-t+x+s}u(s,x)d\varphi(s)+\int_0^x e^{t^2-x^2+y^2}u(t,y)d\psi(y)=t-x-\frac{\sin e^{t+x}u}{2(1+u^2)},$$

где $(t,x)\in G=[0;\infty)\times[0;\infty)$, $\varphi(t)=\sqrt{t}$, $\psi(x)=\sqrt{x}$, выполняются все условия теоремы 3.1.1, здесь $m(t,x)=e^{t+x}$, $a(t,x,s)=e^{-t+x+s}$, $b(t,x,y)=e^{t^2-x^2+y^2}$, $g(t,x)=\frac{1}{2}e^{t+x}$,

$$\Delta_0=\frac{1}{2},\ (\Delta(t,x))^{-1}=2e^{-t-x}\in L^1_{\varphi,\psi}(G),\quad \frac{f^2(t,x)}{m(t,x)}=(t-x)^2e^{-t-x}\in L^1_{\varphi,\psi}(G).$$

Также A) $a(t,x,0)=e^{-t+x}\ge 0$, $a'_{\varphi(t)}(t,x,0)=-2\sqrt{t}\,e^{-t+x}\le 0$,

$a'_{\varphi(s)}(t,x,s)=2\sqrt{s}\,e^{-t+x+s}\ge 0$, $a''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,x,s)=-4\sqrt{ts}\,e^{-t+x+s}\le 0$;

B) $b(t,x,0)=e^{t^2-x^2}\ge 0$, $b'_{\psi(x)}(t,x,0)=-4x\sqrt{x}\,e^{t^2-x^2}\le 0$,

$b'_{\psi(y)}(t,x,y)=4y\sqrt{y}\,e^{t^2-x^2+y^2}\ge 0$, $b''_{\psi(x)\psi(y)}(t,x,y)=-16xy\sqrt{xy}\,e^{t^2-x^2+y^2}\le 0$.

Следовательно, любое решение этого уравнения $u(t,x)\in L^p_{\varphi,\psi}(G)$ $(p=1,2)$, т.е. любое решение рассматриваемого уравнения абсолютно и квадратично суммируемо в бесконечном секторе $G=[0;\infty)\times[0;\infty)$.

Раздел 3.2 посвящен задаче об установлении достаточных условий ограниченности решения линейного ИУВС:

$$u(t,x)=\int_{t_0}^{t}K_0(t,x,s)u(s,x)d\varphi(s)+\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b}K_1(t,x,s,y)u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)+f(t,x), \qquad (3.2.1)$$

где $(t,x)\in G=[t_0,\infty)\times[a,b]$, $K_0(t,x,s)$, $K_1(t,x,s,y)$, $f(t,x)$ - известные функции; $u(t,x)$ -неизвестная функция , $G_0=\{(t,x,s): t_0\le s\le t<\infty\ , a\le x\le b\}$, $G_1=\{(t,x,s,y): t_0\le s\le t<\infty\ , a\le y\le b, a\le x\le b\}$, $\varphi(t),\psi(x)$ - известные строго возрастающие непрерывные функции соответственно на $[t_0,\infty)$ и $[a,b]$, $\varphi(t)\in C^1[t_0,\infty)$, в случае ограниченности $f(t,x)$, $(t,x)\in G$.

ТЕОРЕМА 3.2.1. Пусть выполняются условия

а) $K_0(t,x,s)$ - непрерывная функция на G_0, $|K_0(t,x,s)||\varphi'(s)|\le l_1(s)$ при всех $(t,x,s)\in G_0$, а $l_1(s)\in L_1[t_0,\infty)$ и $l_1(s)$ - неотрицательная функция на $[t_0,\infty)$.

б) $K_1(t,x,s,y)$-непрерывная функция на G_1, $|K_1(t,x,s,y)||\varphi'(s)|\le l_2(s)$ при всех $(t,x,s,y)\in G_1$, а $l_2(s)\in L_1[t_0,\infty)$ и $l_2(s)$ - неотрицательная функция на $[t_0,\infty)$.

в) $f(t,x)$ - непрерывная функция на G, $\sup\limits_{(t,x)\in G}|f(t,x)|=f_0<\infty$.

Тогда существует единственное непрерывное ограниченное решение ИУВС (3.2.1) и справедлива оценка

$$\sup_{(t,x)\in G}|u(t,x)|\le Cf_0,\quad C=\exp\left\{\int_{t_0}^{\infty}[l_1(s)+l_2(s)(\psi(b)-\psi(a))]ds\right\} \qquad (3.2.2)$$

В разделе 3.3 установлен аналог результата раздела 3.2 для следующего нелинейного ИУВС:

$$v(t,x)=\int_{t_0}^{t}H_0(t,x,s,v(s,x))\,d\varphi(s)+\int_{t_0}^{t}\int_{a}^{b}H_1(t,x,s,y,v(s,y))\,d\psi(y)d\varphi(s)+f(t,x), \qquad (3.3.1)$$

где $(t,x)\in G=[t_0,\infty)\times[a,b]$, $H_0(t,x,s,v)$, $H_1(t,x,s,y,v)$, $f(t,x)$ - известные функции; $v(t,x)$ - неизвестная функция, $G_0=\{(t,x,s): t_0\le s\le t<\infty\ , a\le x\le b\}$, $G_1=\{(t,x,s,y): t_0\le s\le t<\infty\ , a\le y\le b, a\le x\le b\}$, $\varphi(t),\psi(x)$ - известные строго возрастающие непрерывные функции соответственно на $[t_0,\infty)$ и $[a,b]$, $\varphi(t)\in C^1[t_0,\infty)$, в случае ограниченности $f(t,x)$, $(t,x)\in G$.

В разделе 3.4 рассмотрено линейное ИУВС первого рода вида

$$\int_0^t a(t,x,s)u(s,x)d\varphi(s)+\int_0^x b(t,x,y)u(t,y)d\psi(y)+\int_0^t\int_0^x K(t,x,s,y)u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)=f(t,x), \qquad (3.4.1)$$

где $(t,x)\in G=\{(t,x): o\le t\le T, o\le x\le l\}$, $a(t,x,s), b(t,x,y), K(t,x,s,y)$ - известные функции, $u(t,x)$- неизвестная функция. $\varphi(t),\psi(x)$- известные строго возрастающие непрерывные функции. $\varphi(0)=0,\ \psi(0)=0$, и установлены достаточные условия единственности этого уравнения в пространстве $L^2_{\varphi,\psi}(G)$.

ТЕОРЕМА 3.4.1. Пусть выполняются условия 1) функция $a(t,x,s)$ и $a''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,x,s)-$непрерывна в области G_1, где $G_1=\{(t,x,s): o\le s\le t\le T, o\le x\le l\}$, $a(t,x,o)\ge 0$ при $(t,x)\in G$, $a''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,x,s)\le 0$ при $(t,x,s)\in G_1$;

2) функции $b(t,x,y)$ и $b''_{\psi(x)\psi(y)}(t,x,y)$ - непрерывна в области $G_2=\{(t,x,y): o\le t\le T, o\le y\le x\le l\}$, $b(t,x,o)\ge 0$ при $(t,x)\in G,$ $b''_{\psi(x)\psi(y)}(t,x,y)\le 0$ при $(t,x,y)\in G_2$;

3) функции $K(t,x,s,y)$ и $K^{(IV)}_{\varphi(t)\psi(x)\varphi(s)\psi(y)}(t,x,s,y)$ - непрерывны в области $G_3=\{(t,x,s,y): o\le s\le t\le T, o\le y\le x\le l\}$, для любых при $(t,x,s,y)\in G_3$ справедливо $a(s,y,o)b(s,y,o)-(\psi(x)-\psi(y))(\varphi(t)-\varphi(s))K^2(s,y,o,o)\ge 0$,

$a''_{\varphi(\tau)\varphi(s)}(s,y,\tau)b''_{\psi(z)\psi(y)}(s,y,z)-\varphi(s)\psi(y)\,(K''_{\varphi(\tau)\psi(z)}(s,y,\tau,z))^2\ge 0,$

$K(s,y,o,o)-(\varphi(t)-\varphi(s))K'_{\varphi(s)}(s,y,o,o)-(\psi(x)-\psi(y))K'_{\psi(y)}(s,y,o,o)+$

$+(\psi(x)-\psi(y))(\varphi(t)-\varphi(s))K''_{\varphi(s)\psi(y)}(s,y,o,o)\ge\alpha>0$ (α - известная const);

4) для любых $(t,x,y,z)\in G_4=\{(t,x,y,z): 0\le t\le T, o\le z\le y\le x\le l\}$ справедливо $a'_{\varphi(t)}(t,y,o)b'_{\psi(z)}(t,y,z)+\psi(y)(\psi(x)-\psi(y))(K'_{\psi(z)}(t,y,o,z))^2\le 0;$

5) для любых $(t,x,s,\tau)\in G_5=\{(t,x,s,\tau): 0\le\tau\le s\le t\le T,\ o\le x\le l\}$ справедливо $a'_{\varphi(\tau)}(s,x,\tau)b'_{\psi(x)}(s,x,o)+\varphi(s)(\varphi(t)-\varphi(s))(K'_{\varphi(\tau)}(s,x,\tau,o))^2\le 0;$

6) для любых $(t,x,s,y,\tau,z)\in G_6=\{(t,x,s,y,\tau,z): 0\le\tau\le s\le t\le T,\ o\le z\le y\le x\le l\}$:

$K'_{\varphi(\tau)}(s,y,\tau,o)-(\varphi(t)-\varphi(s))K''_{\varphi(\tau)\varphi(s)}(s,y,\tau,o)-(\psi(x)-\psi(y))K''_{\varphi(\tau)\psi(y)}(s,y,\tau,o)+$

$+(\varphi(t)-\varphi(s))(\psi(x)-\psi(y))K'''_{\varphi(\tau)\varphi(s)\psi(y)}(s,y,\tau,o)\ge 0,$

$K'_{\psi(z)}(s,y,o,z)-(\varphi(t)-\varphi(s))K''_{\psi(z)\varphi(s)}(s,y,o,z)-(\psi(x)-\psi(y))K''_{\psi(z)\psi(y)}(s,y,o,z)+$

$+(\varphi(t)-\varphi(s))(\psi(x)-\psi(y))K'''_{\psi(z)\varphi(s)\psi(y)}(s,y,o,z)\ge 0,$

$K''_{\varphi(\tau)\psi(z)}(s,y,\tau,z)-(\varphi(t)-\varphi(s))K'''_{\varphi(\tau)\psi(z)\varphi(s)}(s,y,\tau,z)-(\psi(x)-\psi(y))K'''_{\varphi(\tau)\psi(z)\psi(y)}(s,y,\tau,z)+$

$(\varphi(t)-\varphi(s))(\psi(x)-\psi(y))K^{IV}_{\varphi(\tau)\psi(z)\varphi(s)\psi(y)}(s,y,\tau,z)\ge 0.$

Тогда решение уравнения (3.4.1) единственно в пространстве $L^2_{\varphi,\psi}(G)$.

Раздел 3.5 посвящен построению регуляризирующего оператора по М.М. Лаврентьеву и достаточным условиям единственности решения в пространстве $C(G)$ для линейного двумерного ИУВС первого рода:

$$\int_{t_0}^{t}K(t,x,s)u(s,x)d\varphi(s)+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}N(t,x,s,y)u(s,y)d\psi(y)d\varphi(s)=f(t,x),\qquad (t,x)\in G,\quad (3.5.1)$$

где $u(t,x)$ - искомая функция, $K(t,x,s)$, $N(t,x,s,y)$ - известные ядра, $f(t,x)$ - известная функция; $f(t_0,x)=0$ при $x\in[x_0,X]$; $G=\{(t,x): t_0\le t\le T, x_0\le x\le X\}$, $\varphi(t),\psi(x)$ - известные строго возрастающие непрерывные функции.

Построены иллюстративные примеры на все теоремы и на некоторые следствия глав 2, 3, показывающие естественность наложенных условий.

В конце диссертации сделаны выводы о новизне проведенных исследований и возможности теоретических и практических применений полученных результатов.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору А.Асанову за помощь и ценные советы и проректору БатГУ, кандидату филологических наук, доценту А.А.Машрабову за поддержку при подготовке диссертационной работы.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1. Байгесеков А.М. Ограниченность решений интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса второго рода с двумя независимыми переменными [Текст] / А. Асанов, А.М. Байгесеков // Наука и новые технологии.– Бишкек, 2014. – №7. – С.43-46.
2. Байгесеков А.М. О квадратичной интегрируемости на полуоси решения линейного интегрального уравнения Вольтерра-Стилтьеса второго рода с вырожденным ядром [Текст] / А.М. Байгесеков // Наука и новые технологии. – Бишкек, 2014. – №7. – С.47-49.
3. Байгесеков А.М. Об абсолютной и квадратичной интегрируемости на полуоси решения линейного интегрального уравнения Вольтерра-Стилтьеса второго рода [Текст] / С.Искандаров, А.М. Байгесеков // Наука,новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2015. – №7. – С.6-9.
4. Байгесеков А.М. Степенная абсолютная суммируемость решений слабо нелинейного интегрального уравнения Вольтерра-Стилтьеса второго рода с двумя независимыми переменными [Текст] / А.М. Байгесеков // Известия вузов Кыргызстана. – Бишкек, 2015. – №11. – С. 8-11.
5. Байгесеков А.М. Один класс линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса первого рода с двумя независимыми переменными [Текст] / А.М. Байгесеков // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. – М., 2016. – №02 (85),Ч.1. – С.11-16. (РИНЦ, РФ).
6. Байгесеков А.М. Линейное интегральное уравнение Вольтерра-Стилтьеса первого рода с двумя независимыми переменными [Текст] / А.М. Байгесеков // Проблемы современной науки и образования. – Иваново,2016. – №3 (45). – С.35-44. (РИНЦ, РФ).
7. Байгесеков А.М. Об оценке и асимптотических свойствах решений слабо нелинейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка Вольтерра-Стилтьеса на полуоси [Текст] / С.Искандаров, А.М. Байгесеков // Наука,новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2016. – №7. – С.7-11.
8. Байгесеков А.М. О степенной абсолютной интегрируемости на полуоси решения линейного интегрального уравнения Вольтерра-Стилтьеса второго рода [Текст] / С.Искандаров, А.М. Байгесеков // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2016. – №8(2). – С.33-36.
9. Байгесеков А.М. Об асимптотических свойствах решений слабо нелинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка Вольтерра-Стилтьеса на полуоси [Текст] / С.Искандаров, А.М. Байгесеков // Известия вузов Кыргызстана. – Бишкек, 2016. –№9. – С.3-8.

РЕЗЮМЕ

Байгесеков Абдибаит Мажитович

“Вольтерра-Стилтьестин интегралдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелеринин чыгарылыштарынын касиеттерин изилдөөнү өнүктүрүү”деген темада 01.01.02-дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу деген адистик боюнча физика-математикалык илимдердин кандидаты окумуштуулук даражасын алуу үчүн диссертация сунушталган

Урунттуу сөздөр: өсүүчү функция боюнча туунду, экинчи түрдөгү Вольтерра-Стилтьестин интегралдык теңдемеси (ВСИТ), биринчи тартиптеги Вольтерра-Стилтьестин интегро-дифференциалдык теңдемеси (ВСИДТ), экинчи тартиптеги ВСИДТ, эки өзгөрмөлүү биринчи түрдөгү ВСИТ, абсолюттук жана квадраттык интегралдануу, баалоо, чектелгендик, нөлгө умтулуу, абсолюттук жана квадраттык суммалануу, жалгыздык, регуляризациялоо.

Изилдөөнүн объектиси: экинчи түрдөгү ВСИТ, биринчи жана экинчи тартиптеги ВСИДТ, эки өзгөрмөлүү биринчи жана экинчи түрдөгү ВСИТ.

Изилдөөнүн максаты: сызыктуу ВСИТ тин жарым октогу даражалуу абсолюттук интегралданышы; жарым октогу биринчи жана экинчи тартиптеги сызыктуу эмес ВСИДТтин чыгарылыштарынын жана алардын биринчи туундуларынын баалоолору жана асимптотикалык касиеттери үчүн; жарым октогу эки өзгөрмөлүү экинчи түрдөгү сызыктуу жана сызыктуу эмес ВСИТтин чыгарылыштарынын абсолюттук жана квадраттык суммалануусу жана чектелиши; эки өзгөрмөлүү биринчи түрдөгү сызыктуу ВСИТтин чыгарылышынын жалгыздыгы жана регуляризацияланышы үчүн жетиштүү шарттарды алуу.

Изилдөөнүн усулдары. Изилдөө процессинде КР УИАнын математика институтунда иштелип чыккан теңдемелерди өзгөртүп түзүү, салмактык жана кесүүчү функциялар,Стилтьес интегралы менен интегралдык барабарсыздыктар жана терс эмес квадраттык формалар усулдары колдонулду жана өнүктүрүлдү.

Изилдөөнүн илимий жаңылыгы. Экинчи түрдөгү сызыктуу ВСИТтин чыгарылышынын жарым октогу абсолюттук жана квадраттык интегралданышы, сызыктуу эмес биринчи тартиптеги ВСИДТтин чыгарылышы үчүн чектелгендигин, нөлгө умтулушун, абсолюттук жана квадраттык интегралданышы үчүн жетиштүү шарттар табылды. Сызыктуу эмес экинчи тартиптеги ВСИДТтин каалаган чыгарылышынын жана анын биринчи туундусунун жарым октогу чектелгендиги, абсолюттук жана квадраттык интегралданышы, нөлгө умтулушунун жетиштүү шарттары алынды. Эки өзгөрмөлүү экинчи түрдөгү сызыктуу эмес ВСИТтин чыгарылышынын чексиз сектордо абсолюттук жана квадраттык суммалануусу, чексиз тилкеде чектелиши жана баалоосунун жетиштүү шарттары табылды. Эки өзгөрмөлүү биринчи түрдөгү сызыктуу ВСИТтин чыгарылышынын тик бурчтукта квадраттык суммалануучу жана үзгүлтүксүз функциялардын мейкиндигиндеги жалгыздыгы жана М.М. Лаврентьев боюнча регуляризацияланышы каралды.

РЕЗЮМЕ

на диссертацию Байгесекова Абдибаита Мажитовича «Развитие исследований свойств решений интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра-Стилтьеса» представлена на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02-дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: производная по возрастающей функции, интегральное уравнение Вольтерра-Стилтьеса (ИУВС) второго рода, интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра-Стилтьеса (ИДУВС) первого порядка, ИДУВС второго порядка, двумерное ИУВС второго рода, двумерное ИУВС первого рода, абсолютная и квадратичная интегрируемость, суммируемость, оценка, ограниченность, стремление к нулю, единственность, регуляризация.

Объект исследования: ИУВС второго рода, ИДУВС первого и второго порядка, двумерное ИУВС второго рода, двумерное ИУВС первого рода.

Цель работы: Получить достаточные условия для степенной абсолютной интегрируемости на полуоси решения линейного ИУВС, оценки и асимптотических свойств решений и их первых производных слабо нелинейных ИДУВС первого и второго порядков соответственно на полуоси; квадратичной суммируемости и ограниченности на полуоси решений линейных и слабо нелинейных двумерных ИУВС второго рода; регуляризации и единственности решения линейных двумерных ИУВС первого рода.

Методика исследования. Применяются и развиваются методы преобразования уравнений, метод весовых и срезывающих функций, метод интегральных неравенств с интегралом Стилтьеса, метод неотрицательных квадратичных форм, разработанные в ИМ НАН КР.

Научная новизна: Установлены достаточные условия абсолютной и квадратичной интегрируемости на полуоси решения линейного ИУВС второго рода без предположения, что этими свойствами обладает его свободный член; для ограниченности, стремления к нулю, абсолютной и квадратичной интегрируемости на полуоси решения слабо нелинейного ИДУВС первого порядка; ограниченности на полуоси любого решения и его первой производной слабо нелинейного ИДУВС второго порядка, абсолютной и квадратичной интегрируемости на полуоси, стремления к нулю первой производной любого решения этого уравнения; абсолютной и квадратичной суммируемости на бесконечном секторе решения слабо нелинейного двумерного ИУВС второго рода; для ограниченности решения линейного и слабо нелинейного двумерных ИУВС второго рода в бесконечной полосе; единственности решения линейного двумерного ИУВС первого рода в пространстве квадратично суммируемых функций в заданном прямоугольнике; регуляризируемости по М.М. Лаврентьеву и единственности решения линейного двумерного ИУВС первого рода в пространстве непрерывных функций в заданном прямоугольнике.

SUMMARY

on the dissertation "Development of research on the properties of solutions of integral and integro-differential Volterra-Stieltjes equations" by Baigesekov Abdibait Majitovich for the degree of candidate of physical and mathematical sciences, specialty 01.01.02-differential equations, dynamical systems and optimal control

Keywords:derivative with respect to increasing function, Volterra-Stieltjes integral equation(VSIE) of second kind, first-order integro-differential Volterra-Stieltjes equation (IDVSE), second-order IDVSE, two-dimensional second-order VSIE, two-dimensional VSIE of the first kind, absolute and quadratic integrability, estimation, boundedness, tending to zero, absolute and quadratic summability, uniqueness, regularization.

Object of research:the second-order VSIE, the first-order IDVSE, the second-order IDVSE, the two-dimensional second-order VSIE, the two-dimensional VSIE of the first kind.

Aim of research: To obtain sufficient conditions for the power-law absolute integrability of solution of the linear VSIE on the semiaxis; the estimates and asymptotic properties of the solutions and their first derivatives of weakly nonlinear first-order and second-order IDVSE on the semiaxis, respectively; quadratic summability and boundedness on the semiaxis of the solutions of linear and weakly nonlinear two-dimensional VSIE of the second kind; regularization and uniqueness of the solution of linear two-dimensional VSIE of the first kind.

Methods of research: The methods: of transformation of equations, of weighting and cutting functions, of integral inequalities with the Stieltjes integral, the method of nonnegative quadratic forms developed at the IM of NAS of the Kyrgyz Republic are applied and are being developed.

Scientific novelty: Sufficient conditions for absolute and quadratic integrability on the semiaxis of the solution of a linear VSIE of the second kind are established without the assumption that these properties are possessed by its free term; for boundedness, tending to zero, absolute and quadratic integrability on the semiaxis of any solution of a weakly nonlinear first-order IDVSE; boundedness on the semiaxis of any solution and its first derivative of a weakly nonlinear second-order IDVSE, also estimates, tending to zero, absolute and quadratic integrability on the semiaxis of the first derivative of any solution of this equation; absolute and quadratic summability on the infinite sector of the solution of a weakly nonlinear two-dimensional VSIE of the second kind; for boundedness of the solution of a linear and weakly nonlinear two-dimensional VSIE of the second kind in an infinite strip; uniqueness of the solution of a linear two-dimensional VSIE of the first kind in the space of quadratically summable functions in a given rectangle; regularizability after to M.M. Lavrentiev and the uniqueness of the solution of a linear two-dimensional VSIE of the first kind in the space of continuous functions are found.

Тираж 100 экз. Формат 60 x 84/16. Объём 1,5 п.л.
Отпечатано в типографии «Айат»
г. Бишкек, ул. Ташкентская, 60