НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

УДК 517.928

Аскар кызы Лира

# КОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
Г.М. Кененбаева

Бишкек – 2017

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И ОПРЕДЕЛЕНИЙ

$Ob(K)$ - объекты категории $K$.

$Mor(K)$ - морфизмы категории $K$.

$x \in M$ $(x \notin M)$ – элемент $x$ принадлежит (не принадлежит) множеству $M$.

$\forall, \exists, \exists!$ – кванторы всеобщности, существования и существования и единственности соответственно.

$\Rightarrow$ – логическое следование.

$:=$ – равно по определению.

$P(x)$ $(x \in M)$ - предикат от $x$ на множестве $M$ - высказывание, которое может быть либо истинным, либо ложным в зависимости от $x$.

$\{x \in M : P(x)\}$ – подмножество элементов $x$ множества $M$, для которых "$P(x)$". Аналогичное обозначение будем использовать для множеств функций от элементов. К множествам, определенным таким образом, будем также применять операции $\Sigma$, *max, min, argmin, argmax, colon, inf, sup* и т.д.

$\rho(\cdot,\cdot)$ – метрика в метрическом пространстве.

$\|\cdot\|$ – норма в нормированном пространстве.

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в гильбертовом пространстве.

$\boldsymbol{N}$ – множество натуральных чисел.

$\boldsymbol{R} := (-\infty, +\infty)$ – действительная прямая.

$\boldsymbol{R}_{+} := [0, +\infty)$ – множество неотрицательных вещественных чисел.

$\boldsymbol{R}_{++} := (0, +\infty)$ – множество положительных вещественных чисел.

$\Omega \subset \boldsymbol{R}$ - связная область (отрезок, полуось или все $\boldsymbol{R}$).

$f : Z \to U$ – функция, действующая из множества $Z$ в множество $U$.

По традиции, если $Z$ и $U$, в свою очередь, - множества функций, то будем употреблять термин «оператор». Такие операторы будем записывать следующим образом: функция каких переменных получается; (после знака ;): на какую функцию (или несколько функций) и каких переменных действует оператор; связанные переменные в этой функции (по аналогии с записью интегралов), через двоеточие.

П р и м е ч а н и е. Иногда используются также термины «преобразование $Z$ в $U$», «отображение $Z$ в $U$».

Для $Z_1 \subset Z$ обозначим $f(Z_1) := \{f(z): z \in Z_1\}$ – образ множества $Z_1$ при преобразовании $f$.

Если $f(Z)=U$, то функция $f$ называется сюръективной;

если $(z_1 \neq z_2) \Rightarrow (A(z_1) \neq A(z_2))$,то функция $f$ называется инъективной.

Сюръективная и инъективная функция называется взаимно–однозначной и имеет обратную, которую будем обозначать $f^{-1}$.

Для любого множества (категории) $Z$ через $I:Z \to Z$ будем обозначать тождественное преобразование (тождественный морфизм).

Для линейных нормированных пространств и линейной функции $f: Z \to U$ будем обозначать операторную норму $\| f \| := sup\{ \|f(z)\|_U: z \in Z, \|z\|_Z = 1\}$ (если она существует).

$(Z \to U)$ – множество функций $f: Z \to U$.

Из таких множеств будем выделять подмножества непрерывных, аналитических и т.д. функций. Если $U=\boldsymbol{R}$, то знаки “$\to \boldsymbol{R}$” будем опускать.

$\Phi(s; u(x): x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} exp(-isx) u(x) dx$ - преобразование Фурье (если интеграл сходится);

$\Phi^{-1}(x; v(s): s) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} exp(isx) v(s) ds$ - обратное преобразование Фурье.

$C(G)$ – пространство непрерывных функций на ограниченной области $G \subset \boldsymbol{R}^n$ с нормой $\|x\|_C = max\{|x(t)|: t \in G\}$.

Будем использовать понятие мультииндекса $I \in N_0^n$.Также будем использовать обозначения $|I|$ - сумма его компонент, $I! := i_1! \dots i_n!$. $D^I := \frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I}$.

$A_v$ (для $v>0$) – пространство целых аналитических функций экспоненциального типа с показателем $v$, то есть удовлетворяющих условию:

$(\forall f(z) \in A_v)(\exists c>0)(\forall z \in C)( |f(z)| < c\, e^{v|z|})$, с нормой $\|f\|_v := sup\{|f(z)|\, e^{-v|z|}: z \in C\}$.

$A_{+v}$ – пространство целых аналитических функций $f(z)$ таких, что в некоторой точке (можно принять – в начале координат) последовательность их производных имеет скорость роста не выше степенного:

$(\forall f(z) \in A_{+v})\ (\exists c>0)(\forall k \in N_0:=\{0,1,2,3\ldots\})(\ |f^{(k)}(0)| \le cv^k),$

с нормой в пространстве $A_{+v}$: $||f||_{+v} := sup\{|f^{(k)}(0)|\ v^{-k}: k \in N_0\}$.

Соответственно $A_{2v}$ – пространство аналитических функций двух переменных с условием $(\ |f(z,w)| < c\ e^{v(|z|+|w|)});$

$A_{n+v}$ – пространство аналитических функций $n$ переменных с условием:

$\left|\frac{\partial^{|I|} f(0)}{\partial x^I}\right| < const \cdot v^{|I|}$ с нормой $\|f(x)\|_{n+v} \coloneqq sup\left\{\left|\frac{\partial^{|I|} f(0)}{\partial x^I}\right| v^{-|I|} : I \in N_0^n\right\}$.

В гильбертовом пространстве оператор $A$ называется **монотонным,** если $(\forall z_1,z_2 \in Z)(\langle Az_1 - Az_2, z_1 - z_2\rangle \ge 0);$ линейный оператор $A$ называется **положительным,** если $(\forall z \in Z)(\langle Az, z\rangle \ge 0),$ и **положительно определенным,** если

$(\forall z \in Z,\ z \ne 0)(\langle Az, z\rangle > 0).$

Оператор $A$ называется **вполне непрерывным**, если оно отображает любое ограниченное множество в компактное (определение уточняется в зависимости от пространств, в которых действует оператор).

$K(t,s)$ - ядро линейного интегрального оператора.

Для линейных операторов:

$A^*$ – сопряженный оператор в гильбертовом пространстве (такой, что $\langle Ax, y\rangle \equiv \equiv \langle x, A^*y\rangle)$, соответственно для интегрального оператора $K^*(t,s) = K(s,t)$ - сопряженное ядро.

$\{\lambda_k : k \in \mathbf{N}\}$ – характеристические числа оператора $A$, соответственно для интегрального оператора - ядра $K(t,s)$.

$\{\varphi_k(t) :\ k \in \mathbf{N}\}$ – нормированные собственные функции ядра $K(t,s)$, соответствующие характеристическим числам $\lambda_k$: $\varphi_k(t) = \lambda_k \int_\Omega K(t,s)\varphi_k(s)\,ds$.

Для функции $w(t)$ обозначим $w_k = \int_\Omega \varphi_k(s)\,w(s)ds$ – коэффициенты Фурье относительно системы ортонормированных функций $\{\varphi_k(t) | k \in \mathbf{N}\}$.

$\varepsilon\in\boldsymbol{R}_{++}$ – малое число (будет использоваться для доказательства непрерывности функций).

$\alpha\in\boldsymbol{R}_{++}$ – малый параметр (регуляризации).

Для линейного оператора $A$:

$\boldsymbol{T}_\alpha=(\alpha I+AA^*)^{-1}A^*$ **(регуляризатор Тихонова);**

если оператор $A$ – также положительный и симметричный, то:

$\boldsymbol{L}_\alpha=(\alpha I+A)^{-1}$ **(регуляризатор Лаврентьева).**

Для положительной функции $f_1(\alpha)$ и любой функции $f_2(\alpha)$ запись $f_2(\alpha)=O(f_1(\alpha))$ означает, что отношение $|f_2(\alpha)|/f_1(\alpha)$ ограничено при $\alpha\to 0$.

В метрическом пространстве $S(z_1,r)=\{z\in Z:\rho_Z(z,z_1)\le r\}$ – замкнутый шар радиуса $r$ с центром в $z_1$.

$\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ - оператор Лапласа.

Известные равенства ($b\in\boldsymbol{R}_{++}$):

$$\int_{-\infty}^{\infty}exp(-bs^2)\,ds=\sqrt{\frac{\pi}{b}}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}exp(-bs^2+\alpha s)\,ds=\sqrt{\frac{\pi}{b}}\exp\left(\frac{\alpha^2}{4b}\right).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}exp(-bs^2)s^2\,ds=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b^3}}.$$

# ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность проблемы.**

В настоящее время многие разделы математики успешно изучаются в рамках теории категорий, поскольку она рассматривает свойства отношений между математическими объектами, не зависящие от внутренней структуры объектов. В Кыргызстане первые результаты по категорной алгебре получил М.Я.Медведев [81], ряд результатов по категорной топологии был получен академиком А.А.Борубаевым, А.А.Чекеевым и их учениками, см. [14]. Вместе с тем, с категорной точки зрения не изучалось такое важное понятие, как уравнение. Поэтому целью настоящей работы является формулировка основных понятий, объектов и морфизмов категории уравнений и ее подкатегорий, установление ее связей с другими категориями и применение этих результатов к расширению класса корректных интегральных уравнений первого рода. При этом используется выявленный в Кыргызстане эффект аналитичности. Поскольку многие обратные задачи описываются интегральными уравнениями первого рода, данная тематика является актуальной.

Для того, чтобы объединить известные подходы, а также включить разработанный в Кыргызстане метод дополнительного аргумента, методы замены переменных, в том числе развитые С.Искандаровым [35], метод преобразования решений, развитый А.Б.Байзаковым [104], мы будем рассматривать объект «уравнение» в наиболее общем виде, как предикат $P(x)$, определенный на некотором множестве $X$, и функцию $B:X\to Y$, и решением уравнения будем называть такое $y\in Y$, что $(\exists x\in X)(P(x)\wedge(y=B(x)))$. Мы будем также рассматривать предикат с параметром $P_2(x,f)$, $f\in F$. Морфизмами в соответствующих категориях *Equa* уравнений и *Equa-Par* уравнений с параметрами и их подкатегориях будем называть такие преобразования уравнений, которые сохраняют решения (или их отсутствие).

Известные условия корректности Ж. Адамара [1, 117, 118] обобщаются следующим образом: если $X$, $F$, $Y$ - топологические пространства, то решение *y* уравнения $\{P_2(x,f),\ B(x)\}$ существует и единственно для любого $f \in F$ и непрерывно зависит от *f* в топологии этих пространств. Таким образом, получаем категорию *Equa-Par-Top*.

Нахождение возможно широких условий для скалярных и векторно-матричных, линейных и нелинейных интегральных уравнений первого рода, являющихся корректными, то есть имеющими устойчивое решение, определяет актуальность данной работы.

**Связь темы диссертации с основными научно-исследовательскими работами**. Диссертация выполнена в рамках проекта «Развитие асимптотических, топологических и аналитических методов и компьютерного моделирования для изучения динамических и управляемых систем, обратных и оптимизационных экономических задач и геофизических процессов» по Институту математики НАН КР, 2015-2017 годы. - № 0007125 - госрегистрация темы. Полученные результаты включены в отчеты по проекту.

**Цель работы.** Построение категории уравнений, с ее объектами и морфизмами и ее подкатегории, включающие в себя как известные типы задач для различных уравнений, так и новые типы математических задач, с использованием эффекта аналитичности - выбор морфизмов, расширяющих класс корректных интегральных уравнений первого рода. Выявление с помощью понятия энтропии классов линейных и нелинейных интегральных уравнений первого рода, являющихся корректными в некоторых пространствах, и построение их решений.

**Методика исследования.** Применяются методы теории категорий, используется эффект аналитичности, выявленный в Институте математики НАН Кыргызской Республики, применяются метод преобразования уравнений, метод преобразования решений, метод преобразования аргумента, методы аналитических функций, теории интегральных уравнений, теории линейных операторов, вычислительные методы, понятие энтропии.

**Научная новизна.** Введено новое общее понятие уравнения и построена категория уравнений, с ее объектами и морфизмами и ее подкатегории, включающие в себя как известные типы задач для различных уравнений, так и новые типы математических задач. Выдвинута и подтверждена гипотеза об энтропии в математических моделях процессов, связанных с передачей энергии. На основе использования эффекта аналитичности, с использованием понятия энтропии построены новые классы корректных линейных и нелинейных интегральных уравнений первого рода с одной, двумя и многими переменными, нелинейных уравнений Гаммерштейна, являющихся корректными в соответствующих пространствах функций, построены приближенные методы для их устойчивого решения. Построены компьютерные программы для устойчивого построения приближенных решений некоторых типов таких уравнений. Обнаружено явление ограниченной вычислительной устойчивости по параметру - шагу сетки.

**Теоретическая и практическая значимость.**

Настоящая работа носит теоретический характер и ее результаты могут способствовать категоризации теории динамических систем, найти применение в общей теории обратных и некорректных задач, в теории интегральных уравнений, способствовать разработке новых методов построения приближенных решений корректных задач. Полученные результаты можно использовать для построения приближенного решения обратных задач математической физики. Построенное программное обеспечение с соответствующими модификациями можно использовать для приближенного решения различных интегральных уравнений первого рода, причем обнаруженное явление ограниченной вычислительной устойчивости будет косвенно подтверждать корректность таких уравнений.

**Основные положения диссертации, выносимые на защиту.**

Новое общее понятие уравнения и уравнения с параметром;

Построение элементов категории уравнений, с ее объектами и морфизмами и ее подкатегорий, включающих в себя как известные типы задач для различных уравнений, так и новые типы математических задач;

Гипотеза о том, что обратные задачи к математическим задачам, описывающим увеличение математического аналога энтропии в ограниченном (компактном) объекте, являются некорректными;

Построение экспонент дифференциальных операторов в частных производных, дающих решения многомерного уравнения теплопроводности с обратным временем;

Построение классов интегральных линейных уравнений и нелинейных уравнений Гаммерштейна первого рода, являющихся корректными в некоторых классах аналитических функций;

Построение классов линейных и нелинейных интегральных уравнений первого рода для функций нескольких переменных, являющихся корректными в некоторых классах аналитических функций;

Построение программного обеспечения для устойчивого решения конкретных линейных и нелинейных интегральных уравнений первого рода.

**Личный вклад соискателя.**

Цели и задачи исследования диссертационной работы определены научным руководителем Г.М. Кененбаевой. В диссертацию включены материалы, которые принадлежат автору.

**Апробация работы.** Результаты работы докладывались на

- V Международной научной конференции "Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике", посвященной 85-летию академика М. Иманалиева, г. Бишкек (сентябрь 2016);
- III Международной научной конференции "Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений", приуроченной к юбилею профессора А. Керимбекова, г. Бишкек (июнь 2017) [115].

**Публикации по теме диссертации.** Основные результаты диссертации опубликованы в работах [6]-[12]. В совместных работах [6], [7], [8] постановка задачи принадлежит научному руководителю, а получение основных результатов – автору. В совместной работе [11] постановка задачи принадлежит научному руководителю, обсуждение результатов - соавтору, а получение оценок – автору.

**Структура, объем и краткое содержание диссертации.** Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, четырех глав, выводов, списка использованных источников из 130 наименований и приложений - программ и результатов расчетов. Нумерация разделов – тройная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер раздела, третья – на порядковый номер в разделе.

В первой главе приведены обзор работ, примыкающих к данной работе, и дополнительные результаты, используемые в работе.

Во второй главе вводится категория уравнений $Equa$: $Ob(Equa)$ - наборы $\{ X, Y \in Ob(Set)$, предикат $P(x)$ на $X$, преобразование $B{:}X\to Y\}$. Решение уравнения $\{X, Y, P, B\}$ - такое $y\in Y$, что $(\exists x\in X)(P(x)\wedge(y=B(x))$. $Mor(Equa)$ - это такие преобразования наборов $\{X, Y, P, B\}$, что решения сохраняются.

Предлагаются следующие подкатегории категории $Equa$:

- категория уравнений для функций $Equa\text{-}Func$: $Ob(Equa\text{-}Func)$ - наборы $\{ X \in Ob(Func), Y \in Ob(Func)$, предикат $P(x)$ на $X$, преобразование $B{:}X\to Y\}$. $Mor(Equa\text{-}Func)$ - преобразования, сохраняющие решения, в том числе преобразования аргумента;

- категория уравнений для функций $Equa\text{-}Fun$ с непрерывными обобщенными предикатами $Ob(Equa\text{-}Top)$ - наборы $\{ X, Y \in Ob(Top)$, функция $P(x)$ на $X$, принимающая конечный набор значений, из них одно выделенное «истина», преобразование $B{:}X\to Y\}$, при условии, что при непрерывном переходе в $X$ по функция $P(x)$ меняет значения только на соседние$\}$;

- категория уравнений $Equa\text{-}Top$ с непрерывными обобщенными предикатами $Ob(Equa\text{-}Top)$ - наборы $\{ X, Y \in Ob(Top)$, функция $P(x)$ на $X$, принимающая конечный набор значений, из них одно выделенное «истина», преобразование $B{:}X\to Y\}$, при условии, что при непрерывном переходе в $X$ по функция $P(x)$ меняет значения только на соседние$\}$;

- категория уравнений с параметрами *Equa-Par*. *Ob(Equa-Par)* - наборы *{*непустые множества *X, F, Y,* предикат *P(x,f)* на $X\times F$, преобразование $B:X\rightarrow Y\}$.

Решением уравнения $\{X, F, Y, P, B\}$ для любого $f\in F$ будем называть такое $y(f)\in Y$, что $(\exists x\in X)(P(x,f)\wedge(y=B(x))$.

- категория корректных уравнений с параметрами *Equa-Par-Top: Ob(Equa-Par-Top)* - наборы $\{X, F, Y \in Ob(Top)$, предикат $P(x,f)$ на $X\times F$, непрерывное преобразование $B:X\rightarrow Y\}$. При этом 1) $(\forall f\in F)(\exists! y\in Y)(\exists x\in X)(P(x,f)\wedge(y=B(x))$;

2) значение $y$ непрерывно зависит от значения $f$.

Далее, исходя из известной формулы (см. например, [44], [87])

$$u(T,x) = exp(aT\Delta)\varphi(x) = \frac{1}{\left(2\sqrt{Ta\pi}\right)^n}\int_{\boldsymbol{R}^n} exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4aT}\right)\varphi(\xi)d\xi \qquad (0.1)$$

для решения уравнения теплопроводности в многомерном пространстве, вида

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = -a\Delta u(t,x), (t,x)\in\boldsymbol{R}_{++}\times\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}},\ a>0 \qquad (0.2)$$

с начальным условием

$$u(0,x) = \varphi(x),\ x\in\boldsymbol{R}^n, \qquad (0.3)$$

где $\varphi(z)\in A_{n+\nu}$ и принимает вещественные значения при вещественных значениях аргумента, доказаны

Т е о р е м а 0.1. Если функция $f(x):\boldsymbol{R}^n\rightarrow\boldsymbol{R}$ - целая аналитическая экспоненциального типа по своим переменным с вещественными коэффициентами, то существует такое же целое аналитическое решение

$$w(x) = J_n{}^{-1}(x; f(s):s) = \left(\frac{b}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} exp\left(-\frac{1}{4b}\Delta\right)f(x)$$

интегрального уравнения первого рода

$$J_n(x; w(s):s) := \int_{\boldsymbol{R}^n} exp(-b|x-\xi|^2)w(\xi)d\xi = f(x). \qquad (0.4)$$

Оно устойчиво по $f(x)$ в пространстве $A_{n+\nu}$.

Т е о р е м а 0.2. Если 1) выполняются условия Теоремы 0.1; 2) $(\forall x\in\boldsymbol{R})(f(x)\in\boldsymbol{R}_{++})$; 3) $(\forall k\in\boldsymbol{N})(|f^{(2k)}(x)|\leq 2bk\,|f^{(2k-2)}(x)|)$, то решение уравнения (0.4) положительно.

В третьей главе рассмотрено уравнение

$$J(x; w(s): s) := \int_{-\infty}^{\infty} exp(-b(x-\xi)^2) w(\xi) d\xi = f(x), \tag{0.5}$$

с решением

$$w(x) = \sqrt{\frac{b}{\pi}} exp\left(-\frac{1}{4b}\frac{d^2}{dx^2}\right) f(x), \tag{0.6}$$

а также уравнения, полученные преобразованиями из него. Эти преобразования можно рассматривать, как морфизмы в категории *Equa-Par-Top.*

Т е о р е м а 0.3. Если 1) выполняются условия Теоремы 0.2;
2) $(\forall x \in \boldsymbol{R})(f(x) \in \boldsymbol{R}_{++})$; 3) $(\forall k \in \mathbf{N})(|f^{(2k)}(x)| \leq 2bk\, |f^{(2k-2)}(x)|)$,
то решение уравнения (3.1.1) положительно.

Преобразование решения: в уравнении

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x, \xi, w(\xi)) d\xi = f(x) \tag{0.7}$$

делается подстановка $w(x)= W(x, u(x))$, и вводится обозначение $K_1(x, \xi, u) \coloneqq K\big(x, \xi, W(\xi, u)\big)$, получается интегральное уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_1(x, \xi, u(\xi)) d\xi = f(x), \tag{0.8}$$

которое является корректным, если (0.7) - корректное.

Преобразование аргументов. В уравнении (0.7) сделаем подстановку $\xi = H(\eta)$, где функция $H(\eta)$ - аналитическая, вещественная и возрастающая для $x \in \boldsymbol{R}$, $H(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}$, введем новую неизвестную функцию $u(\eta) = w(H(\eta))$ и функцию $K_3(x, \eta, u) \coloneqq K(x, H(\eta), u)H'(\eta)$. Тогда получаем уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_3(x, \eta, u(\eta)) d\eta = f(x), \tag{0.9}$$

которое является корректным, если (0.7) - корректное. Также новые уравнения получаются при замене вида $x=\varphi(z)$.

Композиция интегральных ядер. Если интегральные уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x, \xi, w(\xi)) d\xi = f(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} M(x, \xi, w(\xi)) d\xi = f(x)$$

являются корректными в некотором классе аналитических функций, то уравнение $\int_{-\infty}^{\infty} K\left(x, \xi, \int_{-\infty}^{\infty} M(\xi, \eta, w(\eta)) d\eta\right) d\xi = f(x)$ также является корректным в этом классе аналитических функций.

Корректность уравнений с интегральными ядрами, представимыми в виде сумм. Если $|\lambda|$ достаточно мало, то уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(exp(-b_1(x-\xi)^2) + \lambda exp(-b_2(x-\xi)^2)\right) w(\xi) d\xi = f(x). \qquad (0.10)$$

является корректным, наряду с (0.4).

Построен алгоритм для приближенного решения таких уравнений. Обнаружено явление ограниченной вычислительной устойчивости по параметру - шагу сетки.

Если $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq \mathbf{0}$, $f_1(x), f_2(x)$ - целые аналитические функции экспоненциального типа,

Т е о р е м а 0.4. Если $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq \mathbf{0}$, $f_1(x), f_2(x)$ - целые аналитические функции экспоненциального типа, то уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} K_{11}(x-\xi) & K_{12}(x-\xi) \\ K_{21}(x-\xi) & K_{22}(x-\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1(\xi) \\ w_2(\xi) \end{pmatrix} d\xi = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}, \qquad (0.11)$$

где $K_{jk}(x) = a_{jk} \exp(-b_k x^2)$, $j, k = 1, 2$, $b_{jk} > 0$, является корректным и имеет решение.

В четвертой главе рассмотрено уравнение для функций от двух аргументов

$$J_2(x_1, x_2; w(s_1, s_2): s_1, s_2) := \qquad (0.12)$$

$$:= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-b\left(\left(x_1 - \xi_1\right)^2 + \left(x_2 - \xi_2\right)^2\right)\right) w\left(\xi_1, \xi_2\right) d\xi_1 d\xi_2 = f(x_1, x_2),$$

а также связанные с ним.

Найдены условия, при которых уравнение с общей квадратической функцией:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-K(x, y, p, q)\right) w(p, q) dp dq = f(x, y), \qquad (0.13)$$

$$K(x,y,p,q)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+2a_{13}xp+2a_{14}xq+a_{22}y^2+2a_{23}yp+$$
$$+2a_{24}yq+a_{33}p^2+2a_{34}pq+a_{44}q^2 \qquad (0.14)$$

является корректным.

Также рассмотрено общее уравнение (0.4) в развернутом виде

$$J_n(x_1,x_2,\dots,x_n;w(s_1,s_2,\dots,s_n):s_1,s_2,\dots,s_n):=$$
$$:=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}exp\left(-b\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\xi_i\right)^2\right)w\left(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\right)d\xi_1 d\xi_2\dots d\xi_n=$$
$$=f(x_1,x_2,\dots,x_n)\,. \qquad (0.15)$$

Т е о р е м а 0.5. Если $n\times n$-матрицы $U=\{u_{kj}: k,j=1..n\}$, $V=\{u_{kj}: k,j=1..n\}$ - невырожденные, то уравнение вида (0.15) с ядром

$$exp\left(-b\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}u_{kj}x_j-\sum_{j=1}^{n}v_{kj}\xi_j\right)^2\right)$$

является корректным.

В приложениях приведены программы с подпрограммами на языке pascal и результаты расчетов.

С точки зрения теории категорий, можно сказать, что в данной работе расширена подкатегория «корректных уравнений» категории «уравнений» и выявлен ряд морфизмов этой подкатегории.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук Кененбаевой Гулай Мекишовне за постановку задачи, постоянное внимание к работе и обсуждение результатов.

# ГЛАВА 1
# ВВОДНАЯ ГЛАВА

В данной главе дается краткий обзор литературы по теме диссертации, и приводятся некоторые результаты, используемые в работе и заимствованные из других источников. Для единообразия, обозначения в некоторых работах заменены.

## 1.1. Необходимые сведения из теории категорий

Определение 1.1.1. Категория $K$ задаётся

1) Совокупностью объектов $Ob(K)$ (будем обозначать их буквами $A$, $B$, $C$);

2) Совокупностью морфизмов $Mor(K)$ (будем обозначать их буквами $f$, $g$, $h$, . ..);

3) Операциями $dom$ и $cod$, которые сопоставляют каждому морфизму $f$ некоторые объекты $dom(f)$ и $cod(f)$ (они называются началом и концом $f$). Тот факт, что $dom(f) = A$ и $cod(f) = B$, изображается так $f : A \to B$. В этом случае говорят, что $f$ – морфизм из $A$ в $B$.

4) Операцией композиции, которая по каждой паре морфизмов $f$ и $g$, таких, что $cod(f) = dom(g)$, выдаёт некоторый морфизм $g \circ f{:}A \to C$ (она называется композицией $g$ и $f$).

5) Операцией $I$, которая по каждому объекту $A$ выдаёт некоторый морфизм $I_A{:}A \to A$ (он называется тождественным или единичным морфизмом объекта $A$).

Совокупность всех морфизмов из $A$ в $B$ в категории $K$ обозначается $K(A, B)$.

При этом должны выполняться следующие условия:

1. Ассоциативность композиции. Для любой тройки морфизмов $f, g, h, f{:}A \to B;\ g{:}B \to C;\ h{:}C \to D$ выполнено равенство $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

2. Свойства тождества. Для любого морфизма $f : A \to B$ выполнены равенства $f \circ I_A = f$, $I_B \circ f = f$.

П р и м е ч а н и е. С теоретико-множественной точки зрения совокупность всех множеств не является множеством - это приводит к противоречиям. Условно говорится, что «она слишком велика». То же относится и к совокупности преобразований множеств и другим совокупностям в различных разделах математики.

О п р е д е л е н и е 1.1.2. Категория $K$ называется локально малой, если $K(A, B)$ является множеством для любых $A$ и $B$.

О п р е д е л е н и е 1.1.3. Категория $K$ называется малой, если $Mor(K)$ (то есть, объединение всех $K(A, B)$) является множеством.

О п р е д е л е н и е 1.1.4. Морфизм $f : A \to B$ называется изоморфизмом, если существует морфизм $g : B \to A$ со свойствами $g \circ f = I_A$, $f \circ g = I_B$ . Такой морфизм $g$ называется обратным к $f$.

О п р е д е л е н и е 1.1.5. Объекты $A$ и $B$ называются изоморфными, если между ними есть изоморфизм. Это обозначается $A \sim= B$ (транзитивное отношение).

Основными категориями, из которых строятся все остальные, являются следующие:

Категория множеств *Set*. *Ob(Set)* - непустые множества, *Mor(Set)* – функции, отображающие одни множества в другие.

Категория функций (операторов, преобразований, отображений). Она упоминается в литературе, но для нее не введено обозначения, и мы не нашли ее формального описания. Мы предлагаем *Func*. *Ob(Func) = Mor(Set)*, *Mor(Func)* – преобразования функций. В свою очередь, подкатегории этой категории используются в различных разделах математики. Мы будем рассматривать аналитические функции.

Категория топологических пространств *Top*. *Ob(Top)* - топологические пространства, *Mor(Top)* - непрерывные отображения.

Понятия из этой категории используются, в том числе, для определения корректности задач, в том числе в категории уравнений, которую мы предлагаем в настоящей работе, и ее подкатегории - интегральных уравнений.

Изучение топологических пространств с использованием методов теории категорий известно, как категорная топология.

Категория равномерных пространств *Unif*. *Ob(Unif)* - равномерные пространства, *Mor(Unif)* - равномерно непрерывные отображения.

### 1.2. Определения «эффекта» и «явления». Эффект аналитичности

В [46], [121] введены следующие рамочные определения для наиболее общей математической ситуации: если объект $x$ из множества $X$ имеет свойство $A$, то он имеет и свойство $B$, то есть свойство $A$ является «достаточным» для свойства $B$. Для того, чтобы доказать, что свойство $A$ является «существенным» для наличия свойства $B$, нужно построить пример объекта, у которого нет свойства $A$ и нет свойства $B$.

Но если у объекта нет свойства $B$, то у него должны быть какие-то другие свойства. Эти свойства, если они «необычные» и «существенно новые», и было предложено взять за наиболее общее определение понятия «явление».

О п р е д е л е н и е 1.2.1. «Явлением» $P$ называется свойство некоторого «обособленного» класса объектов из $X$, для которых не выполняется свойство $B$ (если класс $X$ представляет собой множество и в нем можно ввести меру, то «явление» – это такое свойство, которое выполняется на множестве меры нуль, то есть «почти никогда»)

Также предложено следующее.

О п р е д е л е н и е 1.2.2. «Эффектом» свойства $A$ можно назвать свойство $E$ объектов $x \in X$, имеющих свойство $A$, но такое, что логическое доказательство $A \Rightarrow E$ очень сложно и свойство $E$ было обнаружено не путем логического вывода, а при попытке доказать другое утверждение (контрпример), путем эксперимента (как в естественных науках) или путем вычислительного эксперимента.

В тех случаях, когда свойство $E$ противоречит интуиции, его еще называют «парадоксом».

Далее, Г.М.Кененбаева показала, что различные математические результаты, которые в свое время были неожиданными даже тех, кто их обнаружил, являются следствиями нескольких известных «эффектов» - бесконечности, синергетического, сингулярных возмущений. На основе анализа ряда работ по дифференциальным и разностным уравнениям [2], [71]-[78], [106], [116], [119], [126] она сделала вывод о существовании «эффекта аналитичности»: некоторые задачи на поиск функций являются некорректными: большие изменения искомых непрерывных функций могут приводить к малым изменениям заданных функций – нарушается третье условие Ж.Адамара (см. ниже раздел 1.3), а при дополнительном предположении аналитичности функций такие задачи становятся корректными. На основании этого эффекта Г.М.Кененбаева выдвинула гипотезу о том, что существуют также классы интегральных уравнений, являющиеся некорректными, а в некоторых классах аналитических функций такие уравнения становятся корректными. В нашей совместной статье [6] эта гипотеза была подтверждена (см. ниже раздел 1.7).

## 1.3. Определения корректности задач для операторных уравнений и способы их решения

В 1920-е годы Ж. Адамар дал общее определение корректности математической задачи (приводим его с заменой метрического пространства на топологическое).

Многие математические задачи приводятся к поиску неизвестного элемента $z$ из операторного уравнения вида

$$Az=f, \tag{1.3.1}$$

где $A$ – непрерывный оператор, действующий из топологического пространства $Z$ в топологическое пространство $U$, $f \in U$ – заданный элемент.

О п р е д е л е н и е 1.3.1. Задача поиска решения уравнения (1.3.1) называется **корректной по Адамару** на паре пространств *(Z,U),* если выполнены следующие условия.

1) Для любого заданного элемента $f \in U$ существует элемент $z \in Z$ такой, что

выполняется (1.3.1).

2) Элемент $z$ по заданному элементу $f$ определяется однозначно, т.е. является единственным.

3) Для любой окрестности $V_f \subset U$ элемента $f$ существует окрестность $V_z \subset Z$ элемента $z$ такая, что для любого элемента $z_1 \in V_z$ будет $Az_1 \in V_f$.

Если нарушается одно из условий корректности по Адамару, то задача (1.3.1) называется «**некорректной по Адамару**».

Если $A$ – интегральный оператор, то (1.3.1) называется **интегральным уравнением первого рода.** Если $Z$ и $U$ – линейные пространства, то в зависимости от свойства оператора $A$ уравнения вида (1.3.1) подразделяются на **линейные** и **нелинейные.** Если нелинейный оператор $A$ нетривиально представим в виде суперпозиции $A=PF,$ где $P$ – линейный оператор, $F$ – нелинейный оператор, то нелинейное уравнение вида (1.3.1) называется **уравнением типа Гаммерштейна.**

Обычно в некорректных задачах нарушается третье условие корректности, т.е. малое изменение правой части приводит к сколь угодно большим изменениям решения.

В начале сороковых годов 20-го века на важность некорректно поставленных задач обратил внимание А.Н.Тихонов [96]. Он привел реальные физические задачи, которые сводятся к некорректно поставленным задачам. Он ввел условие, которое сейчас называется условием **корректности по Тихонову:** известно, что решение (1.3.1) существует и принадлежит известному компактному множеству. Он доказал следующий результат:

Т е о р е м а 1.3.1 (Тихонова): Если $Z$ – компактное пространство и оператор $A$ – инъективный, то обратное отображение $A^{-1}\colon A(Z) \to Z$ также непрерывно.

А.Н.Тихонов также разработал методы приближенного вычисления $z$ при приближенно известном $f$ в линейном случае [101]. Он предложил общий прием – рассмотрение вместо уравнения (1.3.1) другого уравнения с участием параметра $\alpha$, переходящего при $\alpha=0$ в уравнение (1.3.1) – метод регуляризации.

В дальнейшем в работах М.М. Лаврентьева, В.К. Иванова и других исследователей были систематически изучены линейные некорректные уравнения и некоторые нелинейные операторные уравнения. Некорректные уравнения типа Гаммерштейна рассматривались в работах S.George и [129], где накладывались очень ограничительные условия, в том числе – наличие производной типа Фреше у оператора $A$, имеющей обратный оператор, и в работах А.Саадабаева, где накладывалось условие, что этот оператор – сжимающий. Ряд авторов изучали нелинейные интегральные уравнения типа Вольтерра первого рода, В.А. Лукьяненко [78] – уравнения типа свертки.

М.М. Лаврентьев [49] назвал задачи, в которых выполняются условия А.Н. Тихонова: априорно известно существование решения и его принадлежность известному компактному множеству – «условно-корректными задачами» или «корректными по Тихонову задачами».

## 1.4. Дополнительные сведения по теории аналитических функций и методу рядов

Аналитическая функция называется целой, если она определена и регулярна на всей конечной плоскости [23], [110]-[111]. Мы будем рассматривать в работе только целые функции.

Мы будем рассматривать представления аналитических функций в виде ряда Маклорена (нам достаточно будет - в начале координат)

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k. \qquad (1.4.1)$$

Вводится обозначение $M(r) = \max\{|f(z)|: |z| = r\}$.

Если существуют такие $r_0>0$ и $m>0$, что

$$(\forall r > r_0)(M(r) < \exp(r^m)), \qquad (1.4.2)$$

то функция $f(z)$ называется функцией конечного порядка; точная нижняя грань чисел $m$, удовлетворяющих (1.4.2), называется порядком функции.

Если для функции $f(z)$, имеющей порядок $m$, существуют такие $r_0>0$ и $a>0$, что

$$(\forall r > r_0)(M(r) < \exp(ar^m)), \tag{1.4.3}$$

то говорится, что функция $f(z)$ имеет конечный тип при порядке $m$; точная нижняя грань чисел $a$, удовлетворяющих (1.4.3), называется типом функции. Если тип ненулевой и конечный, то он называется нормальным.

Целая функция порядка 1 и нормального типа называется целой функцией экспоненциального типа.

Далее, [83] вводится некоторая целая функция экспоненциального типа $L(z)$ с простыми нулями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$

Т е о р е м а 1.4.1 [83]. Если $lim\{|\lambda_k|^{-1} ln|L'(\lambda_k)|: k \to \infty\} = +\infty$, то любую целую функцию $f(z)$ можно представить во всей плоскости сходящимся рядом вида

$$f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v \exp(\lambda_v z). \tag{1.4.4}$$

Отсюда следует, что для линейных операторов, действующих в пространстве целых функций, достаточно рассматривать их действие на экспоненты, что мы будем использовать в дальнейшем.

## 1.5. Эффект аналитичности для дифференциальных уравнений

Различные типы начальных задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами записываются в виде абстрактного линейного дифференциально-операторного уравнения

$$u'(t)=Au(t),\ t \in \boldsymbol{R}_+, \tag{1.5.1}$$

где линейный оператор $A: U \to U$, $U$ - бесконечномерное линейное топологическое пространство, с начальным условием

$$u(0)=u_0. \tag{1.5.2}$$

Задача (1.5.1)-(1.5.2) имеет формальное решение

$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k u_0.$ (1.5.3)

Если этот ряд сходится, то его сумма названа в [82] обобщенной экспонентой: $u(t) = exp(At)u_0$.

Насколько известно, впервые эта методика была применена к уравнению теплопроводности с обратным временем в [72], [106], где $U$ - пространство целых аналитических функций (от одной переменной) экспоненциального типа. В данной работе эта методика применена к многомерному уравнению теплопроводности с обратным временем.

## 1.6. Дополнительные сведения по теории интегральных уравнений

Линейным интегральным уравнением Фредгольма второго рода называется уравнение

$$u(t) = \lambda \int_{\Omega} K(t,s)u(s)ds + f(t), \ \ t \in \Omega, \tag{1.6.1}$$

где $\Omega \subset R$, $K(t,s) \in C(\Omega \times \Omega)$, $f(t) \in C(\Omega)$ – заданные функции, $u(t)$ – неизвестная функция, $\lambda \in \boldsymbol{R}$ – числовой параметр.

Во всей работе будем предполагать, что заданные функции – непрерывные или аналитические.

Если $f(t) \equiv 0$, то уравнение (1.4.1) называется **однородным интегральным уравнением**, и имеет вид

$$u(t) = \lambda \int_{\Omega} K(t,s)u(s)ds, \ \ t \in \Omega. \tag{1.6.2}$$

Если искомая функция в интегральном уравнении содержится только под интегралом, то интегральное уравнение называется **интегральным уравнением первого рода**

$$\int_{\Omega} K(t,s)u(s)ds = f(t), \ \ t \in \Omega. \tag{1.6.3}$$

Вводится линейный оператор

$$Au(t) = \int_{\Omega} K(t,s)x(s)ds, \ \ \ t \in \Omega. \tag{1.6.4}$$

Ядро $K(t,s)$ называется **симметрическим** ядром, если выполняется условие $K(t,s)=K(s,t)$.

Ядро *K(t,s)* называется **положительным** (в интегральном смысле), если для любой функции *u(t)* выполняется условие

$\int_{\Omega}\int_{\Omega} K(t,s)u(t)u(s)dtds \geq 0$.

Если это неравенство – строгое, то ядро называется **положительно определенным**.

Число $\lambda$ называется **характеристическим значением** ядра *K(t,s)*, если однородное интегральное уравнение (1.6.2) имеет ненулевое решение, и это ненулевое решение называется **собственной функцией** ядра *K(t,s)*.

Две функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ называются **ортогональными**, если их скалярное произведение равно нулю, т.е. $\int_{\Delta} \varphi_1(t)\,\varphi_2(t)dt = 0$.

Функция $\varphi_1(t)$ называется **нормированной**, если $\int_{\Omega} \varphi_1^2(t) = 1$.

Вводятся **коэффициенты Фурье** по формулам

$u_k = \int_{\Omega} u(s)\varphi_k(s)ds,\ k\in\mathbf{N}$.

## 1.7. Известные работы, где доказано существование решений интегральных уравнений первого рода

Во многих работах развивается и обобщается методика доказательства следующей теоремы.

Т е о р е м а 1.7.1. Если *M(x,s)* и *f(x)* – гладкие функции, (выполняются дополнительные условия) *f(0)=0* и $M(x,x)\neq 0$, то уравнение типа Вольтерра первого рода

$$\int_0^x M(x,s)\,u(s)ds = f(x) \qquad (1.7.1)$$

имеет непрерывное решение.

Такие теоремы доказываются дифференцированием, приводящим их к эквивалентным уравнениям типа Вольтерра второго рода, например

$$M(x,x)u(x) + \int_0^x \frac{\partial M(x,s)}{\partial x} u(s)ds = f'(x). \qquad (1.7.2)$$

Для уравнений типа свертки известна

Т е о р е м а 1.7.2 [114]. Если существуют преобразования Фурье для заданных функций $f(x) \in L_2(R)$, $K(x) \in L_1(R)$ и они удовлетворяют условиям $\Phi f(\cdot)(\xi) \in L_2(R)$, $\Phi K(\cdot)(\xi) \in L_2(R)$, $(\Phi K(\cdot)(\xi))^{-1} \Phi f(\cdot)(\xi) \in L_2(R)$,

то уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-s)\, u(s) ds = f(x) \qquad (1.7.3)$$

имеет решение, которое записывается в виде

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \big(\Phi K(\cdot)(\xi)\big)^{-1} \Phi f(\cdot)(\xi) e^{i\xi x} d\xi \in L_2(R).$$

Имеют место [6]

Т е о р е м а 1.7.3. Если функция $f(x)$ - целая аналитическая экспоненциального типа, то существует целое аналитическое решение интегрального уравнения первого рода

$$Jw(\cdot)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} exp(-b(x-s)^2)\, w(s) ds = f(x). \qquad (1.7.4)$$

Это решение выражается формулой

$$w(x) = J^{-1} f(\cdot)(x) := \sqrt{\frac{b}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(4b)^k} f^{(2k)}(x). \qquad (1.7.5)$$

Такое же явление имеет место для класса уравнений вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \exp(-b_k (x-s)^2) y(s) ds = f(x),$$

где $b_k > 0, \lambda_1 \neq 0, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|$ достаточно малы.

## 1.8. Известные работы, где предполагается существование решений операторных и интегральных уравнений первого рода

Для полноты обзора упомянем и такие работы, где априорно предполагается, что уравнение (1.3.1) имеет решение и нужно его приближенно найти каким-либо устойчивым способом.

Для случая, когда пространства $Z$ и $U$ – линейные, полные, со скалярным произведением (гильбертовы), и оператор $A$ – линейный, известны следующие методы для уравнения (1.3.1).

Т е о р е м а 1.8.1. Если оператор $A$ – положительный, то существует обратный оператор $(\alpha I+A)^{-1}$и $\|(\alpha I+A)^{-1}\|\leq \alpha^{-1}$.

На этом основано построение регуляризующего оператора Лаврентьева:

Для уравнения вида (1.3.1) рассматривается регуляризующее уравнение

$$\alpha z_\alpha + A z_\alpha = f. \tag{1.8.1}$$

Соответственно, регуляризующий оператор имеет вид

$$\boldsymbol{L}_\alpha = (\alpha I + A)^{-1} \tag{1.8.2}$$

и решение уравнения (1.8.1) представимо в виде

$$z_\alpha = (\alpha I + A)^{-1} f. \tag{1.8.3}$$

Если оператор $A$ – не обязательно положительный, то используется тот факт, что оператор $A^*A$ – положительный. Уравнение (1.3.1) заменяется на

$$A^*Az = A^*f. \tag{1.8.4}$$

Регуляризующее уравнение

$$\alpha z_\alpha + A^*Az_\alpha = A^*f. \tag{1.8.5}$$

Соответственно, регуляризующий оператор имеет вид

$$\boldsymbol{T}_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1} A^* \tag{1.8.6}$$

- регуляризатор Тихонова, и для уравнения вида (1.8.5) соответственно получается

$$z_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1} A^*f. \tag{1.8.7}$$

В работах А.Н. Тихонова введен особый функционал и доказано, что элемент, минимизирующий этот функционал, является приближенным решением уравнения (1.8.1). В литературе (см. например [49]) дано определение понятия регуляризующего оператора и способы его построения.

Оператор $R_\alpha\colon U \to Z$ называется регуляризирующим оператором, если он удовлетворяет условию:

$$(\forall z \in Z_1)\ (\lim_{\alpha\to 0} R_\alpha A z = z) \tag{1.8.8}$$

по топологии пространства $Z$.

Основной задачей в некорректно поставленных задачах является построение регуляризирующего оператора. Некорректно поставленные задачи исследовались в работах А.Н.Тихонова [97]-[99], М.М.Лаврентьева, В.К. Иванова [26]-[28], [33]-[34] и их учеников. Такие задачи для интегральных уравнения первого рода исследовались в работах А.Н.Тихонова [100]-[103], М.М. Лаврентьева, В.К. Иванова [29]-[32], А.Б.Бакушинского [15]-[17], М.И. Иманалиева [36], А.С. Саадабаева [89]-[91], В.Я.Арсенина [3]-[5] и других авторов [21]-[22], [40], [65]-[67], [92].

Ряд авторов, в том числе А.Асанов [113] изучали такие задачи для нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра первого рода:

$$\int_0^t K\big(t,s,x(s)\big)ds = u(t),\ \ t \in [0,1].$$

В.А. Лукьяненко [123] изучал уравнения типа свертки:

$$\int_0^1 K(s)\, N(t - x(s))ds = u(t),\ \ t \in [0,1].$$

П р и м е ч а н и е. При дополнительных краевых условиях к уравнению теплопроводности применялся метод [54].

## 1.9. Известные результаты по операторному уравнению Гаммерштейна первого рода

В этом разделе $Z$ и $U$ – гильбертовы пространства.

В [76] рассматривается уравнение вида

$$AFz=f, \tag{1.9.1}$$

где $A{:}Z\to U$ – линейный оператор, $F{:}\ Z\to Z$ – нелинейный монотонный оператор, при условиях:

1) оператор $F$ – имеет производную Фреше, т.е. существует такой оператор $F'{:}\ Z\times Z\to Z$, линейный по второму аргументу, что для любых $z_0\neq z\in Z$ будет $\frac{\|Fz-Fz_0-F'(z_0,z-z_0)\|}{\|z-z_0\|}\to 0$ при $||z-z_0||\to 0.$

2) существует оператор $\Phi(z,z_0,v){:}\ Z\times Z\times Z\to Z$ такой, что $F'(z,v) - F'(z_0,v)\equiv F'(z_0,\Phi(z,z_0,v));\ ||\ \Phi(z,z_0,v)||\le C_0||v||\cdot||\ z-z_0||.$

3) Оператор $F'(z,v)$ имеет ограниченный обратный по второму аргументу.

При этих и других предположениях осуществлена регуляризация уравнения (1.9.1) и получены оценки для скорости сходимости построенных последовательностей.

А.Саадабаев [89] рассмотрел уравнение вида

$$Az=f+AFz, \tag{1.9.2}$$

где $A:Z\to U$ – линейный положительный оператор, $F: Z\to Z$ – нелинейный сжимающий оператор. При этих предположениях он доказал, что решение регуляризованного уравнения

$$\alpha z_\alpha+Az_\alpha=f+AFz_\alpha , \tag{1.9.3}$$

которое переписывается в виде $z_\alpha=(\alpha I+A)^{-1} (f+AFz_\alpha)$, дает регуляризующий оператор для уравнения (1.9.2).

В [39] к интегральному уравнению типа Гаммерштейна применен метод усреднения.

## 1.10. Вспомогательные результаты о решении операторных и алгебраических уравнений с аналитическими функциями

Утверждения, эквивалентные следующим результатам, очевидно, доказывались или неявно использовались в различных работах. Мы приводим его здесь для удобства ссылок.

Л е м м а 1.10.1. Если для линейных операторов $F:A\to A$ и $G:A\to A$ будет $||F^{-1}||\cdot||G||<|\lambda|^{-1}$, то уравнение

$$Fx+\lambda Gx=f \tag{1.10.1}$$

имеет решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перепишем (1.10.1) в виде

$$x =H(x):=F^{-1}(f-\lambda Gx). \tag{1.10.2}$$

Имеем: $||H(x_1)-H(x_2)|| =||F^{-1}(f-\lambda Gx_1)-F^{-1}(f-\lambda Gx_2)||= |\lambda|\cdot|| F^{-1}Gx_1-F^{-1}Gx_2||\le$
$\le|\lambda|\cdot|| F^{-1}G(x_1-x_2)||\le|\lambda|\cdot|| F^{-1}G||\cdot||x_1-x_2||\le|\lambda|\cdot|| F^{-1}||\cdot||G||\cdot||x_1-x_2||$.

$|\lambda|\cdot|| F^{-1}||\cdot||G||<|\lambda|\cdot|\lambda|^{-1}=1.$

Следовательно, уравнение (1.10.2) имеет решение в силу принципа сжимающих отображений. Отсюда следует существование решения и у уравнения (1.10.1).

Л е м м а 1.10.2. Если 1) функция $w(x) \in A_{+v}$,

2) функция $W(x,u)$ - аналитическая по своим аргументам,

3) функция $W(x,u)$ является строго монотонной по второму аргументу в области вещественных чисел,

4) $(\forall x \in \boldsymbol{R})\ (W(x,\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R})$,

то решение $u(x)$ уравнения

$$W(x,u(x))= w(x) \qquad (1.10.3)$$

существует, единственно и является аналитической функцией.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не умаляя общности, будем считать $W(x,u)$ монотонно возрастающей по второму аргументу, иначе можно перейти к уравнению $-W(x,u(x))= -w(x)$. .

Зафиксируем некоторое $t_0 \in \boldsymbol{R}$ и обозначим через $z_0 \in \boldsymbol{R}$ решение уравнения $W(t_0,z)= g(t_0)$. Оно существует в силу условий 1) и 3), единственно в силу условия 2).

По заданному числу $\varepsilon$ обозначим

$g_+ := W(t_0 ,z_0+\varepsilon)>g(t_0)$, $g_- := W(t_0 ,z_0-\varepsilon)<g(t_0)$,

$h :=min\{g_+ - g(t_0) , g(t_0) - g_-\}$.

Найдем такое $q_\varepsilon>0$, что в силу непрерывности

$(|t-t_0|<q_\varepsilon) \Rightarrow ( | M(t,z_0+\varepsilon) -M(t_0, z_0+\varepsilon)|<h /3)$;

$(|t-t_0|<q_\varepsilon) \Rightarrow ( | M(t,z_0-\varepsilon) -M(t_0, z_0-\varepsilon)|<h /3)$;

$(|t-t_0|<q_\varepsilon) \Rightarrow ( | g(t) -g(t_0)|<h /3)$.

Тогда при $|t-t_0|<q_\varepsilon$ получаем:

$W(t_0,z_0+\varepsilon) - h /3 \geq W(t_0,z_0)+h - h /3= W(t_0,z_0)+2 h /3$;

$W(t_0,z_0-\varepsilon)+ h /3 \leq W(t_0,z_0) -h + h /3= W(t_0,z_0) -2 h /3$;

$g(t) \in [W(t_0,z_0) - h /3,\ W(t_0,z_0)+ h /3]$.

Отсюда $W(t,z_0-\varepsilon)<g(t) <W(t,z_0+\varepsilon)$.

Следовательно, $z_0-\varepsilon<z(t) <z_0+\varepsilon$.

Теорема доказана.

Обозначим решение уравнения (1.10.1) через $z(t)=W^{-1}(t,g(t))$.

Л е м м а 1.10.4. 1) Если выполняется условие М), то для любого $a\in\boldsymbol{R}_{++}$ существует такая строго возрастающая непрерывная функция $Q$: $\boldsymbol{R}_{++}\to\boldsymbol{R}_{++}$, что из $g_1, g_2\in[-a,a]$ следует $|W^{-1}(t,g_1)-W^{-1}(t,g_2)|\le Q(|g_1-g_2|)$.
2) Если также выполняется условие М1: существует такое $L>0$, что
$|W(t,z_1)-W(t,z_2)|\ge L|z_1-z_2|$, то можно взять $Q(h)=L^{-1}h$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не умаляя общности, будем считать $g_1<g_2$. Обозначим $h:=g_2-g_1$. Из предыдущей теоремы следует, что существуют такие непрерывные функции $Z(t, g_1)$ и $P(t, g_1,h)>0$, что

$W(t, Z(t, g_1))= g_1$ и $W(t, Z(t, g_1)+P(t, g_1,h))= g_1+h$.

Можно обозначить $Q(h)=min\{P(t, g_1,h): (t, g_1)\in[0,1]\times[-a,a]\}>0$.

Если выполняется условие М1, то имеем: $|g_1-g_2|\ge L|z_1-z_2|$,
откуда сразу следует выражение для $Q(h)$.

Лемма доказана.

Л е м м а 1.10.5. Если $W_\zeta(t,z)\in C([0,1]\times\boldsymbol{R})$, $||W_\zeta(t,z)-W(t,z)||_C\le\zeta$ и выполняется условие М1, то из $W_\zeta(t,z_\zeta)=W(t,z)$ следует $|z_\zeta-z|\le L^{-1}\zeta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства $|W(t,z_1)-W(t,z)|\ge L|z_1-z|$ следует, что при $|z_1-z|>L^{-1}\zeta$ будет
$|W_\zeta(t,z_1)-W(t,z)|\ge|W(t,z_1)-W(t,z)|-|W_\zeta(t,z_1)-W(t,z_1)|\ge L|z_1-z|-\zeta>\zeta-\zeta=0,$
то есть $W_\zeta(t,z_1)\ne W(t,z)$.

Лемма доказана.

## 1.11. Необходимые сведения и гипотезы об энтропии

Это понятие имеет ряд определений, в том числе

О п р е д е л е н и е 1.11.1 (см. например [69]). **Энтропия** $H$ - это функция состояния **термодинамической системы**, определяющая меру необратимого рассеивания энергии. Ее изменение определяется согласно формуле

$$\Delta H=\sum\frac{\Delta Q}{\Theta}, \qquad (1.11.1)$$

где $\Delta Q$ - количества переданной тепловой энергии или энергии, необратимо перешедшей в тепловую, $\Theta$ - абсолютные температуры, при которых происходят передачи или превращения энергии; суммирование производится по всем процессам, происходящим в системе одновременно.

При передаче тепла внутри системы правая часть соотношения (1.11.1) содержит как положительные, так и отрицательные слагаемые (каждая передача от одного тела к другому дает два слагаемых с разными знаками), при переходе других видов энергии в тепло (что рассматривается в настоящей работе) - только положительные слагаемые.

На основании многих экспериментов, доказывающих, что тепло переходит от более теплых компонент системы к более холодным, но не наоборот, и исследования математических моделей различных процессов с различными видами энергии, которые можно формализовать, общепринятой является

Гипотеза 1.11.1 (второй закон термодинамики). В замкнутых системах (в которых нет обмена энергией с окружающей средой) изменение $\Delta H$ энтропии может быть только положительным (приращение энтропии).

Эта гипотеза уточнена в [122] для передачи энергии при обработке информации и в [79] для оптимизации передвижения за ограниченное время: имеется физическая замкнутая система, в данный момент она находится в стационарном состоянии $A$ и есть возможность перехода в другое стационарное состояние $B$.

Гипотеза 1.11.2. Существует такой отрезок времени $T_0$ (адиабатическое время системы), зависящий только от начального состояния системы, что для любого $T<T_0$ приращение энтропии $\Delta H$ в системе не меньше некоторой положительной величины при любом переходе от состояния $A$ к состоянию $B$ за время $T$. Существует также такая константа $C_0$, что $\Delta H \geq \frac{C_0}{T^2}$ (размерность $C_0$ – масса × длина × длина / температура).

На основе анализа явления «иргөө»: если поместить в вибрирующий выпуклый сосуд большое количество (абсолютно твердых) шаров различных размеров, сделанных из одного материала, то через некоторое время самый большой шар окажется наверху посередине, в [120] введено

О п р е д е л е н и е 1.11.2. Диссипативная система – это такая система, имеющая достаточно большое количество возможных состояний и переходов между ними, что энтропия входящей энергии значительно меньше энтропии выходящей энергии. Таким образом, внутренняя энтропия уменьшается, что эквивалентно возникновению упорядоченности. (На основе результатов настоящей работы следует добавить: система должна быть полностью ограниченной (компактной); внешняя энергия вводится ограниченно по мощности, но неограниченно по времени).

Для одномерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = -a\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}, (t,x) \in \boldsymbol{R}_{++} \times \boldsymbol{R},\ a > 0, \tag{1.11.1}$$

если рассматривать функцию $u(t,x) > 0$, как абсолютную температуру, для объёмной плотности скорости генерации энтропии в [18] выведена формула (с изменением обозначений)

$$\sigma = \lambda\left(\frac{\partial(\ln u(t,x))}{\partial x}\right)^2, \lambda = const > 0.$$

Для соответствующей разностной схемы на ограниченном участке в [124] выведена формула

$$\sigma = -\lambda\sum_{i=1}^{k}(u_{i+1} - u_i)\left(\frac{1}{u_{i+1}} - \frac{1}{u_i}\right), \lambda = const > 0.$$

## 1.12. Определения, связанные с приближенным решением задач о непрерывных объектах на дискретных вычислительных устройствах

При строгой (математической) постановке задачи на поиск непрерывного объекта (функции вещественной переменной, фигуры, кривой), ответ, данный дискретным вычислительным устройством - компьютером (результат работы программы), может

- заведомо совпадать с истинным;

- иметь гарантированную связь с истинным (в тех случаях, когда истинный ответ нельзя изобразить средствами компьютера);
- иметь нестрогую (статистическую) связь с истинным.

Строгие доказательства теорем для непрерывных объектов на компьютере (в том числе и найденных по предыдущему методу) можно неформально подразделить следующим образом:
- дающие истинные результаты - эвристически-логические методы; символьные преобразования (включая символьное дифференцирование, интегрирование); точные вычисления (с целыми числами и построенными из них объектами);
- обеспечивающие гарантированную связь с истинными результатами - разработанные, в том числе в Кыргызстане доказательные вычисления [80] («далил боло алуучу эсептөө», «validating computations», «reliable computations»).

Как и другие комбинированные человеко-машинные методы, этот метод содержит схемы (предназначенные для человека) сведения различных задач к нескольким стандартным и алгоритмы (для компьютера) решения этих задач.

Вследствие того, что основной объект математического анализа - вещественное число - не имеет конструктивных представлений, точные результаты для непрерывных объектов (функций, геометрических фигур) можно получить на компьютере только в особых случаях. Это и вызвало развитие приближенных методов, которые имеют такие широкие приложения к практическим задачам.

Для более точной формулировки результатов вычислений мы предлагаем следующее определение, обобщающее известные понятия вычислительной математики (см. например [62]):

Пусть имеется метрическое пространство $\{G,\rho\}$, набор конечных множеств $\{M_k{:}k\in \mathbf{N}\}$ и набор отображений-**интерпретаций** $\{F_k\in M_k\to G{:}\ k\in \mathbf{N}\}$ .

О п р е д е л е н и е 1.12.1. Некоторый способ (алгоритм) получения последовательности $\{Z_k\in M_k{:}\ k\in \mathbf{N}\}$ будем называть **абсолютно вычислите-**

**льно устойчивой аппроксимацией** объекта $Z \in G$, если

$$lim\ \{\rho(Z, F(Z_k)): k \to \infty\} = 0. \tag{1.12.1}$$

Практически для описания вычислительных алгоритмов в качестве множеств $M_k$ берут не конечные, а конечномерные пространства вещественных чисел или векторов (хотя вещественное число не имеет конструктивных представлений), в качестве отображений $F$

- сплайн-функцию или кусочно-линейную функцию по элементам $Z_k$, если они интерпретируются, как значения искомой функции в некоторых точках;
- сумму отрезка ряда Фурье или Тейлора по элементам $Z_k$, если они интерпретируются, как коэффициенты ряда, представляющего искомую функцию.

Отмеченное явление в литературе иногда называется вычислительной устойчивостью, хотя мы считаем, что наша формулировка более точная, поскольку реальная вычислительная устойчивость должна учитывать вычислительные погрешности. Известно множество случаев, когда соотношение (1.12.1) формально выполняется, но реальные вычисления с конечной точностью дают результаты, заведомо далекие от истинного при любых значениях параметров, см. например [68].

В теоретических исследованиях отмеченный недостаток (наличие только статистической связи между точным и приближенным результатом) дает возможность применять вычислительные методы только для эвристического поиска закономерностей, которые потом устанавливаются дедуктивно.

Для формулировки теорем доказательных вычислений используются построения конструктивного математического анализа. В нем в рамках введены определения односторонне псевдовычислимого числа как предела ограниченной монотонной алгоритмически заданной последовательности рациональных чисел и конструктивно устойчивого предиката, обобщающие свойства, называемые в различных разделах математики «грубость».

О п р е д е л е н и е 1.12.2 [80]. **Доказательные вычисления** – это вычисления, организованные таким образом, что полученные (числовые) результаты, интерпретируемые, как континуальные множества, гарантированно содержат истинные.

Соответственно, в Определении 1.12.1 значениями функции $F_k$ должны быть не элементы, а (ограниченные) множества пространства $G$, и основное предельное соотношение (1.12.1) - иметь вид

$Z \in F(Z_k), \lim \{diam\, F(Z_k): k \to \infty\}=0.$

Практически полученные на компьютере результаты представляются в виде наборов рациональных (или, более узко, **машинных вещественных** - непосредственно представимых в компьютере в силу его конструкции, по терминологии программирования) чисел.

Для сочетания математической строгости и удобства работы на компьютере был разработан **интервальный анализ** ([125] и многие последующие публикации, например [112]).

О п р е д е л е н и е 1.12.3. **Интервальным числом** (ниже коротко – **интервалом**) называется замкнутый отрезок $A=[a_- , a_+]$ (эта терминология несколько расходится с принятой в других разделах математики). Если числа $a_-$ и $a_+$ – машинно представимые, то $A$ называется **машинным интервалом**.

Величина $wid(A) := a_+ - a_-$ называется **шириной** интервала. Шириной интервального вектора называется максимум ширин его компонент.

О п р е д е л е н и е 1.12.4. Если число (или другой объект) $f$ находится в интервале (соответственно в интервальном векторе или другом интервальном объекте) $A$, то $A$ называется **внешним представлением** [112] объекта $f$ (аналогично – **машинным внешним представлением**).

В частности, внешним представлением комплексного числа может быть пара интервалов для его действительной и мнимой частей – **комплексный интервал**. Чем меньше ширина интервального объекта, тем лучшим является внешнее представление.

Над интервалами определены **арифметические действия** (в числе других двуместных и одноместных функций) по формуле

$F(X,Y) = [\, min \{f(x,y): x \in X, y \in Y\}; max \{f(x,y) : x \in X, y \in Y\}].$

Если результат арифметического действия над границами машинных интервалов не является машинным числом, то для обеспечения доказательности нижние границы интервалов округляются с недостатком, а верхние – с избытком.

Над интервалами также производятся действия: **пересечения** двух интервалов (если оно не пусто), **внешнего представления** двух интервалов, **разбиения** интервала на два.

Основным преимуществом интервального анализа является то, что действия только над границами интервалов (конечным набором чисел) дают гарантированный результат (теорему) о бесконечных множествах чисел или других объектов, находящихся в этих границах, причем такие действия легко выполнить на компьютере. Если такие интервалы (интервальные векторы) образуют конечное покрытие заданной компактной области, то вычисления по их границам доказывают теорему о всех точках этой области.

О п р е д е л е н и е 1.12.5. Алгоритм, который по любому (машинному) интервалу $X$, входящему в область $G \subset \boldsymbol{R}$ определения функции $f\colon G \to \boldsymbol{R}$, дает такой (машинный) интервал $F$, что

F1) из $x \in X$ следует $f(x) \in F(X)$ {*внешнее представление*};

F2) из $X_1 \subset X_2$ следует $F(X_1) \subset F(X_2)$ {*монотонность по вложению*};

F3) (для любых интервалов) $lim \{ F(X): X \to [x, x] \} = [f(x), f(x)]$ {*точечность*}; для машинных интервалов $F([x, x])$ должен быть достаточно узким,

называется **(машинным) интервальным расширением** функции $f$.

Аналогично определяется интервальное расширение функции нескольких переменных.

При программировании последовательности вида $\{Z_k\}$ обычно вводится малый параметр (например, шаг сетки) или большой параметр (например, количество шагов). Не умаляя общности, будем считать, что такими параметрами являются $(1/k)$ и $k$. Будем также считать, что множества $\{M_k\}$ составлены из машинных чисел. Из вычислительной практики следует

О п р е д е л е н и е 1.12.6. Некоторый алгоритм получения последовательности $\{Z_k \in M_k: k \in \mathbf{N}\}$ будем называть **вычислительно устойчивой аппроксимацией** объекта $Z \in G$, если $\rho(Z, F(Z_k))$ уменьшается и становится достаточно малым с увеличением $k$, пока малый параметр не становится близким к разности соседних машинных чисел. (Соответственно - **доказательно устойчивой аппроксимацией**, если $diam\ F(Z_k)$ уменьшается и становится достаточно малым с увеличением $k$).

По нашему опыту, возможны случаи, когда неустойчивая вычислительная схема применительно к корректной задаче дает сначала сходимость, а потом - расходимость. Поэтому мы предлагаем

О п р е д е л е н и е 1.12.7. Некоторый алгоритм получения последовательности $\{Z_k \in M_k: k \in \mathbf{N}\}$ будем называть **ограниченно вычислительно устойчивой аппроксимацией** объекта $Z \in G$, если $\rho(Z, F(Z_k))$ уменьшается и становится достаточно малым с увеличением $k$, но потом увеличивается, при этом малый параметр не становится близким к разности соседних машинных чисел.

Такое явление найдено в данной работе, см. Приложения.

### 1.13. Заключение по Главе 1

В этой главе приводятся определения «эффекта» и «явления» в математике, описан используемый в работе эффект аналитичности. Также приводятся различные определения корректности для операторных и интегральных уравнений первого рода, произведен обзор известных результатов, из которого следует, что ранее не были найдены широкие классы корректных интегральных уравнений первого рода. Проведен обзор результатов по понятию «энтропия», из него следует, что ранее были получены отдельные результаты, но не были выведены наиболее широкие соотношения, связывающие физические свойства энтропии и свойства математических моделей замкнутых ограниченных систем.

Изложены необходимые для дальнейшего сведения по теории аналитических функций, методу рядов, операторных и алгебраических уравнений.

Произведен обзор понятий, связанных с применением и устойчивостью вычислений, предложено определение нового явления: ограниченной вычислительной устойчивости.

# ГЛАВА 2.
# КАТЕГОРИЯ УРАВНЕНИЙ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ И РАЗНОСТНЫМ УРАВНЕНИЯМ

## 2.1. Определение категории уравнений и ее подкатегорий

В различных разделах теории динамических систем рассматриваются дифференциальные, интегральные, разностные, а также интегро-дифференциальные и другие типы уравнений, с начальными, краевыми условиями и другой дополнительной информацией, в различных функциональных пространствах (см. например [13], [38], [41], [43], [64], [86]. Для единообразного представления таких задач, а также для более систематического применения и обобщения известных методов предлагается применить подход теории категорий.

Категорию уравнений будем обозначать *Equa*.

О п р е д е л е н и е 2.1.1. $Ob(Equa)$ - наборы $\{$непустые множества $X, Y,$ предикат $P(x)$ на $X,$ преобразование $B{:}X\to Y\}$.

Решением уравнения $\{X, Y, P, B\}$ будем называть такое $y\in Y$, что $(\exists x\in X)(P(x)\wedge(y=B(x)))$.

В частности, если $B$ - тождественное отображение, то получаем только задачу решения уравнения *“$P(x)$”*.

$Mor(Equa)$ - это такие преобразования наборов $\{X, Y, P, B\},$ что решения (или их отсутствие) сохраняются.

Примеры морфизмов:

П р и м е р 2.1.1. Преобразование исходного множества. Множество $X$ заменяется на множество $X_1$ такое, что $\{x\in X{:}\ P(x)\}= \{x\in X_1{:}\ P(x)\}$.

П р и м е р 2.1.2. Преобразование решения. Вводится биективная функция $\varphi{:}X\to X$. Задача $\{X, Y, P, B\}$ преобразуется к решению уравнения “$P(\varphi(z)),\ z\in X$” и вычислению $y=B(\varphi(z))$.

П р и м е р 2.1.3. Преобразование уравнения. Вводится такой предикат $P_1$, что либо $\{x \in X: P(x)\} = \{x \in X: P_1(x)\}$, либо (более общий, но более сложный метод) $\{x \in X: P(x)\} \subset \{x \in X: P_1(x)\}$. В последнем случае должна быть изменено преобразование *B* так, чтобы отбрасывать решения из $\{x \in X: P_1(x)\} \setminus \{x \in X: P(x)\}$.

Подкатегории категории *Equa*.

Категория уравнений для функций *Equa-Func*.

О п р е д е л е н и е 2.1.2. *Ob(Equa-Func)* - наборы $\{ X \in Ob(Func), Y \in Ob(Func)$, предикат $P(x)$ на $X$, преобразование $B: X \to Y\}$. *Mor(Equa-Func)* - преобразования, в том числе следующие: кроме общих Примеров 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3,

П р и м е р 2.1.4. Преобразование аргумента. Для функции $x(t)$ вводится биективная замена $t=\psi(s)$, обозначается $z(s)=x(\psi(s))$ из нового пространства функций $Z$ и вводится предикат $P_1$, такие, что $\{x \in X: P(x)\} = \{z \in Z: P_1(z)\}$.

Категория уравнений с непрерывными обобщенными предикатами.

О п р е д е л е н и е 2.1.3. *Ob(Equa-Top)* - наборы {топологические пространства $X, Y$, функция - обобщенный предикат $P(x)$ на $X$, принимающая конечный набор значений, из них одно выделенное «истина», преобразование $B: X \to Y\}$, при условии, что при непрерывном переходе в $X$ по функция $P(x)$ меняет значения только на соседние}. (Такую функцию предлагается называть обобщенно-непрерывной).

*Mor(Equa-Top)* - ретракты топологического пространства $X$ так, что сохраняется область со значением «истина».

Простой пример такого определения:

П р и м е р 2.1.5. Функция $P(x)$ принимает значения, соседние следующим образом: «минус»-«истина»-«плюс». Если пространство $X$ связно, то

$((\exists x \in X)(P(x)=«минус») \wedge (\exists x \in X)(P(x)=«плюс»)) \Rightarrow (\exists x \in X)(P(x)=«истина»)$.

Более сложный пример - компьютерная реализация принципа ненулевого вращения на плоскости с помощью интервального анализа [45]

П р и м е р 2.1.6. Функция *P(x)* принимает значения, по квадрантам координатной плоскости, соседние следующим образом:

```
II        –        I
    \           /
|       истина      |
    /           \
III       –        IV
```

Каждый переход против часовой стрелки дает (+1), по часовой стрелке - (–1). Если обход по некоторому замкнутому контуру не дает значений «истина» и дает ненулевую сумму (кратную 4), то внутри контура существует точка $x_0$, где P($x_0$)=«истина».

Для уравнений с параметрами предлагается

О п р е д е л е н и е 2.1.4. *Ob(Equa-Par)* - наборы {непустые множества $X$, $F$, $Y$, предикат $P(x,f)$ на $X\times F$, преобразование $B:X\to Y$}.

Решением уравнения $\{X, F, Y, P, B\}$ для любого $f\in F$ будем называть такое $y(f)\in Y$, что $(\exists x\in X)(P(x,f)\wedge(y=B(x))$.

В частности, если $B$ - тождественное преобразование, то получаем только задачу решения уравнения *"P(x,y)"*.

*Mor(Equa-Par)* - это такие преобразования наборов $\{X, Y, P, B\}$ (кроме $F$), что решения (или их отсутствие) сохраняются.

Для корректных уравнений с параметрами предлагается

О п р е д е л е н и е 2.1.5. *Ob(Equa-Par-Top)* - наборы {топологические пространства $X$, $F$, $Y$, предикат $P(x,f)$ на $X\times F$, непрерывное преобразование $B:X\to Y$}.

При этом

1) $(\forall f\in F)(\exists! y\in Y)(\exists x\in X)\ (P(x,f)\wedge(y=B(x))$;

2) $y$ непрерывно зависит от $f$.

*Mor(Equa-Par-Top)* - преобразования, сохраняющие свойства 1) и 2).

В частности, если предикат записывается в виде $P(x,f)$ = " $A(x)=f$ ", где $A$ - некоторый оператор, то получаем «корректность по Адамару».

П р и м е ч а н и е. Обычно под словом «параметр» понимается «числовой параметр». В данном определении это понятие используется более широко - корректность по различным объектам, всходящим в условие задачи, как это было предложено в [70].

Подкатегорией всех упомянутых категорий является категория корректных уравнений для функций с параметрами, которую можно обозначить *Equa-Func-Par-Top.*

Рассмотрим, в каких случаях можно надеяться на корректность интегрального уравнения первого рода.

Если динамическая система - решение начальной задачи с начальным условием в виде функции $\varphi$ (параметра по Определению 2.1.5) для дифференциального уравнения - является сглаживающей, то это можно рассматривать, как увеличение энтропии. Соответственно, если ее решение записывается в виде $x=J(\varphi)$, где $J$ - вполне непрерывный интегральный оператор, то получаем обратную задачу, как интегральное уравнение первого рода

$$J(\varphi)=x. \tag{2.1.1}$$

Известно, что обратный оператор к вполне непрерывному оператору не может быть ограниченным в линейном случае, что эквивалентно непрерывности. Таким образом, оператор $J$ не должен быть вполне непрерывным.

Отсюда получаем:

Г и п о т е з а 2.1.1. Если задача для поиска объекта в бесконечном множестве является математической моделью процесса с увеличением величины, соответствующей энтропии, и ограниченным объемом свободной энергии, то обратная задача является некорректной.

Поскольку интегральный оператор с непрерывным ядром на ограниченном отрезке является вполне непрерывным, интегральное уравнение первого рода с таким ядром не может быть корректным. Следовательно, нужно вести поиск корректных интегральных уравнений первого рода на неограниченных областях. Это подтвердилось в дальнейшем.

## 2.2. Корректность решения начальной задачи с обратным временем для уравнения теплопроводности в многомерном пространстве с аналитическими функциями

Используются следующие обозначения:

$A_v$ (для $v>0$) – пространство целых аналитических функций экспоненциального типа с показателем $v$, то есть удовлетворяющих условию: $(\forall f(z)\in A_v)(\exists c>0)(\forall z\in C)(\ |f(z)| < c\ e^{v|z|})$.

Норма в пространстве $A_v$: $||f||_v := sup\{|f(z)|\ e^{-v|z|}: z\in C\}$.

$A_{+v}$ – пространство целых аналитических функций $f(z)$ таких, что в некоторой точке (можно принять – в начале координат) последовательность их производных имеет скорость роста не выше степенного:

$(\forall f(z)\in A_{+v})\ (\exists c>0)(\forall k\in N_0:=\{0,1,2,3\ldots\})(\ |f^{(k)}(0)| \le cv^k)$.

Норма в пространстве $A_{+v}$: $||f||_{+v} := sup\{|f^{(k)}(0)|\ v^{-k}: k\in N_0\}$.

Соответственно, будем обозначать $A_{2v}$ – пространство аналитических функций двух переменных с условием $(\ |f(z,w)| < c\ e^{v(|z|+|w|)})$;

$A_{n+v}$ – пространство аналитических функций $n$ переменных с условием:

$\left|\frac{\partial^{|I|} f(0)}{\partial x^I}\right| < const\cdot v^{|I|}$ с нормой $\|f(x)\|_{n+v} \coloneqq sup\left\{\left|\frac{\partial^{|I|} f(0)}{\partial x^I}\right| v^{-|I|}: I\in N_0^n\right\}$.

В пространстве $A_{n+v}$ норма оператора частного дифференцирования $D$ по одной из переменных (не умаляя общности, будем считать - по первой переменной). Временно введем обозначение «единичного» мультииндекса $E:=(1,0,\ldots,0)$.

$$\|Df(x)\|_{+vn} = \left\|D\sum\left\{\frac{1}{I!}D^I f(0)x^I: I\in N_0^n\right\}\right\|_{n+v} =$$

$$= \left\|\sum\left\{\frac{1}{I!}D^I f(0)i_1 x^{I-E}: I\in N_0^n, I\neq E\right\}\right\|_{n+v} =$$

$$= \left\|\sum\left\{\frac{1}{(I-E)!}D^I f(0)x^{I-E}: I\in N_0^n, I\neq E\right\}\right\|_{n+v} =$$

$$= \left\| \sum \left\{ \frac{1}{I!} D^{I+E} f(0) x^I : I \in N_0^n \right\} \right\|_{n+v} =$$

$$= sup\left\{ \frac{1}{I!} |D^{I+E} f(0)| v^{-|I|} : I \in N_0^n \right\} \le sup\left\{ \|f\|_{+vn}\, v^{|I+E|} v^{-|I|} : I \in N_0^n \right\} =$$

$$= \|f\|_{n+v} v.$$

Таким образом, операторная норма

$$\|D\|_{n+v} \le v. \qquad (2.2.1)$$

Ограниченность оператора дифференцирования в пространстве $A_{n+\nu}$ и обеспечивает корректность ряда задач, которые являются некорректными в других пространствах.

Рассмотрим многомерное уравнение теплопроводности с обратным временем в $\boldsymbol{R}^n$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = -a\Delta u(t,x), (t,x) \in \boldsymbol{R}_{++} \times \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}},\ a > 0 \qquad (2.2.2)$$

с начальным условием

$$u(0,x) = \varphi(x),\ x \in \boldsymbol{R}^n, \qquad (2.2.3)$$

где $\varphi(z) \in A_{n+\nu}$ и принимает вещественные значения при вещественных значениях аргумента.

Формальный ряд для решения. Будем искать решение (2.2.2)-(2.2.3) в виде

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) t^k, \qquad (2.2.4)$$

где $u_k(x)$ – искомые целые аналитические функции. (Сходимость этого ряда и рядов, получающихся из него дифференцированием по $x$ и по $t$, пока не рассматривается).

Подставляя (2.2.4) в (2.2.3), получаем, что

$$u_0(x) = \varphi(x). \qquad (2.2.5)$$

Подставляя (2.2.4) в (2.2.2) и также формально дифференцируя ряд почленно, получаем

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)kt^{k-1} = -a\sum_{k=0}^{\infty} \Delta u_k(x)t^k$ . (2.2.6)

Заменяя переменную суммирования в левой части ($k-1$ на $k$), имеем $\sum_{k=0}^{\infty} u_{k+1}(x)(k+1)t^k = -a\sum_{k=0}^{\infty} \Delta u_k(x)t^k$.

Приравнивая сомножители при одинаковых степенях $t^k$, получаем соотношения (вместе с (2.2.5))

$$u_{k+1}(x) = -\frac{1}{k+1}a\Delta u_k(x), k\in N_0. \quad (2.2.7)$$

Из оценки (2.2.1) получаем: операторная норма

$$||\Delta||_{n+v}=nv^2. \quad (2.2.8)$$

Т е о р е м а 2.2.1. Если функция $\varphi(z)$ - целая аналитическая экспоненциального типа, то существует целое аналитическое решение задачи (2.2.2)-(2.2.3), которое выражается формулой (следующей из (2.2.7)):

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(-a)^k\Delta^k\varphi(x)t^k = exp(-at\Delta)\varphi(x). \quad (2.2.9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что этот ряд сходится (абсолютно). Для этого построим мажорирующий ряд.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}a^k\left\|\Delta^k\varphi(x)\right\|_{n+v}t^k \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}a^k(nv^2)^k\|\varphi(x)\|_{n+v}t^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(atnv^2)^k\|\varphi(x)\|_{n+v} = \|\varphi(x)\|_{n+v}exp\,(anv^2t).$$

Так же доказывается сходимость рядов, полученных из (2.2.1) дифференцированием. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Для любых $T>0, X>0, Y>0$ существует такая константа $\gamma>0$, что в области $\{(t,x): 0\le t\le T,\ ||x||\le X\}$ $|\Delta u(t,x)|\le\gamma$; для любого $h>0$ будет

$$|u(t+h,x)-(u(t,x)-ah\Delta u(t,x))| \le\gamma h^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о для второй части. Перепишем (2.2.9) в виде

$$u(t,x) = \varphi(x) - a\Delta\,\varphi(x) + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}(-a^2)^k\Delta^k\varphi(x)t^k;$$

$$\left|u(t,x) - \left(\varphi(x) - a\Delta\,\varphi(x)\right)\right| = \left|t^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}(-a^2)^k\Delta^k\varphi(x)t^{k-2}\right|.$$

Т е о р е м а 2.2.2. В условиях Теоремы 2.2.1

$lim\{u(t,x) - (E - at\Delta/m)^m \varphi(x) \colon m \in \boldsymbol{N}\} = 0.$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из того факта, что коэффициенты разложения $(1+1/m)^m$ стремятся к коэффициентам разложения $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ при $m \to \infty$ и имеют тот же знак, а также из абсолютной сходимости ряда (2.2.9).

Рассмотрим более общее уравнение, чем (2.2.2):

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = \Lambda u(t,x), (t,x) \in \boldsymbol{R}_{++} \times \boldsymbol{R}^n, \tag{2.2.10}$$

где $\Lambda$ - линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, с начальным условием (2.2.3).

Аналогично Теоремам 2.2.1 и 2.2.2 доказываются более общие

Т е о р е м а 2.2.3. Если функция $\varphi(z)$ - целая аналитическая экспоненциального типа, то существует целое аналитическое решение задачи (2.2.10)-(2.2.3), которое выражается формулой:

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Lambda^k \varphi(x) t^k = exp(t\Lambda)\varphi(x), \tag{2.2.11}$$

ряд абсолютно сходится.

Т е о р е м а 2.2.4. В условиях Теоремы 2.2.3

$lim\{u(t,x) - (E + t\Lambda/m)^m \varphi(x) \colon m \in \boldsymbol{N}\} = 0.$

Зафиксируем некоторое $T>0$ и обозначим $w(x)=u(T,x)$. Тогда получим в силу известной интегральной формулы для решения уравнения начальной задачи (2.2.3) для уравнения теплопроводности (2.2.2):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\left(2\sqrt{Ta\pi}\right)^n} \int_{\boldsymbol{R}^n} exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4aT}\right) w(\xi) d\xi.$$

Обозначим $b \coloneqq \frac{1}{4aT}, f(x) \coloneqq \left(\frac{\pi}{b}\right)^{\frac{n}{2}} \varphi(x)$. Тогда получим: $T \coloneqq \frac{1}{4ab}$,

$$f(x) = \int_{\boldsymbol{R}^n} exp(-b|x-\xi|^2) w(\xi) d\xi.$$

Отсюда следует

Т е о р е м а 2.2.5. Если функция $f(x) \colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ - целая аналитическая экспоненциального типа по своим переменным с вещественными коэффициентами, то существует такое же целое аналитическое решение интегрального уравнения первого рода

$$J_n(x; w(s): s) = \int_{\boldsymbol{R}^n} exp(-b|x-\xi|^2) w(\xi) d\xi = f(x). \tag{2.2.12}$$

Это решение выражается формулой

$$w(x) = J_n{}^{-1}(x; f(s): s) = \left(\frac{b}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(4b)^k} (-1)^k \Delta^k f(x) =$$

$$= \left(\frac{b}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} exp\left(-\frac{1}{4b}\Delta\right) f(x). \tag{2.2.13}$$

Оно устойчиво по $f(x)$ в пространстве $A_{n+\nu}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставляя в (2.2.9), получаем

$$w(x) = \left(\frac{b}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-a)^k \Delta^k f(x) \left(\frac{1}{4ab}\right)^k =$$

$$= \left(\frac{b}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(4b)^k} \Delta^k f(x).$$

## 2.3. Метод сеток для уравнения теплопроводности с обратным временем на плоскости с аналитическими функциями

Выберем (малый) шаг $h \in \boldsymbol{R}_{++}$.

Введем обозначения: конечно-разностная аппроксимация оператора Лапласа

$$\Delta_h w(x,y) \coloneqq \frac{1}{h^2}(w(x+h,y) + w(x,y+h) + w(x-h,y) +$$

$$+ w(x,y-h) - 4w(x,y+h)),$$

интегральный оператор

$$J_{4h} w(x,y) \coloneqq \frac{1}{2h^2} \int_0^h (h-\eta)^2 \int_{-\eta}^{\eta} \left(\frac{\partial^4 w(x+\xi,y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w(x,y+\xi)}{\partial y^4}\right) d\xi d\eta.$$

Эти операторы являются линейными и коммутативными между собой.

Т е о р е м а 2.3.1. $\Delta \equiv \Delta_h - J_{4h}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перепишем это тождество в виде:

$$h^2\Delta w(x,y) = w(x+h,y) + w(x,y+h) + w(x-h,y) +$$
$$+w(x,y-h) - 4w(x,y+h) -$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^h (h-\eta)^2 \int_{-\eta}^{\eta}\left(\frac{\partial^4 w(x+\xi,y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w(x,y+\xi)}{\partial y^4}\right) d\xi d\zeta. \qquad (2.3.1)$$

Используем следующий факт: тождество ($f(h) \equiv 0$ для всех $h$) эквивалентно равенству $f(0) = 0$ и тождеству ($f'(h) \equiv 0$ для всех $h$).

Очевидно, (2.3.1) выполняется при $h=0$. Дифференцируя (2.3.1) по $h$, получаем, что должно быть

$$2h\Delta w(x,y) = \frac{\partial w(x+h,y)}{\partial x} + \frac{\partial w(x,y+h)}{\partial y} - \frac{\partial w(x-h,y)}{\partial x} - \frac{\partial w(x,y+h)}{\partial y} -$$
$$-\int_0^h (h-\eta) \int_{-\eta}^{\eta}\left(\frac{\partial^4 w(x+\xi,y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w(x,y+\xi)}{\partial y^4}\right) d\xi d\zeta. \qquad (2.3.2)$$

Опять, очевидно, (2.3.2) выполняется при $h=0$. Дифференцируя (2.3.2) по $h$, получаем, что должно быть

$$2\Delta w(x,y) = \frac{\partial^2 w(x+h,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x-h,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x,y+h)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w(x,y-h)}{\partial y^2} -$$
$$-\int_0^h \int_{-\eta}^{\eta}\left(\frac{\partial^4 w(x+\xi,y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w(x,y+\xi)}{\partial y^4}\right) d\xi d\zeta. \qquad (2.3.3)$$

Следующее дифференцирование

$$0 = \frac{\partial^3 w(x+h,y)}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 w(x-h,y)}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w(x,y+h)}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 w(x,y-h)}{\partial y^3} -$$
$$-\int_{-h}^{h}\left(\frac{\partial^4 w(x+\xi,y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w(x,y+\xi)}{\partial y^4}\right) d\xi. \qquad (2.3.4)$$

Это тождество уже очевидно. Теорема доказана.

Для приближенного решения задачи (2.3.2)-(2.3.3) в условиях Теоремы 2.2.1 при $n=2$ – вычисления $u(t,x,y)$ при любых $(x,y) \in \boldsymbol{R}^2$, $t > 0$, выберем $h$ так, что $t$ кратно $h$, и начнем построение разностной схемы:

$u(h,x,y) \approx u(0,x,y)+h\, u_t{}'(0,x,y) = u(0,x,y) - ah\, \Delta u(0,x,y)$.

Далее заменяем $\Delta u(0,x,y)$ приближенно в соответствии с Теоремой 2.3.1, получаем:

$u(h,x,y) \approx u(0,x,y) - ah\ \Delta_h u(0,x,y) = (E - ah\ \Delta_h)\ u(0,x,y) = (E - ah\ \Delta_h)\varphi(x,y)$.

Далее, получаем, учитывая коммутативность всех используемых операторов: $u(2h,x,y) \approx (E - ah\ \Delta_h)\ u(h,x,y) \approx (E - ah\ \Delta_h)^2 \varphi(x,y)$, и т.д.

Выберем некоторое натуральное число $m$ и обозначим $h:=t/m$. Тогда приближенное значение $u(t,x,y) \equiv u(mh,\ x,\ y)$ получается на $m$-м шаге.

Т е о р е м а 2.3.2. При условиях теоремы 2.1.1 следующая разностная схема сходится к решению задачи (2.3.1)-(2.3.2) для любых $(x,y) \in \boldsymbol{R}^2,\ t > 0$ (шаги по $x,\ y$ и по $t$ равны $h:=h_x:=h_t:=t/m$):

$$\lim\{ (E - at\Delta_{t/m}/m)^m \varphi(x,y):\ m\to\infty\} = u(t,x,y). \tag{2.3.5}$$

По смыслу оператора $\Delta_h$ это – разностная схема, то есть она использует значения $\varphi(x,y),\ \varphi\ (x+h,y),\ \varphi(x - h,y),\ \varphi\ (x,y+h),\ \varphi(x,y-h), \varphi(x+2h,y),\ \varphi(x-2h,y)$, ..., и не использует производных от $\varphi(x,y)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим разность

$$|u(t,x,y) - (E - at/m\Delta_{t/m})^m \varphi(x,y)| \le |u(t,x,y) - (E - at/m\Delta)^m \varphi(x,y)| +$$
$$+|(E - at/m\Delta)^m \varphi(x,y) - (E - at/m\Delta_{t/m})^m \varphi(x,y)|. \tag{2.3.6}$$

Первое слагаемое стремится к нулю при $m\to\infty$ в силу Теоремы 2.2.3.

Преобразуем второе слагаемое, используя Теорему 2.3.1 и тождество

$$+|(E - at/m\Delta)^m \varphi(x,y) - (E - at/m\Delta_{t/m})^m \varphi(x,y)| = |(\ at/m\ \Delta)^m \varphi(x,y) -$$
$$(at/m\Delta_{t/m})^m \varphi(x,y)| = (\ at/m)^m |(\Delta + J_{4t/m})^m\ \varphi(x,y) - \Delta^m \varphi(x,y)| =$$

$$= (at/m)^m \left|\sum_{k=1}^m C_m^k \Delta^{m-k} J_{4t/m}^k\ \varphi(x,y)\right| =$$

$$= (at/m)^m \left|J_{4t/m} \sum_{k=1}^m C_m^k \Delta^{m-k} J_{4t/m}^{k-1}\ \varphi(x,y)\right| \le$$

(на ограниченном участке из $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^n$)

$$\le \left(\frac{at}{m}\right)^m \left|\left(\frac{t}{m}\right)^2 \sum_{k=1}^m C_m^k (nv^2)^{m-k} \left(\frac{t}{m}\right)^{2k-2} const\right| \to 0$$

при $m \to \infty$.

Для приближенного решения задачи в однмерном случае – вычисления $u(x,t)$ при любых $x \in R$, $t > 0$, выберем некоторое малое число $h>0$, такое, что $t$ кратно $h$ (для простоты изложения шаги по $t$ и $x$ не различаются), и начнем построение разностной схемы:

$u(x, h) \approx u(x,0)+h\, u_t{}'(x,0) = u(x,0) - ah\, u_{xx}{}''(x,0)$.

Далее заменяем $u_{xx}{}''(x,0)$ приближенно на вторую разделенную разность

$$L_2(h)v(x) := v(x+h) - 2v(x) + v(x-h), u_{xx}{}''(x,0) \approx \frac{1}{h^2} L_2(h)u(x,0),$$

получаем:

$$u(x,h) \approx u(x,0) - ah\frac{1}{h^2}L_2(h)u(x,0) = \left(E - \frac{1}{h}aL_2(h)\right)\varphi(x). \qquad (2.3.7)$$

Далее, получаем, учитывая коммутативность всех используемых операторов: $u(x,nh) \approx \left(E - \frac{1}{h}aL_2(h)\right)^n \varphi(x)$.

Выберем некоторое натуральное число $n$ и обозначим $h:=t/n$. Тогда приближенное значение $u(x, t) \equiv u(x, nh)$ получается на $n$-м шаге.

Т е о р е м а 2.3.3. Следующая разностная схема сходится к решению задачи (2.2.2)-(2.2.3) для любых $x \in \boldsymbol{R}$, $t > 0$ (шаги по $x$ и по $t$ равны $h:=h_x:=h_t:=t/n$):

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(E - \frac{an}{t}L_2\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \varphi(x)\right) = u(x,t). \qquad (2.3.10)$$

По смыслу оператора $L_2$ это – разностная схема, то есть она использует значения $\varphi(x)$, $\varphi(x+h)$, $\varphi(x-h)$, $\varphi(x+2h)$, $\varphi(x-2h)$, ..., и не использует производных от $\varphi(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим разность

$$\left|u(x,t) - \left(E - \frac{1}{h}aL_2(h)\right)^n \varphi(x)\right| \le \left|u(x,t) - \left(E - \frac{at}{n}D_2\right)^n \varphi(x)\right| +$$

$$+\left|\left(E-\frac{1}{h}aL_2(h)\right)^n \varphi(x)-\left(E-\frac{at}{n}D_2\right)^n \varphi(x)\right|. \qquad (2.3.11)$$

Первое слагаемое $U_1$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Второе слагаемое $U_2$ преобразуем с использованием тождества

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + \ldots + b^n)$:

$$U_2=\left|\left(\frac{1}{h}aL_2(h)-\frac{at}{n}D_2\right)\sum_{k=0}^{n-1}\left(E-\frac{1}{h}aL_2(h)\right)^{n-1-k}\left(E-\frac{at}{n}D_2\right)^k \varphi(x)\right|=$$

$$=\frac{a}{h}\left|J_4(h)\sum_{k=0}^{n-1}\left(E-\frac{1}{h}aL_2(h)\right)^{n-1-k}\left(E-\frac{at}{n}D_2\right)^k \varphi(x)\right|. \qquad (2.3.12)$$

Очевидно, что оно также стремится к нулю.

## 2.4. Заключение по Главе 2

В данной главе доказаны результаты о корректности решения задач с обратным временем для уравнения теплопроводности, которые будут использоваться в следующих главах для доказательства корректности интегральных уравнений. Описано построение разностных схем, которые реализованы в работе (см. Приложения).

# ГЛАВА 3
# КОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

## 3.1. Основное уравнение и условия положительности решения

Из результатов п.2.1 следует

Т е о р е м а 3.1.1. Если функция *f(x)*:$\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ - целая аналитическая экспоненциального типа по своим переменным с вещественными коэффициентами, то существует такое же целое аналитическое решение скалярного интегрального уравнения первого рода

$$J(x; w(s): s) = \int_{-\infty}^{\infty} exp(-b(x-\xi)^2)w(\xi)d\xi = f(x). \qquad (3.1.1)$$

Это решение выражается формулой

$$w(x) = J^{-1}(x; f(s): s) = \sqrt{\frac{b}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(4b)^k}(-1)^k f^{(2k)}(x) =$$

$$= \sqrt{\frac{b}{\pi}} exp\left(-\frac{1}{4b}\frac{d^2}{dx^2}\right) f(x). \qquad (3.1.2)$$

Оно устойчиво по *f(x)* в пространстве $A_{+v}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем из (3.1.2)

$$w^{(p)}(x) = \sqrt{\frac{b}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(4b)^k}(-1)^k f^{(2k+p)}(x),\ p \in \boldsymbol{N}_0. \qquad (3.1.3)$$

Отсюда

$$\left|w^{(p)}(0)\right| \leq \sqrt{\frac{b}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(4b)^k}\ \left|f^{(2k+p)}(0)\right| \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{b}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(4b)^k}\|f\|_{+v} v^{2k+p} = \sqrt{\frac{b}{\pi}}\|f\|_{+v}\exp\left(\frac{v^2}{4b}\right)v^p;$$

$$\|w\|_{+v} = \sup\left\{\left|w^{(p)}(0)\right|v^{-p}: p \in \boldsymbol{N}_0\right\} = \sqrt{\frac{b}{\pi}}\|f\|_{+v}\exp\left(\frac{v^2}{4b}\right).$$

Таким образом, обратный оператор ограничен. Его операторная норма

$$\|J^{-1}\|_{+v} \le \sqrt{\frac{b}{\pi}} \exp \frac{v^2}{4b}. \tag{3.1.4}$$

Теорема доказана.

Нам понадобятся оценки норм операторов (3.1.1) и (3.1.2). Для этого преобразуем интеграл (3.1.1).

$$|J(x; w(s): s)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} exp(-b\xi^2) w(x-\xi) d\xi\right| \le$$
$$\le \int_{-\infty}^{\infty} exp(-b\xi^2) \|w\|_v e^{v|x-\xi|} d\xi \le \|w\|_v e^{v|x|} \int_{-\infty}^{\infty} exp(-b\xi^2) e^{v|\xi|} d\xi \le$$
$$\le 2\|w\|_v e^{v|x|} \int_{-\infty}^{\infty} exp(-b\xi^2 + v\xi) d\xi =$$
$$= 2\|w\|_v e^{v|x|} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-b\left(\xi - \frac{v}{2b}\right)^2 + \left(\frac{v}{2b}\right)^2\right) d\xi =$$
$$= 2\|w\|_v e^{v|x|} \sqrt{\frac{\pi}{b}} \exp \frac{v^2}{4b^2}.$$

Отсюда операторная норма $\|J\|_v \le 2\sqrt{\frac{\pi}{b}} \exp \frac{v^2}{4b^2}$.

Далее, используя Лемму 1.3.2, оценим

$$\|J(x; w(s): s)\|_{+v} \coloneqq$$
$$\coloneqq sup\left\{\left|D^k \int_{-\infty}^{\infty} exp(-b\xi^2) w(x-\xi) d\xi\right|_{x=0} v^{-k} : k \in \boldsymbol{N_0}\right\} =$$
$$= sup\left\{\left|\int_{-\infty}^{\infty} exp(-b\xi^2) w^{(k)}(-\xi) d\xi\right| v^{-k} : k \in \boldsymbol{N_0}\right\} =$$
$$= sup\left\{\int_{-\infty}^{\infty} exp(-b\xi^2) v^k \|w\|_{+v} d\xi\, v^{-k} : k \in \boldsymbol{N_0}\right\} =$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{b}} \exp \frac{v^2}{4b^2}\ sup\{\|w\|_{+v} : k \in \boldsymbol{N_0}\} = \sqrt{\frac{\pi}{b}} \exp \frac{v^2}{4b^2} \|w\|_{+v}.$$

Отсюда операторная норма интегрального оператора $J$ будет

$$\|J\|_{+v} \le \sqrt{\frac{\pi}{b}} \exp \frac{v^2}{4b^2}. \tag{3.1.5}$$

Для дальнейшего нам понадобятся достаточные условия положительности решений.

Т е о р е м а 3.1.2. Если 1) выполняются условия Теоремы 3.1.1; 2) $(\forall x \in \boldsymbol{R})(f(x) \in \boldsymbol{R}_{++})$; 3) $(\forall k \in \boldsymbol{N})(|f^{(2k)}(x)| \leq 2bk\, |f^{(2k-2)}(x)|)$,
то решение уравнения (3.1.1) положительно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По индукции, из условия 3) получаем
$(\forall k \in \boldsymbol{N})(|f^{(2k)}(x)| \leq f(x) k! (2b)^k)$, Отсюда

$$|w(x)| \geq \sqrt{\frac{b}{\pi}}\left(f(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!(4b)^k}\left|f^{(2k)}(x)\right|\right) \geq$$

$$\geq \sqrt{\frac{b}{\pi}}\left(f(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!(2b)^k}{k!(4b)^k} f(x)\right) = \sqrt{\frac{b}{\pi}} f(x)\left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\right) = 0.$$

Теорема доказана.

П р и м е р 3.1.1. Рассмотрим уравнение (3.1.1) с $f(x)=ax^2+bx+c,\ a,b,c \in \boldsymbol{R}$. Условие 2) Теоремы: $a>0,\ b^2-4ac<0$.

Условие 3) Теоремы: $(2a < ax^2+bx+c) \Rightarrow (ax^2+bx+c - 2a > 0)$.

Итого: $a>0,\ c>0,\ b^2+8a^2<4ac$.

Т е о р е м а 3.1.3. Если $f(x) = a + \sum_{j=1}^{m} b_j \cos\left(g_j x + h_j\right),\ a > 0,$ и сумма $\sum_{j=1}^{m}\left|b_j\right| exp\left(\frac{1}{4b} {g_j}^2\right) < a$, то решение уравнения (3.1.1) положительно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формула (3.1.2) дает

$$w(x) = \sqrt{\frac{b}{\pi}}\left(a + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(4b)^k}(-1)^k\left(\sum_{j=1}^{m} b_j \cos\left(g_j x + h_j\right)\right)^{(2k)}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{b}{\pi}}\left(a + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(4b)^k} \sum_{j=1}^{m} b_j {g_j}^{2k} \cos\left(g_j x + h_j\right)\right);$$

$$w(x) \geq \sqrt{\frac{b}{\pi}}\left(a - \left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(4b)^k} \sum_{j=1}^{m} b_j {g_j}^{2k}\right|\right) \geq$$

$$\geq \sqrt{\frac{b}{\pi}}\left(a - \sum_{j=1}^{m}\left|b_j\right| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(4b)^k} {g_j}^{2k}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{b}{\pi}}\left(a - \sum_{j=1}^{m}\left|b_j\right| exp\left(\frac{1}{4b} {g_j}^2\right)\right).$$

Теорема доказана.

Нам еще понадобится следующий результат (другой способ получения табличного интеграла). Для $\alpha$=*const*

$$J^{-1}(x; e^{\alpha s}: s) = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(4b)^k} (-1)^k \alpha^{2k} e^{\alpha x} = \sqrt{\frac{b}{\pi}}\, exp\left(-\frac{\alpha^2}{4b}\right) e^{\alpha x}. \tag{3.1.6}$$

Таким образом, все функции $e^{\alpha x}$ являются собственными для интегрального оператора *J*. С использованием (3.1.6) можно вычислять решения для различных правых частей (3.1.1).

П р и м е р 3.1.2: $f(x) = \cos \alpha x = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}\right)$.

$$J^{-1}(x; \cos \alpha s : s) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{\pi}}\left(exp\left(-\frac{(i\alpha)^2}{4b}\right) e^{i\alpha x} + exp\left(-\frac{(-i\alpha)^2}{4b}\right) e^{-i\alpha x}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{b}{\pi}} exp\left(\frac{\alpha^2}{4b}\right) \cos \alpha x.$$

П р и м е р 3.1.3: $f(x) = sh\, \alpha x = \frac{1}{2}(e^{\alpha x} + e^{-\alpha x})$.

$$J^{-1}(x; sh\, \alpha s : s) = \sqrt{\frac{b}{\pi}} exp\left(-\frac{\alpha^2}{4b}\right) sh\, \alpha x.$$

Такие функции тоже являются собственными. Таким образом, собственные функции спектра интегрального оператора *J* имеет несколько непрерывных ветвей.

П р и м е р 3.1.4: $f(x) = x^n, n \in N$. Представим *n* в виде *n=2m+q, q∈0..1.*

$$J^{-1}(x; s^n: s) = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!(4b)^k} (x^{2m+q})^{(2k)} =$$

$$= \sqrt{\frac{b}{\pi}} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k (2m+q)!}{k!(4b)^k (2m-2k+q)!} x^{2m-2k+q}.$$

Из этих примеров следует

Т е о р е м а 3.1.4. Если правая часть уравнения (3.1.1) представима в виде суммы экспонент, гиперболических функций *sh* и *ch*, тригонометрических функций *sin* и *cos* и многочленов, то это уравнение имеет решение и оно представимо в таком же виде.

П р и м е р 3.1.5: $f(x) = e^x x$.

$$J^{-1}(x; e^s s: s) = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(4b)^k} (e^x x)^{(2k)} =$$

$$= \sqrt{\frac{b}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(4b)^k} e^x (x + 2k) = \sqrt{\frac{b}{\pi}}\ e^x x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(4b)^k} +$$

$$+ \sqrt{\frac{b}{\pi}} e^x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k}{k!(4b)^k} = \sqrt{\frac{b}{\pi}}\ e^x x\ exp\left(-\frac{1}{4b}\right) - 2\sqrt{\frac{b}{\pi}} e^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(4b)^{k+1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{b}{\pi}}\ e^x\ exp\left(-\frac{1}{4b}\right)\left(x - \frac{1}{2b}\right).$$

II способ. Представим функцию в виде

$$f(x) = lim_{\alpha \to +0} \frac{e^{x+\alpha x} - e^x}{\alpha}.$$

Тогда имеем:

$$J^{-1}(x; f(s): s) =$$

$$= lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{b}{\pi}}\ exp\left(-\frac{(1+\alpha)^2}{4b}\right) e^{x+\alpha x} - \sqrt{\frac{b}{\pi}}\ exp\left(-\frac{1}{4b}\right) e^x\right) =$$

$$= lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{b}{\pi}} e^x\ exp\left(-\frac{1}{4b}\right)\left(\ exp\left(-\frac{2\alpha+\alpha^2}{4b}\right) e^{\alpha x} - 1\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{b}{\pi}} e^x\ exp\left(-\frac{1}{4b}\right) lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha}\left(\left(1 - \frac{2\alpha+\alpha^2}{4b}\right)(1 + \alpha x) - 1\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{b}{\pi}} e^x\ exp\left(-\frac{1}{4b}\right) lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha}\left(-\frac{2\alpha+\alpha^2}{4b} + \alpha x\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{b}{\pi}} e^x\ exp\left(-\frac{1}{4b}\right)\left(-\frac{1}{2b} + x\right).$$

## 3.2. Расширение класса корректных интегральных уравнений с помощью преобразования функций

(См. Пример 2.1.2).

В уравнении

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x, \xi, w(\xi)) d\xi = f(x) \qquad (3.2.1)$$

сделаем подстановку *w(x)= W(x, u(x)),* где функция *W(x, u)* удовлетворяет условиям Теоремы 1.10.2.

Вводя обозначение $K_1(x, \xi, u) \coloneqq K\big(x, \xi, W(\xi, u)\big)$, получим интегральное уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_1(x, \xi, u(\xi)) d\xi = f(x), \qquad (3.2.2)$$

которое является корректным, если (3.2.1) - корректное.

В соответствии с Определением 2.1.1, уравнение (3.2.2) рассматривается с равенством

$$w(x)= W(x, u(x)). \qquad (3.2.3)$$

В таком виде оно эквивалентно (3.2.1) и также является корректным, в соответствии с Определением 2.1.4.

П р и м е р 3.2.1. Если функция *g(x)* - аналитическая и положительная для $x \in \boldsymbol{R}$, то интегральное уравнение

$$J_1(x; w(s): s) = \int_{-\infty}^{\infty} exp(-b(x-\xi)^2) g(\xi) w(\xi) d\xi = f(x),$$

является корректным.

П р и м е р 3.2.2. Если выполняются условия Теоремы 3.1.2 или 3.1.3, то интегральное уравнение (типа Гаммерштейна)

$$J_5(x; w(s): s) = \int_{-\infty}^{\infty} exp(-b(x-\xi)^2) w^2(\xi) d\xi = f(x)$$

имеет два аналитических решения. В классе положительных аналитических функций это уравнение является корректным.

Данные уравнения будут использоваться для получения более сложных результатов.

### 3.3. Расширение класса корректных интегральных уравнений с помощью преобразования аргументов

В уравнении (3.2.1) сделаем подстановку $\xi = H(\eta)$, где функция $H(\eta)$ - аналитическая, вещественная и возрастающая для $\eta \in \boldsymbol{R}$, $H(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}$.

Получаем уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x, H(\eta), w(H(\eta)))H'(\eta)d\eta = f(x). \qquad (3.3.1)$$

Введем новую неизвестную функцию $u(\eta) = w(H(\eta))$ и функцию $K_3(x, \eta, u) \coloneqq K(x, H(\eta), u)H'(\eta)$.

Тогда уравнение (3.3.1) перепишется в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_3(x, \eta, u(\eta))d\eta = f(x), \qquad (3.3.2)$$

которое является корректным, если (3.2.1) - корректное.

В соответствии с Определением 2.1.1, уравнение (3.3.2) рассматривается с равенством

$$w(x) = u(H^{-1}(x)). \qquad (3.3.3)$$

В таком виде оно эквивалентно (3.2.1) и также является корректным, в соответствии с Определением 2.1.4.

П р и м е р 3.3.1. Положим $H(\eta)=\eta^3$. Тогда уравнение (3.1.1) принимает вид

$$J_4(x; w(s): s) = 3\int_{-\infty}^{\infty} exp(-b(x-\eta^3)^2)\,\eta^2 u(\eta)d\eta = f(x).$$

Данные преобразования будут использоваться для получения более сложных результатов.

В уравнении (3.2.1) сделаем подстановку $x = G(y)$, где функция $G(y)$ - аналитическая, вещественная и возрастающая для $y \in \boldsymbol{R}$, $G(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R}$.

Получаем уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(G(y), \eta, w(\eta))d\eta = f(G(y)), \qquad (3.3.4)$$

которое является корректным, если (3.2.1) - корректное.

## 3.4. Корректность уравнений с композицией интегральных ядер

Из следующего очевидного факта: если операторы $F: A \to A$ и $G: A \to A$ имеют обратные, то оператор $FG: A \to A$ имеет обратный, следует

Т е о р е м а 3.4.1. Если интегральные уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x, \xi, w(\xi))d\xi = f(x),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} M(x,\xi,w(\xi))d\xi = f(x)$$

являются корректными в некотором классе аналитических функций, то уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} K\left(x,\xi,\int_{-\infty}^{\infty} M(\xi,\eta,w(\eta))d\eta\right)d\xi = f(x)$$

также является корректным в этом классе аналитических функций.

В частности, если линейные интегральные уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x,\xi)w(\xi)d\xi = f(x),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} M(x,\xi)w(\xi)d\xi = f(x)$$

являются корректными в некотором классе аналитических функций, то уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x,\xi)w(\xi)d\xi = f(x), \quad H(x,\xi) \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} K(x,\eta)M(\eta,\xi)d\xi$$

также является корректным в этом классе аналитических функций.

П р и м е р 3.4.1. Из (3.1.1) получаем: линейное интегральное уравнение с ядром

$$H(x,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} exp(-p(x-\eta)^2)exp(-q(\eta-\xi)^2)d\eta$$

является корректным в классе аналитических функций.

Преобразуя и применяя таблицу интегралов, получаем

$$H(x,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-(px^2+q\xi^2)+2(px\eta+q\xi\eta) - (p+q)\eta^2\right)d\eta =$$

$$= exp\left(-(px^2+q\xi^2)\right)\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-(p+q)\left(\eta^2 - 2\frac{px+q\xi}{p+q}\eta + \left(\frac{px+q\xi}{p+q}\right)^2 - \left(\frac{px+q\xi}{p+q}\right)^2\right)\right)d\eta =$$

$$= exp\left(-(px^2+q\xi^2)+\frac{(px+q\xi)^2}{p+q}\right)\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-(p+q)\left(\eta-\frac{px+q\xi}{p+q}\right)^2\right)d\eta =$$

$$= exp\left(-\frac{(px^2+q\xi^2)(p+q)-(px+q\xi)^2}{p+q}\right)\sqrt{\frac{\pi}{p+q}} = \sqrt{\frac{\pi}{p+q}}\,exp\left(-\frac{pq(x-\xi)^2}{p+q}\right).$$

Таким образом, здесь композиция разностных ядер приводит также к разностному ядру.

П р и м е р 3.4.2. Из Примера 3.3.1 получаем: если функция *g(x)* - аналитическая и положительная для $x \in \boldsymbol{R}$, то линейное интегральное уравнение с ядром

$$H(x,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} exp(-p(x-\eta)^2)g(\eta)exp(-q(\eta-\xi)^2)d\eta$$

является корректным в классе аналитических функций.

Возьмем $g(x)=1+\beta x+\gamma x^2$, $\beta^2-4\gamma<0$, тогда $g(x)>0$.

Преобразуя и применяя таблицу интегралов, получаем

$$H(x,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-(p+q)\eta^2 + 2(px+q\xi) - (px^2+q\xi^2)\right)(1+\beta\eta+$$

$$+\gamma\eta^2)d\eta = exp\left(-(px^2+q\xi^2)\right)\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-(p+q)\left(\eta^2 - 2\frac{px+q\xi}{p+q}\eta + \left(\frac{px+q\xi}{p+q}\right)^2 - \left(\frac{px+q\xi}{p+q}\right)^2\right)\right)(1+\beta\eta+$$

$$\gamma\eta^2)d\eta = exp\left(-(px^2+q\xi^2) + \frac{(px+q\xi)^2}{p+q}\right)\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-(p+q)\left(\eta - \frac{px+q\xi}{p+q}\right)^2\right)(1+\beta\eta+\gamma\eta^2)d\eta =$$

$$= exp\left(-\frac{(px^2+q\xi^2)(p+q)-(px+q\xi)^2}{p+q}\right)\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty} exp(-(p+q)\eta^2)(1+\beta\left(\eta+\frac{px+q\xi}{p+q}\right)+\gamma\left(\eta+\frac{px+q\xi}{p+q}\right)^2)d\eta =$$

(слагаемые, где $\eta$ входит в первой степени, равны нулю)

$$= exp\left(-\frac{pq(x-\xi)^2}{p+q}\right)\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty} exp(-(p+q)\eta^2)\left(1+\beta\frac{px+q\xi}{p+q}+\gamma\eta^2+\gamma\left(\frac{px+q\xi}{p+q}\right)^2\right)d\eta =$$

$$= exp\left(-\frac{pq(x-\xi)^2}{p+q}\right)\times\left(\left(1+\beta\frac{px+q\xi}{p+q}+\gamma\left(\frac{px+q\xi}{p+q}\right)^2\right)\sqrt{\frac{\pi}{p+q}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{(p+q)^3}}\right).$$

Таким образом, здесь композиция ядер расширяет класс ядер.

Как следствие, получаем:

Т е о р е м а 3.4.1. Если $\beta^2-4\alpha\gamma<0$, то линейное интегральное уравнение с ядром вида

$$H(x,\xi) = exp(-p(x-\xi)^2)(\alpha+\beta(ux+v\xi)+\gamma(ux+v\xi)^2)$$

является корректным в классе положительных аналитических функций.

## 3.5. Корректность уравнений с интегральными ядрами, представимыми в виде сумм

Используем оценки (см. выше)

$$\|J^{-1}\|_{+v} \le \sqrt{\frac{b}{\pi}}\exp\left(\frac{v^2}{4b}\right). \qquad \|J\|_{+v} \le \sqrt{\frac{\pi}{b}}\exp\frac{v^2}{4b^2}.$$

Т е о р е м а 3.5.1. Если $|\lambda|$ достаточно мало, то уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(exp(-b_1(x-\xi)^2)+\lambda exp(-b_2(x-\xi)^2)\right)w(\xi)d\xi = f(x). \quad (3.5.1)$$

имеет решение в пространстве $A_{+v}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применение Леммы 1.8.1 дает условие:

$$|\lambda|\sqrt{\frac{b_1}{\pi}}\exp\left(\frac{v^2}{4b_1}\right)\sqrt{\frac{\pi}{b_2}}\exp\frac{v^2}{4{b_2}^2}<1.$$

Теорема доказана.

Таким образом, интегральные уравнения с ядрами – суммами ядер вида (3.5.1) с достаточно малыми по модулю коэффициентами, кроме первого, будут иметь устойчивые решения при любых правых частях в пространстве $A_{+v}$.

Для построения более широких классов интегральных уравнений можно также пользоваться не малостью, а положительностью - конусностью операторов.

Рассмотрим пример $f(x):=f_0+f_1x+f_2x^2$.

Пусть $\lambda>0$. Будем искать решение в виде $w(x)=w_0+w_1x+w_2x^2$. Перепишем (3.5.1) в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(exp\left(-b_1\xi^2\right)+\lambda exp\left(-b_2\xi^2\right)\right)w(x-\xi)d\xi = f(x). \quad (3.5.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(exp\left(-b_1\xi^2\right)+\lambda exp\left(-b_2\xi^2\right)\right)(w_0+w_1(x-\xi)+w_2(x-\xi)^2)d\xi=$$

$$=f_0+f_1x+f_2x^2.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(exp\left(-b_1\xi^2\right)+\lambda exp\left(-b_2\xi^2\right)\right)(w_0+w_1x+w_2x^2+w_2\xi^2)d\xi=$$

$$=f_0+f_1x+f_2x^2.$$

Используя таблицу интегралов, получаем:

$$\left(\sqrt{\frac{\pi}{b_1}}+\lambda\sqrt{\frac{\pi}{b_2}}\right)(w_0+w_1x+w_2x^2)+\left(\sqrt{\frac{\pi}{{b_1}^3}}+\lambda\sqrt{\frac{\pi}{{b_2}^3}}\right)w_2=$$

$$=f_0+f_1x+f_2x^2.$$

Отсюда $w_2=\frac{f_2}{\left(\sqrt{\frac{\pi}{b_1}}+\lambda\sqrt{\frac{\pi}{b_2}}\right)}; w_1=\frac{f_1}{\left(\sqrt{\frac{\pi}{b_1}}+\lambda\sqrt{\frac{\pi}{b_2}}\right)};$

$$\left(\sqrt{\frac{\pi}{b_1}}+\lambda\sqrt{\frac{\pi}{b_2}}\right)w_0+\left(\sqrt{\frac{\pi}{{b_1}^3}}+\lambda\sqrt{\frac{\pi}{{b_2}^3}}\right)w_2=f_0;$$

$$w_0=\frac{f_0-\frac{f_2}{\left(\sqrt{\frac{\pi}{b_1}}+\lambda\sqrt{\frac{\pi}{b_2}}\right)}\left(\sqrt{\frac{\pi}{{b_1}^3}}+\lambda\sqrt{\frac{\pi}{{b_2}^3}}\right)}{\left(\sqrt{\frac{\pi}{b_1}}+\lambda\sqrt{\frac{\pi}{b_2}}\right)}.$$

Таким образом, получаем при $\lambda>0$:

$$w(x)=\frac{f(x)}{\left(\sqrt{\frac{\pi}{b_1}}+\lambda\sqrt{\frac{\pi}{b_2}}\right)}-\frac{\left(\sqrt{\frac{\pi}{{b_1}^3}}+\lambda\sqrt{\frac{\pi}{{b_2}^3}}\right)f''(x)}{2\left(\sqrt{\frac{\pi}{b_1}}+\lambda\sqrt{\frac{\pi}{b_2}}\right)^2}.$$

## 3.6. Алгоритмы приближенных решений скалярных интегральных уравнений первого рода

Из формулы (3.1.2) получаем

$$w(x)=\sqrt{\frac{b}{\pi}}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{4bn}\frac{d^2}{dx^2}\right)^n f(x). \qquad (3.6.1)$$

Обозначим оператор сдвига на $h$ аргумента функции через $D_h$ .

В свою очередь, аппроксимируя вторую производную через разделенную разность, получим

$$w(x) \approx \sqrt{\frac{b}{\pi}} \left(1 - \frac{1}{4bn} \frac{1}{h^2} (D_h - 2D_0 + D_{-h})\right)^n f(x),$$

где $n \in \boldsymbol{N}$ достаточно велико, и $h \in \boldsymbol{R}_{++}$ достаточно мало.

Из теории приближенных методов для уравнения теплопроводности известно, что (для знака (+) в скобке) этих условий еще недостаточно для получения приемлемых результатов, необходимо согласование $n$ и $h$. Поэтому в изучаемом случае были рассмотрены различные согласования.

Была составлена программа (Приложение 1) и решен контрольный пример. В результате расчетов найдено явление ограниченной вычислительной устойчивости.

### 3.7. Корректные векторно-матричные интегральные уравнения первого рода

Т е о р е м а 3.7.1. Если $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq \mathbf{0}$, $f_1(x), f_2(x)$ - целые аналитические функции экспоненциального типа, то векторно-матричное уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} K_{11}(x-\xi) & K_{12}(x-\xi) \\ K_{21}(x-\xi) & K_{22}(x-\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1(\xi) \\ w_2(\xi) \end{pmatrix} d\xi = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}, \qquad (3.7.1)$$

где $K_{jk}(x) = a_{jk} \exp(-b_k x^2)\,, j, k = 1, 2,\ b_k > 0,$ является корректным и имеет решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим

$$v_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} exp(-b_k(x-\xi)^2) w_k(\xi) d\xi, \quad k = 1, 2 \qquad (3.7.2)$$

(если они существуют).

Тогда (3.7.1) переписывается в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}. \qquad (3.7.3)$$

В силу условия теоремы, из этой системы функции $v_k(x), k = 1{,}2,$ определяются, как линейные комбинации функций $f_k(x), k = 1{,}2,$ то есть тоже являются целыми аналитическими функциями экспоненциального типа. Тогда в силу Теоремы 3.1.1, уравнения (3.7.2) имеют решения и являются корректными. Теорема доказана.

П р и м е р 3.7.1. Рассмотрим векторно-матричное уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty}\begin{pmatrix} 2exp(-(x-\xi)^2) & 5exp(-2(x-\xi)^2) \\ exp(-(x-\xi)^2) & 3exp(-2(x-\xi)^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1(\xi) \\ w_2(\xi) \end{pmatrix} d\xi = \begin{pmatrix} x^2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Система (3.7.3) принимает вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (3.7.4)$$

Ее решение: $v_1(x) = 3x^2 - 5, v_2(x) = 2 - x^2,$

Уравнения (3.7.2) принимают вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} exp(-(x-\xi)^2) w_1(\xi) d\xi = 3x^2 - 5, \qquad (3.7.5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} exp(-2(x-\xi)^2) w_1(\xi) d\xi = 2 - x^2.$$

Применение формулы (3.1.2) дает:

$$w_1(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{k!4^k} (-1)^k (3x^2 - 5)^{(2k)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\pi}}\left((3x^2 - 5) - \frac{1}{4}(3x^2 - 5)''\right) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}(3x^2 - 6.5);$$

$$w_2(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{k!8^k} (-1)^k (2 - x^2)^{(2k)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\pi}}\left((2 - x^2) - \frac{1}{8}(2 - x^2)''\right) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}(1.5 - x^2).$$

Эта теорема обобщается на многомерный случай:

Т е о р е м а 3.7.2. Если

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq \mathbf{0}, \qquad (3.7.6)$$

$f_k(x), k = 1..m$ - целые аналитические функции экспоненциального типа, то уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} K_{11}(x-\xi) & K_{12}(x-\xi) & \dots & K_{1m}(x-\xi) \\ K_{21}(x-\xi) & K_{22}(x-\xi) & \dots & K_{2m}(x-\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{m1}(x-\xi) & K_{m2}(x-\xi) & \dots & K_{mm}(x-\xi) \end{pmatrix} \times$$

$$\times colon\big(w_1(\xi), \dots, w_m(\xi)\big) d\xi = colon\big(f_1(x), \dots, f_m(x)\big), \qquad (3.7.7)$$

где $K_{jk}(x) = a_{jk} \exp(-b_k x^2)\,, j, k = 1 \dots m,\ b_k > 0,$ является корректным и имеет решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя обозначение вида (3.7.2) для *k=1..m,* получаем систему $m$ алгебраических уравнений относительно функций $v_k(x), k = 1..m.$ В силу условия (3.7.6) такая система имеет решение и эти функции определяются, как линейные комбинации функций $f_k(x), k = 1..m,$ то есть тоже являются целыми аналитическими функциями экспоненциального типа. Тогда в силу Теоремы 3.1.1, все уравнения (3.7.2), *k=1..m,* имеют решения и являются корректными. Теорема доказана.

## 3.8. Заключение по главе 3

В данной главе с помощью различных методов: преобразования аргументов, преобразования уравнений, преобразования решений построены классы линейных и нелинейных, скалярных и векторно-матричных интегральных уравнений, в том числе уравнений типа Гаммерштейна, имеющих корректные решения в классах аналитических функций от одной переменной, вещественных для вещественных значений переменной.

# ГЛАВА 4.
# КОРРЕКТНОСТЬ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

В этой главе рассмотрена корректность решений двумерных и многомерных интегральных уравнений первого рода с ядром - экспоненциально-квадратично-убывающей функцией от разности аргументов - существует и непрерывно зависит от правой части в пространстве целых аналитических функций экспоненциального типа.

## 4.1. Двумерное интегральное уравнение

Из (2.2.13) следует

Т е о р е м а 4.1.1. Если функция *f(x,y)* - целая аналитическая экспоненциального типа по каждой из переменных, то существует целое аналитическое решение интегрального уравнения первого рода

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} exp(-b(x-p)^2 - b(y-q)^2)w(p,q)dpdq = f(x,y). \qquad (4.1.1)$$

Это решение выражается формулой

$$w(x,y) = \frac{b}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(4b)^k}\Delta^k f(x,y) = \frac{b}{\pi}exp\left(-\frac{1}{4b}\Delta\right)f(x,y).$$

Оно устойчиво по *f(x,y)* в пространстве $A_{2+v}$ .

П р и м е р 4.1.1. Положим $b=1$, $f(x,y)=x^4+5xy^2$. Тогда

$$w(x,y) = \frac{b}{\pi}\sum_{k=0}^{2}\frac{(-1)^k}{k!(4b)^k}\Delta^k f(x,y) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left((x^4+5xy^2) - \frac{1}{4}\Delta(x^4+5xy^2) + \frac{1}{32}\Delta^2(x^4+5xy^2)\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left((x^4+5xy^2) - \frac{1}{4}\Delta(12x^2+10x) + \frac{1}{32}\cdot 24\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}(x^4 + 5xy^2 - 3x^2 - 2.5x + 0.75).$$

Используя методы Главы 3, можно получать различные новые классы корректных уравнений из уравнения (4.1.1), как по каждой из переменных, так и по векторной переменной *(x,y)* в целом.

## 4.2. Преобразование аргументов в двумерном интегральном уравнении первого рода

Преобразования по одному из аргументов аналогичны преобразованиям в разделе 3.3. Рассмотрим возможности расширения классов корректных уравнений при помощи преобразования по всем аргументам.

Уравнение с общей квадратической функцией:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} exp\big(-K(x,y,p,q)\big)w(p,q)dpdq = f(x,y), \qquad (4.2.1)$$

$$K(x,y,p,q) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xp + 2a_{14}xq + a_{22}y^2 + 2a_{23}yp +$$

$$+2a_{24}yq + a_{33}p^2 + 2a_{34}pq + a_{44}q^2. \qquad (4.2.2)$$

Для того, чтобы линейными преобразованиями привести уравнение (4.2.1)-(4.2.2) к уравнению вида (4.1.1), необходимо, чтобы квадратичная форма (4.2.2) была положительно определена, то есть чтобы выполнялся критерий Сильвестра:

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} > 0.$$

Однако этого еще недостаточно, поскольку линейные преобразования должны быть отдельно для *x,y* и для *p,q:*

*x=AX+BY, y=CX+DY, p=KP+LQ; q=MP+NQ.* (4.2.3)

Подставляя в (4.2.2), получаем:

$$a_{11}(AX + BY)^2 + 2a_{12}(AX + BY)(CX + DY) + 2a_{13}(AX + BY)(KP + LQ) +$$

$$2a_{14}(AX+BY)(MP+NQ)+a_{22}(CX+DY)^2+2a_{23}(CX+DY)(KP+LQ)+$$

$$+2a_{24}(CX+DY)(MP+NQ)+a_{33}(KP+LQ)^2+$$

$$+2a_{34}(KP+LQ)(MP+NQ)+a_{44}(MP+NQ)^2.$$

Отсюда следует система уравнений для коэффициентов (4.2.3):

$$(x-p)^2: a_{11}A^2+2a_{12}AC+a_{22}C^2=1, \tag{4.2.4}$$

$$2A(a_{13}K+a_{14}M)+2C(a_{23}K+a_{24}M)=-2, a_{33}K^2+2a_{34}KM+a_{44}M^2=1,$$

$$(y-q)^2: a_{11}B^2+2a_{12}BD+a_{22}D^2=1, \tag{4.2.5}$$

$$2B(a_{13}L+a_{14}N)+2D(a_{23}L+a_{24}N)=-2, a_{33}L^2+2a_{34}LN+a_{44}N^2=1,$$

$$xy: 2a_{11}AB+2a_{12}(AD+BC)+2a_{22}CD=0, \tag{4.2.6}$$

$$pq: 2a_{33}KL+2a_{34}(KN+LM)+2a_{44}MN=0,$$

$$xq: 2A(a_{13}L+a_{14}N)+2C(a_{23}L+a_{24}N)\ =0,$$

$$yp: 2B(a_{13}K+a_{14}M)+2D(a_{23}K+a_{24}M)\ =0.$$

Перепишем эту систему в виде

$$a_{11}A^2+2a_{12}AC+a_{22}C^2=1,$$

$$a_{11}B^2+2a_{12}BD+a_{22}D^2=1,$$

$$a_{11}AB+a_{12}(AD+BC)+a_{22}CD=0, \tag{4.2.7}$$

$$a_{33}K^2+2a_{34}KM+a_{44}M^2=1,$$

$$a_{33}L^2+2a_{34}LN+a_{44}N^2=1,$$

$$a_{33}KL+a_{34}(KN+LM)+a_{44}MN=0, \tag{4.2.8}$$

$$A(a_{13}K+a_{14}M)+C(a_{23}K+a_{24}M)=-1,$$

$$B(a_{13}K+a_{14}M)+D(a_{23}K+a_{24}M)\ =0, \tag{4.2.9}$$

$$B(a_{13}L+a_{14}N)+D(a_{23}L+a_{24}N)=-1,$$

$$A(a_{13}L+a_{14}N)+C(a_{23}L+a_{24}N)\ =0. \tag{4.2.10}$$

Выбираем $A,B,C,D$ так, чтобы $\Delta:=AD-BC\neq 0$. Тогда из (4.2.9) находим

$$a_{13}K + a_{14}M = -D/\Delta;\ a_{23}K + a_{24}M = B/\Delta, \qquad (4.2.11)$$

а из (4.2.10) находим

$$a_{13}L + a_{14}N = C/\Delta;\ a_{23}L + a_{24}N = -A/\Delta. \qquad (4.2.12)$$

Если

$$\delta \coloneqq a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23} \neq 0, \qquad (4.2.13)$$

то из (4.2.11) определяются *K,M,* из (4.2.12) определяются *L, N*.

Определитель системы (4.2.7):

$$\begin{vmatrix} A^2 & AC & C^2 \\ B^2 & BD & D^2 \\ AB & AD+BC & CD \end{vmatrix} = A^2BDCD + ACD^2AB + C^2B^2(AD+BC) - \qquad (4.2.14)$$

$$-C^2BDAB - ACB^2CD - A^2D^2(AD+BC) = -(A^2D^2 + B^2C^2)(AD-BC) \neq 0.$$

Таким образом, из (4.2.7) определяются $a_{11}, a_{12}$ и $a_{22}$.

Обозначим:

$$\Lambda := (a_{13}K + a_{14}M)(a_{23}L + a_{24}N) - (a_{13}L + a_{14}N)(a_{23}K + a_{24}M).$$

С одной стороны, $\Lambda = \Delta/\Delta = 1 \neq 0$, с другой стороны, вычисления дают, что $\Lambda = \delta(KL - MN)$. Отсюда следует, что $KL - MN \neq 0$. В свою очередь, отсюда и из соотношения (4.2.14) следует, что определитель системы (4.2.8) не равен нулю и из нее определяются $a_{33}, a_{34}, a_{44}$. Доказана

Т е о р е м а 4.2.1. По заданным $a_{13}, a_{24}, a_{14}, a_{23}$, удовлетворяющим (4.2.13), можно найти соответствующим алгоритмом такие $a_{11}, a_{12}, a_{22}$, не все равные нулю, и $a_{33}, a_{34}, a_{44}$, не все равные нулю, что уравнение вида (4.2.2) приводится к виду (4.2.1).

Таким образом, существуют нетривиальные ядра вида (4.2.2), дающие корректные уравнения.

П р и м е р 4.2.1. $A=1, B=0, C=0, D=1, a_{14}=1, a_{23}=1, a_{13}=0, a_{24}=0$

дают $K=0, M=-1, L=-1, N=0, a_{11}=1, a_{22}=1, a_{12}=0, a_{33}=1, a_{34}=0, a_{44}=1,$

$$K(x,y,p,q) = x^2 + 2xq + y^2 + 2yp + p^2 + q^2.$$

Замена *p=− Q, q=–P* дает новое ядро

$$K'(x,y,P,Q) = x^2 - 2xP + y^2 - 2yQ + P^2 + Q^2 = (x-P)^2 + (y-Q)^2.$$

### 4.3. Двумерное векторно-матричное интегральное уравнение

Т е о р е м а 4.3.1. Если $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq \mathbf{0}$, функции $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ - целые аналитические экспоненциального типа по каждой из переменных, то существует целое аналитическое решение интегрального уравнения первого рода

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{pmatrix} K_{11}(x-\xi, y-\eta) & K_{12}(x-\xi, y-\eta) \\ K_{21}(x-\xi, y-\eta) & K_{22}(x-\xi, y-\eta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1(\xi,\eta) \\ w_2(\xi,\eta) \end{pmatrix} d\xi\, d\eta = \; = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}, \tag{4.3.1}$$

где $K_{jk}(x,y) = a_{jk}\exp(-b_k x^2 - c_k y^2)\,, j,k = 1,2,\; b_k, c_k > 0,$ оно является корректным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим функции

$$v_k(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} exp(-b_k(x-\xi)^2 - c_k(y-\eta)^2) w_k(\xi,\eta) d\xi,$$

$$k = 1,2 \tag{4.3.2}$$

(если они существуют).

Тогда (4.3.1) переписывается в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}. \tag{4.3.3}$$

В силу условия теоремы, из этой системы функции $v_k(x,y), k = 1{,}2$, определяются, как линейные комбинации функций $f_k(x,y), k = 1{,}2$, то есть тоже являются целыми аналитическими функциями экспоненциального типа. Тогда в силу Теоремы 4.1.1, уравнения (4.3.3) имеют решения и являются корректными. Теорема доказана.

### 4.4. Многомерное интегральное уравнение

Общее уравнение (2.2.12) в развернутом виде

$J_n(x_1, x_2, \dots, x_n; w(s_1, s_2, \dots, s_n): s_1, s_2, \dots, s_n) :=$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-b\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-\xi_k\right)^2\right) w\left(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\right) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n =$$

$$= f(x_1, x_2, \dots, x_n),\ b>0. \qquad (4.4.1)$$

К нему также можно применить методы Главы 3.

П р и м е р 4.4.1. Положим $n=3,\ b=1,$ вместо обозначения компонент аргумента $x_1,\ x_2,\ x_3$ будем использовать обозначения $x,\ y,\ z$. Пусть правая часть будет $f(x,y,z)=x^4+4xy^3+x^2y^2z^2$. Тогда по формуле (2.2.13) будет

$$w(x,y,z) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{k!4^k}(-1)^k\Delta^k(x^4+4xy^3+x^2y^2z^2) =$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}}((x^4+4xy^3+x^2y^2z^2) - \frac{1}{4}\Delta(x^4+4xy^3+x^2y^2z^2) +$$

$$+\frac{1}{32}\Delta^2(x^4+4xy^3+x^2y^2z^2) - \frac{1}{384}\Delta^3(x^4+4xy^3+x^2y^2z^2)\ ) =$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}}((x^4+4xy^3+x^2y^2z^2) - \frac{1}{4}(20x^2+24xy+2x^2y^2 +$$

$$+2y^2z^2+2x^2z^2) + \frac{1}{32}\Delta(20x^2+24xy+2x^2y^2+2y^2z^2+2x^2z^2) -$$

$$-\frac{1}{384}\Delta^2(20x^2+24xy+2x^2y^2+2y^2z^2+2x^2z^2)\ ) =$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}}(x^4+4xy^3+x^2y^2z^2-5\,x^2-6xy-\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{1}{2}y^2z^2-\frac{1}{2}x^2z^2 +$$

$$+\frac{1}{32}(40+8x^2+8y^2+8z^2) - \frac{1}{384}\Delta(40+8x^2+8y^2+8z^2)) =$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}}(x^4+4xy^3+x^2y^2z^2-4\,\frac{3}{4}x^2-6xy-\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{1}{2}y^2z^2-\frac{1}{2}x^2z^2 +$$

$$+\frac{1}{4}y^2+\frac{1}{4}z^2+1\,\frac{1}{8}).$$

Т е о р е м а 4.4.1. Если $n{\times}n$-матрицы $U=\{u_{kj}: k,j=1..n\},\ V=\{u_{kj}: k,j=1..n\}$ - невырожденные, то уравнение вида (4.1.1) с ядром

$$exp\left(-b\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}u_{kj}x_j-\sum_{j=1}^{n}v_{kj}\xi_j\right)^2\right)$$

является корректным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из невырожденности матриц следует, что можно ввести замену переменных $X_k = \sum_{j=1}^{n} u_{kj} x_j$; $\Xi_k \coloneqq \sum_{j=1}^{n} v_{kj} \xi_j$, приводящую уравнение к виду (4.1.1). Обратная замена дает корректность исходного уравнения.

### 4.5. Заключение по Главе 4

В данной главе показано, что результаты Главы 3 можно также перенести на скалярные и векторно-матричные интегральные уравнения первого рода от функций нескольких переменных. Получен также результат о достаточных условий для преобразования квадратичных форм к сумме квадратов разностей.

# ВЫВОДЫ

В работе построены экспоненты дифференциальных операторов в частных производных, дающие решения уравнения теплопроводности с обратным временем; построены классы интегральных линейных уравнений и нелинейных уравнений Гаммерштейна первого рода, являющихся корректными в некоторых классах аналитических функций; построены классы линейных и нелинейных скалярных и векторно-матричных интегральных уравнений первого рода для функций нескольких переменных, являющихся корректными в некоторых классах аналитических функций; построено программное обеспечение для устойчивого решения конкретных линейных и нелинейных интегральных уравнений первого рода. Обнаружено явление ограниченной вычислительной устойчивости по параметру - шагу сетки.

Полученные результаты можно использовать для построения приближенного решения обратных задач математической физики. Построенное программное обеспечение с соответствующими модификациями можно использовать для приближенного решения различных интегральных уравнений первого рода, причем обнаруженное явление ограниченной вычислительной устойчивости будет косвенно подтверждать корректность таких уравнений.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа [Текст] / Ж. Адамар. - Москва: Наука, 1978. - 352 с.
2. Алыбаев К.С., Тампагаров К.Б. Алгоритм приближенного поиска погранслойных линий сингулярно возмущенных линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями // Вестник КРСУ. Серия естественные и технические науки, 2016, № 5. – С. 3-6.
3. Арсенин В.Я. О решении некоторых интегральных уравнений первого рода типа свертки методом регуляризации [Текст] / В.Я.Арсенин, В.В. Иванов // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1968. - Т. 8, № 2. - С. 310-321.
4. Арсенин В.Я. О применении метода регуляризации к интегральным уравнениям первого рода типа свертки [Текст] /В.Я.Арсенин, Т. И. Савелова // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1969, Т. 9, № 6. - С. 1392-1396.
5. Арсенин В.Я. Об одном способе приближенных решений интегральных уравнений первого рода типа свертки [Текст] /В.Я.Арсенин // Труды МИАН СССР, 1973, том 133. - С. 33-51.
6. Аскар кызы Л. Класс интегральных уравнений первого рода, имеющих решение при любой правой части [Текст] / Кененбаева Г.М., Аскар кызы Л. // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики: труды Международной конференции, посв. 90-летию со дня рождения академика Г. И. Марчука. - Новосибирск: Абвей, 2015. - С.321-325.
7. Аскар кызы Л. Эффекты и явления в теории динамических систем [Текст] / Кененбаева Г.М., Аскар кызы Л. // Математическое моделирование и информационные технологии в образовании и науке. Материалы междуна-

родной научно-практической конференции. – Алматы: КазНПУ имени Абая, 2015. - С.340-343.

8. Аскар кызы Л. Поиск эффектов [Текст] / Г.М. Кененбаева, Л. Аскар кызы // Вестник КРСУ. Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений: Том 1, Бишкек, 2013. – С. 187-191.
9. Аскар кызы Л. Корректность решения двумерного интегрального уравнения первого рода с аналитическими функциями [Текст] / Л. Аскар кызы // Проблемы современной науки и образования, 2016, № 21(63). - Иваново: изд. Олимп. – С. 6-9. (РИНЦ)
10. Аскар кызы Л. Условия существования положительных решений линейных интегральных уравнений первого рода [Текст] / Л. Аскар кызы // Вестник ЖАГУ, 2016, № 1 (32). – С.24-29.
11. Аскар кызы Л. Классификации применения компьютеров в математических исследованиях [Текст] / Г.М.Кененбаева, Т.Дж.Касымова, Л. Аскар кызы // Проблемы современной науки и образования, 2016, № 1(63). - Иваново: изд. Олимп. – С. 23-30. (РИНЦ)
12. Аскар кызы Л. Корректность интегральных уравнений первого рода типа Гаммерштейна с аналитическими функциями [Текст] / Л. Аскар кызы // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана, 2017, № 5. - С. 78-80.
13. Антоневич А.Б. Линейные функциональные уравнения. Операторный подход. - Минск: «Университетское», 1988. – 231 с.
14. Борубаев А.А. О категорных характеристиках компактных, полных равномерных пространств и полных по Райкову топологических групп [Текст] / А.А. Борубаев // Известия Академии наук, вып. 4, 2007. - С. 1-6.
15. Бакушинский А.Б. Один общий прием построения регуляризирующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве [Текст] / А.Б. Бакушинский // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1968, 7, № 3.

16. Бакушинский А. Б. О решении некоторых интегральных уравнений первого рода методом последовательных приближений [Текст] / А.Б. Бакушинский, В. Н.Страхов // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1968, 8, № 1.
17. Бакушинский А. Б. К проблеме построения линейных регуляризирующих алгоритмов в банаховых пространствах [Текст] / А.Б. Бакушинский // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1973, 13, № 1.
18. Булыгин В.С. Производство энтропии в процессе теплопроводности в твёрдых телах [Электронный ресурс] / В.С. Булыгин //https: mipt.ru/education/chair/physics/S_II/method/Pr_Enrophy.pdf, 2011
19. Вайникко Г.М. Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах [Текст] / Г.М. Вайникко. - Тарту: Тартуский гос. ун-т, 1982. - 64 с.
20. Винокуров В.А. О погрешности решения линейных операторных уравнений [Текст] /В.А. Винокуров //Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1970, Т. 10, № 4. - С. 830-839.
21. Гончарский А.В. Некоторые оценки скорости сходимости регуляризованных приближений для уравнений типа свертки [Текст] /А.В. Гончарский, А. С.Леонов, А. Г.Ягола // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1972, 12, № 3. - С.762-769.
22. Гончарский А.В. О решении двумерных интегральных уравнений первого рода с ядром, зависящим от разности аргументов [Текст] / А.В. Гончарский, А. С.Леонов, А. Г.Ягола // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1971, 11, № 5. - С. 1296-1301.
23. Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целые функции, 3-е издание [Текст] / М.А. Евграфов. – Москва, 1979. - 320 с.
24. Заикин П.Н. Некоторые вопросы численного решения интегральных уравнений первого рода методом регуляризации [Текст] / П.Н.Заикин, А. С. Меченов. – Москва: МГУ, 1971.

25. Заторский Р.А. Треугольные матрицы и комбинаторные формулы обращения [Текст] / Р.А. Заторский, А. Р.Малярчук // Матем. заметки, 2009, том 85, выпуск 1, с. 12–21.
26. Иванов В. К. О некорректно поставленных задачах [Текст] / В.К. Иванов // Математический сборник. - 1963, 61, № 2. - С.211-223.
27. Иванов В.К. О равномерной регуляризации неустойчивых задач [Текст] / В.К. Иванов // Сибирский математический журнал, 1966, 5, № 3. - С.546-558.
28. Иванов В.К. Интегральные уравнения первого рода и приближенное решение обратной задачи потенциала [Текст] / В.К. Иванов //Доклады АН СССР. - 1963. Т. 145, № 5. - С. 997-1000.
29. Иванов В. К. Об одном типе некорректных линейных уравнений в векторных топологических пространствах [Текст] / В.К. Иванов // Сибирский математический журнал. - 1965. Т. 6, № 4. - С. 835-839.
30. Иванов В.К. О приближенном решении операторных уравнений 1-го рода [Текст] / В.К. Иванов // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1966. Т. 6, № 6. - С. 1089-1093.
31. Иванов В. К. Об интегральных уравнениях 1-го рода [Текст] / В.К. Иванов //Дифференциальные уравнения. - 1967. Т. 3, № 3. - С. 410-421.
32. Иванов В. К. Об оценке погрешности при решении линейных некорректно поставленных задач [Текст] / В.К. Иванов, Т. И. Королюк // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1969. 9, № 1. - С. 30-41.
33. Иванов В.К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения [Текст] / В.К. Иванов, В.В.Васин, В.П.Танана. - Москва: Наука, 1978. – 206 с.
34. Иванов В.К. О линейных некорректных задачах [Текст] / В.К. Иванов //Доклады АН СССР. - 1962. Т. 145, № 2. - С. 270-272.
35. Искандаров С. Метод нестандартного сведения к системе и экспоненциальная устойчивость линейного обыкновенного дифференциального

уравнения третьего порядка [Текст] / С. Искандаров // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46, № 6. – С. 898-899.

36. Иманалиев М.И. Обобщенные решения интегральных уравнений первого рода [Текст] / М.И. Иманалиев. - Фрунзе: Илим, 1981. - 144 с.
37. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи [Текст] / С.И. Кабанихин. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.
38. Канторович Л.В. Функциональный анализ в нормированных пространствах [Текст] / Л.В.Канторович, Г.П.Акилов. - Москва: Физматгиз, 1959. – 684 с.
39. Князев А.В. Условия корректности нелинейных интегральных уравнений с ядром, зависящим от разности переменных [Текст] / А.В. Князев // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1970, 10, № 4. - С. 981-989.
40. Каденова З.А. Регуляризация и единственность решений линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Автореферат дисс. … к.ф.-м.н. [Текст] / З.А.Каденова. – Новосибирск, 2006. - 18 с.
41. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] / А.Н. Колмогоров, С.В.Фомин. - Москва: Наука, 1972. - 572 с.
42. Крейн С.Г. О приближенных методах решения некорректных задач [Текст] / С. Г.Крейн, О.И. Прозоровская // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1963, 3, № 1. С. 120-130.
43. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве [Текст] / С.Г. Крейн. - Москва: Наука, 1967. - 464 с.
44. Курант Р. Методы математической физики. Т.1. [Текст] / Р. Курант, Д. Гильберт. - Москва: Гостехиздат, 1951.
45. Кененбаева Г.М. Применение доказательных вычислений к поиску областей, удовлетворяющих заданным свойствам [Текст] / Г.М. Кененбаева. - Автореферат дисс. … к.ф.-м.н., 05.13.16. - Новосибирск, 1991. - 16 с.
46. Кененбаева Г.М. Теория и методика поиска новых эффектов и явлений в теории возмущенных дифференциальных и разностных уравнений. – Би-

шкек: Илим, 2012. - 204 с.
47. Кененбаева Г.М. Иргөө кубулушу диссипациялык системалардын биринчи мисалы катарында жана аны компьютерде ишке ашыруу [Текст] / П.С.Панков, Г.М. Кененбаева // Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын Кабарлары, 2012, № 3. – 105-108 б.
48. Кененбаева Г.М. Динамикалык системалар теориясында жаңы эффекттер менен кубулуштарды издөө методикасы жана теориясы [Текст] / Г.М. Кененбаева // Интернет-журнал ВАК КР, 2014, № 2. – 8 б.
49. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях 1-го рода [Текст] / М.М. Лаврентьев //Доклады АН СССР. – 1959, Т. 127, № 1. - С. 31-33.
50. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях 1-го рода [Текст] / М.М. Лаврентьев //Доклады АН СССР. - 1960, 133, № 2. - С. 277-280.
51. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики [Текст] / М.М. Лаврентьев. - Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. – 74 с.
52. Лаврентьев М.М. Условно корректные задачи для дифференциальных уравнений [Текст] / М.М. Лаврентьев. - Новосибирск: Изд-во НГУ, 1973. - 71 с.
53. Лаврентьев М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа [Текст] / М.М. Лаврентьев, В.Г.Романов, С.П. Шишатский. – Москва: Наука,1980. - 285 с.
54. Латтес Р. Метод квазиобращения и его приложения [Текст] /Р.Латтес, Ж.Л.Лионс. - Москва: Мир, 1970. - 336 с.
55. Лисковец О. А. О регуляризации линейных уравнений в банаховых пространствах [Текст] / О. А.Лисковец // Дифференциальные уравнения, 1968, 4, № 6. - С. 1136–1139.
56. Леонов А.С. О выборе параметра регуляризации для нелинейных некорректных задач с приближенно заданным оператором [Текст] / А.С. Леонов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1979. - Вып. 19, № 6. - С. 363-376.

57. Ловитт У. В. Линейные интегральные уравнения  [Текст] / У.В. Ловитт. - Москва: Гостехиздат, 1957. - 269 с.
58. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск: Ротапринт Новосибирского государственного университета, 1981. – 74 с.
59. Люстерник Л.А. Элементы функционального анализа [Текст] / Л.А. Люстерник, В. И.Соболев. - Москва: Наука, 1965. - 519 с.
60. Маслов В.П. Регуляризация некорректных задач для сингулярных интегральных уравнений [Текст] / В.П.Маслов //Доклады АН СССР, 1967, 176, № 5.
61. Маслов В.П. Существование решения некорректной задачи эквивалентной сходимости регуляризованного процесса [Текст] / В.П. Маслов // Успехи математических наук. 1968. - Т.23, вып. 2. - С.183-184.
62. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики [Текст] /Г.И. Марчук. - Москва: Наука,1980.
63. Марчук Г.И. Некоторые вопросы глобальной регуляризации [Текст] / Г.И. Марчук. С.А.Атанбаев // Доклады АН СССР, 1970,190, № 3.
64. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям [Текст] / С.Г.Михлин. – Москва: Физматгиз,1959. – 232 с.
65. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректных задач [Текст] / В.А. Морозов. - Москва: Изд-во МГУ, 1974. - 360 с.
66. Морозов В.А. О регуляризации некорректно поставленных задач и выборе параметра регуляризации [Текст] / В.А. Морозов // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1966, 6, № 1. - С. 171-174.
67. Морозов В.А. Сходимость одного приближенного метода решения операторных уравнений 1-го рода [Текст] / В.А. Морозов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1973. - Т. 13, № 1. - С. 3-17.
68. Михлин С.Г. О погрешностях вычислительных процессов, I [Текст] / С.Г. Михлин // Известия ВУЗов. Математика. - 1981, № 7. - С. 62–71.

69. Мартин Н. Математическая теория энтропии [Текст] / Н. Мартин, Дж. Ингленд. – Москва: Мир, 1988. – 350 с.
70. Мышкис А.Д. Прикладная математика [Текст] / И.И.Блехман, А.Д. Мышкис, Я.Г. Пановко. - Киев: Наукова думка, 1976. - 270 с.
71. Панков П.С. Экспериментальное исследование метода сеток для уравнений в частных производных с аналитическими исходными данными [Текст] / П.С.Панков, Х.С. Сабирова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 32. – Бишкек: Илим, 2003. – С. 39-43.
72. Панков П.С. Экспериментальное исследование метода сеток для аналитически нелинейных уравнений в частных производных [Текст] / П.С. Панков, Х.С. Сабирова // Труды Средневолжского математического общества. – Том 6, № 1. – 2004. – С. 289-292.
73. Панков П.С. Корректность обратной начальной задачи для уравнения теплопроводности с аналитическими данными [Текст] / П.С.Панков, Х.С. Сабирова // Дифференциальные уравнения в частных производных и родственные проблемы анализа и информатики: Труды международной научной конференции. Том 1. – Ташкент, 2004. – С. 117-121.
74. Панков П.С. Сходимость разностных методов для уравнений в частных производных первого порядка с целым аналитическим начальным условием [Текст] / П.С.Панков, Х.С. Сабирова // International Conference on Electronics and Computer in Kyrgyzstan. – Bishkek: International Ataturk-Alatoo University, Kyrgyz-Russian Slavic University, 2004. – Pp. 55-57.
75. Панков П.С. Применение метода сеток к обратной начальной задаче для уравнения теплопроводности с аналитическим начальным условием [Текст] / П.С.Панков, Х.С. Сабирова // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына: серия 3. Естественно-технические науки. - Выпуск 3. – Бишкек, 2005. - С. 103-106.
76. Панков П.С. Сходимость разностных методов для уравнений в частных производных второго порядка с целым аналитическим начальным условием [Текст] / П.С.Панков, Х.С. Сабирова // 2nd International Conference

on Electronics and Computer in Kyrgyzstan. – Bishkek: International Ataturk-Alatoo University, Kyrgyz-Russian Slavic University, 2005. – Pp. 41-45.

77. Панков П.С. Асимптотика метода сеток для дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, многочлены Бернштейна и некоторые обобщения [Текст] / П.С. Панков, Т.М. Иманалиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 29. – Бишкек: Илим, 2000. – С. 36-40.
78. Панков П.С. Асимптотика метода сеток для дифференциальных уравнений первого порядка с аналитическим начальным условием [Текст] / П.С. Панков, Т.М. Иманалиев // Вестник КГНУ: серия 3. Естественно-технические науки. - Выпуск 5. Математические науки. Информатика и информационные технологии. – Бишкек, 2001. - С. 86-88.
79. Панков П.С. Адиабатические показатели замкнутых систем [Текст] / П.С. Панков // Вестник КНУ им. Ж.Баласагына. Серия 3. Естественно-технические науки. Физика и физическое образование, 2003. – С. 146-147.
80. Панков П.С. Доказательные вычисления на электронных вычислительных машинах [Текст] / П.С. Панков. - Фрунзе: Илим, 1978. - 179 с.
81. Медведев М.Я. Полусопряженные функторы и категории алгебр над n-тройками [Текст] / М.Я. Медведев: Автореферат дисс. … кандидата физико-математических наук (01.01.04). - Новосибирск, 1973. - 17 с.
82. Манько С.Н. Применение теории обобщенных операторных экспонент к решению операторных уравнений в локально выпуклых пространствах [Текст] / С.Н. Манько // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2014, № 4 (1), с. 291-297.
83. Леонтьев А.Ф. Целые функции. Ряды экспонент [Текст] / А.Ф. Леонтьев. - Москва: Наука, 1983. - 176 с.
84. Манжиров А. В. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения. [Текст] / А. В. Манжиров, А. Д. Полянин. - Москва: Изд-во «Факториал Пресс», 2000. - 384 с., раздел 4.3-1.

85. Стрижков В.А. Корректность интегральных уравнений Фредгольма I рода типа потенциала для тонких проводников [Текст] / В.А. Стрижков // Журнал вычислительной математики и матемематической физики. – 1988, 28:9. – С. 1418–1420.
86. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений [Текст] / И.Г. Петровский. – Москва: Наука,1968. - 448 с.
87. Соболев С.Л. Уравнения математической физики [Текст] / С.Л.Соболев. – Москва: Наука, 1992. - 430 с.
88. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике [Текст] / С.Л.Соболев. - Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1950. - 256 с.
89. Саадабаев А. Построение регуляризирующих операторов для решения нелинейных операторных и интегральных уравнений первого рода [Текст] / А. Саадабаев. Автореферат дисс. … докт. физ-матем. наук. 01.01.02. – Новосибирск, 1993. - 26 с.
90. Саадабаев А. Приближенные методы решения нелинейных интегральных и операторных уравнений первого рода [Текст] / А. Саадабаев. - Бишкек, 1997. - 218 с.
91. Саадабаев А. Методы решения интегральных уравнений первого рода. Учебное пособие [Текст] / А. Саадабаев. - Фрунзе: Киргиз. гос. ун-т, 1986.
92. Савелова Т.И. О применении одного класса регуляризирующих алгоритмов к решению интегральных уравнений первого рода типа свертки в банаховых пространствах [Текст] / Т.И. Савелова // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1974, Т.14, № 2. - С. 479-482.
93. Страхов В.Н. О линейных некорректных задачах в гильбертовом пространстве [Текст] / В.Н. Страхов // Дифференциальные уравнения, 1970, 6, № 8.
94. Страхов В.Н. О методах последовательных приближений для линейных уравнений в гильбертовом пространстве [Текст] / В.Н. Страхов // Журнал

вычислительной математики и математической физики, 1973. 13, № 4. - С. 1041-1044.

95. Танана В.П. Методы решения операторных уравнений [Текст] / В.П.Танана. - Москва: Наука, 1981. - 156 с.
96. Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач [Текст] / А.Н.Тихонов // Доклады АН СССР. 1943. - Т. 39, № 5. - С.195-198.
97. Тихонов А.Н. О решениях некорректно поставленных задач и методе регуляризации [Текст] / А.Н.Тихонов//Доклады АН СССР. 1963. Т.151, № 3. - С.501-504.
98. Тихонов А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач [Текст] / А.Н.Тихонов //Доклады АН СССР. 1963. Т.153, № 1. - С.49-52.
99. Тихонов А.Н. О нелинейных уравнениях первого рода [Текст] / А.Н. Тихонов //Доклады АН СССР. 1965. - Т.161, № 5. - С.1023-1026.
100. Тихонов А.Н. О решении нелинейных интегральных уравнений первого рода [Текст] / А.Н.Тихонов //Доклады АН СССР. 1964. Т. 156, - № 6. - С. 1296-1299.
101. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач [Текст] / А.Н.Тихонов, В.Я. Арсенин. - Москва: Наука, 1979. - 285 с.
102. Тихонов А.Н. Применение метода регуляризации в нелинейных задачах [Текст] / А.Н.Тихонов, В.Б. Гласко // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1965, Т. 5, № 3. - С. 463-473.
103. Тихонов А.Н. О приближенном решении интегральных уравнений Фредгольма первого рода [Текст] / А.Н.Тихонов, В.Б. Гласко //Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1964, Т.4, № 3. - С. 564-570.
104. Байзаков А.Б. О применении методов преобразования решений к исследованию разрешимости начальной задачи для дифференциальных уравнений в частных производных [Текст] / А.Б. Байзаков, Т.Р. Кыдыралиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 47. – Бишкек: Илим, 2014. - С. 129-133.

105. Танана В.П. Методы решения операторных уравнений. [Текст] / В.П. Танана. – Москва: Наука, 1986. – 157 с.
106. Сабирова Х.С. Конечно-разностная аппроксимация операторов дифференцирования аналитических функций в обратной начальной задаче для уравнения теплопроводности [Текст] / Х.С. Сабирова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 33. – Бишкек: Илим, 2004. – С. 160-164.
107. Трикоми Ф. Интегральные уравнения [Текст] / Ф.Трикоми. - Москва: Иностранная литература, 1960. - 300 с.
108. Фридман В.М. Метод последовательных приближений для интегрального уравнения Фредгольма первого рода [Текст] / В.М. Фридман // Успехи математических наук. 1956. - Т.11, № 1. - С.233-234.
109. Худак Ю.И. О регуляризации решений интегральных уравнений первого рода [Текст] / Ю.И.Худак // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1966, Т. 6, № 4. - С. 766–768.
110. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. - Часть I. Функции одного переменного. [Текст] / Б.В. Шабат. - Москва: Наука, 1976. – 320 с. – Глава V. Аналитические методы. § 15. Рост целых функций. – С. 263-277.
111. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. - Часть II. Функции нескольких переменных [Текст] / Б.В. Шабат. - Москва: Наука, 1976. – 400 с.
112. Шокин Ю.И. Интервальный анализ [Текст] / Ю.И. Шокин. – Новосибирск: Наука, 1981. – 112 с.
113. Asanov A. Regularization, Uniqueness and Existence of Solutions of Volterra Equations of the First Kind. - Utrecht, The Netherlands, Tokyo, Japan, 1998. - 272 p.
114. [Электронный ресурс] / http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/ie/ie0322.pdf
115. Askar kyzy L. Conditions of positivity of solutions of integral equations of the first kind in the space of analytical functions [Текст] / L. Askar kyzy // Abstracts of the V International Scientific Conference "Asymptotical, Topological

and Computer Methods in Mathematics” devoted to the 85 anniversary of Acad. M. Imanaliev / Ed. by Acad. A.Borubaev. - Bishkek, 2016. – P. 35.

116. De Giorgi E. Una dimostrazione diretta dell’esistenza di soluzioni analitiche nel piano reale di equazioni a derivate parziali a coefficienti costanti [Текст] / E. De Giorgi, L.Cattabriga // Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, 1971, 4, pp. 1015–1027.

117. Hadamard J. Sur les problèmes aux derives partielles elleur signification physique [Текст] / J. Hadamard // Bull. Univ. Princeton. - 1902. V.13. - P. 49-52.

118. Hadamard J. Le problème de Cauchy et les équations aux derivés partielles lineaires hyperboliques [Текст] / J. Hadamard. - Paris: Hermann et Cie, 1932.

119. Hörmander L. On the existence of real analytic solutions of partial differential equations with constant coefficients [Текст] / L. Hörmander // Inventiones mathematicae, 1973, vol. 21, Issue 3, pp. 151-182.

120. Kenenbaeva G.M. Survey of effects and phenomena in some branches of mathematics [Текст] / G.M. Kenenbaeva, S. Tagaeva // Proceedings of V Congress of the Turkic World Mathematicians (Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June, 2014). – Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2014. – Pp. 107-111.

121. Kenenbaeva G.M. Framework Definitions of Effects and Phenomena and Examples in Differential and Difference Equations [Текст] / G.M. Kenenbaeva // Journal of Mathematics and System Science, 2014, 4. - Pp. 766-768.

122. Landauer R. The Fundamental Physical Limits of Computation [Текст] / R. Landauer, C. H. Bennett // Scientific American, 1985, July. – Pp. 48-56.

123. Lukianenko V.A. Some Tasks for Integral Equations of Urison’s Type [Текст] / V.A. Lukianenko, M.G.Kozlova, U.A. Hazova // Integral Equations – 2010: Proceedings of the International Conference. – Lviv, 2010. – Pp. 80-84.

124. Miranda E. N. Entropy production in a heat conduction problem [Текст] / E. N. Miranda // Revista Brasileira de Ensino de Fısica, vol. 38, nº 4, 2016. - Pp. e4303-1-6.

125. Moore R.E. Interval Analysis [Текст] / R.E. Moore. - Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1966. - 145 p.
126. Pankov P.S. Convergence of Finite Difference Method for First-Order Partial Differential Equations with Analytical Initial Conditions [Текст] / P.S.Pankov, T. M. Imanaliev // Analytical and Approximate Methods: International Conference at the Kyrgyz-Russian-Slavic University, 2002. - Shaker Verlag, Aachen, Germany, 2003. – Pp. 185-193.
127. Phillips D.L. A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind [Текст] / D.L.Phillips // Journal Assoc. Comput. Math. 1962, 9, No. 1. - Pp. 84-96.
128. Santhosh G. Iterative Regularization Methods for Ill-Posed Hammerstein Type Operator Equation with Monotone Nonlinear Part [Текст] / G.Santhosh, M.Kunhanandan // International Journal of Math. Analysis, Vol. 4, 2010, no. 34, pp. 1673–1685.
129. Some B. Some recent numerical methods for solving nonlinear Hammerstein integral equations [Текст] / B. Some // Mathematical and Computer Modelling. - Vol. 18, issue 9, 1993. – Pp. 55-62.
130. Yosida K. On the differentiability and the representation of one paremeter semi-group of operators [Текст] / K. Yosida // Journal of Math. Soc. Japan, 1948, V.5, No.1, pp. 13-21.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Текст программы с подпрограммами на языке pascal – контрольные примеры решения линейного скалярного интегрального уравнения с правыми частями (3.1.6) и Примера 3.1.5.

```
PROGRAM Lira_1DL;
USES CRT, Dos;
var ht,ht2,hx: double;
it,ifun,n,ix,nx,nhx:integer;
a,uxe,b,s: double;
uo,un,x:array[-1030..1030] of double;
procedure xi;
begin for ix:=-nx to nx do x[ix]:=ix*hx; end;
    {f(x)}
function f(x:double):double;
begin
case ifun of
1: f:=exp(a*x); 2: f:=exp(x)*x end;
end;
  {u_exact(x)}
function u_exact(x:double):double;
begin case ifun of
1: u_exact:=sqrt(b/pi)*exp(a*x-a*a/4.0/b);
2: u_exact:=sqrt(b/pi)*exp(x-1.0/4.0)*(x-1.0/2.0) end;
end;
begin {main} clrscr;
writeln('  Askar kyzy Lira (c) 2017');
writeln('  Institute of Mathematics (c) 2017');
writeln('  Linear Scalar Integral Equation: ');
```

```
writeln('  Control examples:
Integral exp(-b(x-s)^2)u(s)ds=f(x) ');
writeln('  1) f(x)=exp(a*x); 2) f(x)=exp(x)*x ');
writeln;
repeat
write('  ifun, n, nx, nhx (n+hnx<nx) = ');
readln(ifun,n,nx,nhx);
if ifun>0 then begin
case ifun of
1: begin a:=2.0; b:=3.0 end;
2: b:=1.0
end;
 hx:=1.0/nhx; xi;
for ix:=-nx to nx do uo[ix]:=f(x[ix]);
for it:=1 to n do
begin
  for ix:=-nx+it to nx-it do
  begin
  un[ix]:=uo[ix]-(uo[ix+1]-2.*uo[ix]+uo[ix-1])
/n/4./b/sqr(hx);
  end;
  for ix:=-nx+it to nx-it do
  begin uo[ix]:=un[ix] end;
end;
for ix:=-nx+n to nx-n do
uo[ix]:=uo[ix]*sqrt(b/pi);
 uxe:=u_exact(0.0);
writeln('   u(0), u_exact(0) = ',uo[0]:10:3,uxe:8:3);
 uxe:=u_exact(1.0);
writeln('   u(1), u_exact(1) = ',uo[nhx]:10:3,uxe:8:3);
```

```
end;
until ifun=0;
readln end.
```

Результаты расчетов (первое число в исходных данных обозначает номер функции, второе - количество шагов алгоритма, последнее - величина, обратная шагу по *x*)

```
Askar kyzy Lira (c) 2017
Institute of Mathematics (c) 2017
Linear Scalar Integral Equation:
Control examples: Integral exp(-b(x-s)^2)u(s)ds=f(x)
1) f(x)=exp(a*x); 2) f(x)=exp(x)*x

  ifun, n, nx, nhx (n+hnx<nx) = 1 8 20 4
   u(0), u_exact(0) =      0.690   0.700
   u(1), u_exact(1) =      5.100   5.174
  ifun, n, nx, nhx (n+hnx<nx) = 1 16 50 4
   u(0), u_exact(0) =      0.693   0.700
   u(1), u_exact(1) =      5.119   5.174
  ifun, n, nx, nhx (n+hnx<nx) = 1 64 100 4
   u(0), u_exact(0) =      0.695   0.700
   u(1), u_exact(1) =      5.133   5.174
  ifun, n, nx, nhx (n+hnx<nx) = 1 256 300 4
   u(0), u_exact(0) =      0.695   0.700
   u(1), u_exact(1) =      5.137   5.174
  ifun, n, nx, nhx (n+hnx<nx) = 1 1024 1030 4
   u(0), u_exact(0) =      0.695   0.700
   u(1), u_exact(1) =      5.137   5.174
  ifun, n, nx, nhx (n+hnx<nx) = 1 1024 1030 5
   u(0), u_exact(0) =      0.697   0.700
   u(1), u_exact(1) =      5.150   5.174
```

```
  ifun, n, nx, nhx (n+hnx<nx) = 1 1024 1030 6
   u(0), u_exact(0) =      0.698   0.700
   u(1), u_exact(1) =      5.158   5.174
  ifun, n, nx, nhx (n+hnx<nx) = 1 1024 1030 7
   u(0), u_exact(0) =      0.699   0.700
   u(1), u_exact(1) =      5.284   5.174
  ifun, n, nx, nhx (n+hnx<nx) = 1 1024 1030 8
   u(0), u_exact(0) =      0.699   0.700
   u(1), u_exact(1) =      5.288   5.174
ifun, n, nx, nhx (n+hnx<nx) = 2 8 20 4
   u(0), u_exact(0) =     -0.228  -0.220
   u(1), u_exact(1) =      0.568   0.597
  ifun, n, nx, nhx (n+hnx<nx) = 2 64 100 4
   u(0), u_exact(0) =     -0.222  -0.220
   u(1), u_exact(1) =      0.588   0.597
  ifun, n, nx, nhx (n+hnx<nx) = 2 256 300 4
   u(0), u_exact(0) =     -0.222  -0.220
   u(1), u_exact(1) =      0.590   0.597
  ifun, n, nx, nhx (n+hnx<nx) = 2 1024 1030 4
   u(0), u_exact(0) =     -0.222  -0.220
   u(1), u_exact(1) =      0.590   0.597
  ifun, n, nx, nhx (n+hnx<nx) = 2 1024 1030 5
   u(0), u_exact(0) =     -0.221  -0.220
   u(1), u_exact(1) =      0.593   0.597
  ifun, n, nx, nhx (n+hnx<nx) = 2 1024 1030 6
   u(0), u_exact(0) =     -0.237  -0.220
   u(1), u_exact(1) =      0.163   0.597
```

Из этих результатов видно, что при увеличении количества шагов по времени точность увеличивается (как и в аналогичной корректной задаче для уравнения теплопроводности); параметром в данной некорректной задаче (условно-корректной для аналитических функций) является шаг по $x$ - при его уменьшении точность сначала улучшается, а потом - исчезает. Таким образом, имеет место ограниченно вычислительная устойчивость, см. Определение 1.12.7.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Текст программы с подпрограммами на языке pascal – контрольный пример решения линейного двумерного интегрального уравнения из Примера 4.1.1.

```
PROGRAM Lira_2DL;
USES CRT, Dos;
var ht,ht2,hx: real;
it,itau,n,ix,iy,nx,iterat,ic,nroot,nhx:integer;
    du,u_e,b,s: double;
    x,y:array[-520..520] of double;
    uo,un:array[-520..520,-520..520] of double;
procedure ixy;
begin for ix:=-nx to nx do
begin x[ix]:=ix*hx; y[ix]:=ix*hx end;
end;
    {f(x,y)}
function f(x,y:double):double;
begin f:=x*x*x*x+5.0*x*y*y end;
    {u_exact(x,y)}
function u_ex(x,y:double):double;
begin u_ex:=sqrt(b/pi)*(x*x*x*x+5.0*x*y*y-3.0*x*x-
2.5*x+0.75); end;
begin {main} clrscr;
writeln('  Askar kyzy Lira (c) 2017');
writeln('  Institute of Mathematics (c) 2017');
writeln('  Linear Integral Equation with two variables:
');
writeln('  Control example: ');
```

```
writeln('  Integral exp(-b(x-s)^2-b(y-v)^2)
u(s,v)dsdv=f(x,y) ');
writeln;
repeat
write('   b, n<nx, nhx (<nx-n) = ');
readln(b,n,nx,nhx);
hx:=1./nhx;
ixy;
for ix:=-nx to nx do
for iy:=-nx to nx do
uo[ix,iy]:=f(x[ix],y[iy]);
for it:=1 to n do
begin
  for ix:=-nx+it to nx-it do
  for iy:=-nx+it to nx-it do
  begin
  du:=uo[ix+1,iy]+uo[ix,iy+1]+uo[ix-1,iy]+uo[ix,iy-1]-
4.*uo[ix,iy];
  un[ix,iy]:=uo[ix,iy]-du/n/4./b/sqr(hx);
  end;
  for ix:=-nx+it to nx-it do
  for iy:=-nx+it to nx-it do
  begin
  uo[ix,iy]:=un[ix,iy]
  end;
end;
for ix:=-nx+n to nx-n do
for iy:=-nx+n to nx-n do
 uo[ix,iy]:=uo[ix,iy]*sqrt(b/pi);
 u_e:=u_ex(2.0,1.0);
```

```
writeln('  u_app(2,1), u_exact(2,1) = ',
uo[2*nhx,nhx]:10:3,u_e:8:3);
until b=2.0;
readln end.
```

Результаты расчетов (второе число в исходных данных обозначает количество шагов алгоритма, последнее - величина, обратная шагу по $x$)

```
Askar kyzy Lira (c) 2017
  Institute of Mathematics (c) 2017
  Linear Integral Equation with two variables:
  Control example:
  Integral exp(-b(x-s)^2-b(y-v)^2)u(s,v)dsdv=f(x,y)

   b, n<nx, nhx (<nx-n) = 1.0 20 50 5
  u_app(2,1), u_exact(2,1) =      5.468   5.501
   b, n<nx, nhx (<nx-n) = 1.0 40 100 5
  u_app(2,1), u_exact(2,1) =      5.464   5.501
   b, n<nx, nhx (<nx-n) = 1.0 30 100 4
  u_app(2,1), u_exact(2,1) =      5.469   5.501
   b, n<nx, nhx (<nx-n) = 1.0 30 100 5
  u_app(2,1), u_exact(2,1) =      5.474   5.501
   b, n<nx, nhx (<nx-n) = 1.0 30 100 6
  u_app(2,1), u_exact(2,1) =      5.959   5.501
   b, n<nx, nhx (<nx-n) = 1.0 30 100 7
  u_app(2,1), u_exact(2,1) =   -949.543   5.501
```

Из этих результатов видно, что при увеличении количества шагов точность сначала увеличивается, а потом уменьшается; параметром в некорректной задаче является шаг по $x$ - при его уменьшении точность сначала улучшается, а потом - исчезает.