НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

УДК 517.968.72+74

АСАНОВА КАНЫКЕЙ АВЫТОВНА

ОЦЕНКИ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПОЛУОСИ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Искандаров С.

Бишкек - 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Приводятся некоторые условные обозначения, используемые в настоящей диссертации. Эти обозначения взяты из монографии [40].

Все переменные и постоянные величины являются вещественными.

Символ «∞» означает «$+\infty$».

Символ «$\in$» означает «принадлежит».

Символ «$\Leftrightarrow$» означает «эквивалентно, равносильно».

Буква R означает числовую ось, т.е. $R = (-\infty, \infty)$.

R_+ означает полуось, т.е. $R_+ = [0, \infty)$.

Буква J означает бесконечный полуинтервал, т.е. $J = [t_0, \infty), t_0 \in R.$

Иногда полуинтервал $J = [t_0, \infty), t_0 \in R$ называют полуосью. В этом случае t_0 называется началом полуоси J.

Запись $t \ge t_0$ означает $t \in J$, т.е. $t \ge t_0 \Leftrightarrow t \in J.$

$C^k(J, R)$ - пространство функций, определенных и k раз непрерывно дифференцируемых на полуинтервале J со значениями из $R.$

$L^p(J, R)\ (p > 0)$ - пространство абсолютно интегрируемых на полуинтервале J в p-й степени функций со значениями в $R,$ т.е. $x(t) \in L^p(J, R)\ (p > 0) \Leftrightarrow \int_{t_0}^{\infty} |x(t)|^p dt < \infty\ (p > 0).$ Это означает степенную абсолютную интегрируемость функции $x(t)$ на полуинтервале J.

$L^p(J, R_+)\ (p > 0)$ - пространство неотрицательных функций, интегрируемых на полуинтервале J в p-й степени, т.е.

$$x(t) \in L^p(J, R_+)\ (p > 0) \Leftrightarrow x(t) \ge 0, \int_{t_0}^{\infty} (x(t))^p dt < \infty\ (p > 0).$$

$x(t)=O(1),\, t\in J \Leftrightarrow \exists\, \mathrm{const}\, M>0$ такая, что $|x(t)|\le M$. В этом случае говорят, что функция $x(t)$ ограничена на бесконечном полуинтервале J.

Если $\exists\, \alpha$ - const> 0 такая, что $x(t)=e^{-\alpha t}O(1),\, t\in J,$ то говорят, что функция $x(t)$ стремится к нулю при $t\to\infty$ по экспоненциальному закону.

Если $\exists\, \beta,\gamma$ - const> 0 такие, что $x(t)=(t+\beta)^{-\gamma}O(1),\, t\in J,\, t_0=0,$ то говорят, что функция $x(t)$ стремится к нулю при $t\to\infty$ по степенному закону.

ИДУ - интегро-дифференциальное уравнение.

ДУ - дифференциальное уравнение.

ФДУ - функционально-дифференциальное уравнение.

Функция $g(t)\in C(J,R)$ называется малой, если $g(t)\in L^1(J,R)$.

Функция $G(t,\tau)$, непрерывная при $t\ge\tau\ge t_0$, называется малой, если

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{t}|G(t,\tau)|d\tau dt<\infty \Leftrightarrow \int_{t_0}^{t}|G(t,\tau)|d\tau\in L^1(J,R_+).$$

Если $\int_{t_0}^{\infty}|g(t)|dt=\infty$, то функция $g(t)\in C(J,R)$ называется немалой. В этом случае пишут $g(t)\,\overline{\in}\, L^1(J,R)\Leftrightarrow g(t)\notin L^1(J,R)$.

Функция $G(t,\tau)$, непрерывная при $t\ge\tau\ge t_0$, называется немалой, если $\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{t}|G(t,\tau)|d\tau dt=\infty$.

АС - асимптотическое свойство.

Под АС решений понимается АС решений при $t\in J,\, t\to\infty,$ а именно ограниченность на J, принадлежность пространству $L^p(J,R)\,(p>0)$ и стремление к нулю решений при $t\to\infty$, в том числе по экспоненциальному и степенному закону при $t\to\infty$.

Под устойчивостью решений слабо нелинейного ИДУ k- го порядка понимается ограниченность на полуинтервале J всех его решений и их производных до $k-1$ - го порядка включительно.

Под оценкой и асимптотическим свойством решений ИДУ k- го порядка понимается оценка и асимптотическое свойство на полуинтервале J всех его решений и их производных до $k-1$ - го порядка включительно.

Под асимптотическим представлением на J, функции $x(t)$, понимается соотношение $x(t)=\Phi(t)O(1)$, при этом функция $\Phi(t)\geq 0$ и допускает наложение на нее дополнительных условий, например, типа $\Phi(t)\to 0,\ t\to\infty;\ \Phi(t)\in L^p(J,R)\ (p>0).$ Такое асимптотическое представление эквивалентно следующей оценке функции $x(t)$: $\exists\,\mathrm{const}\,M>0$ такая, что $x(t)=\Phi(t)M,$ где $\Phi(t)\geq 0.$

Условия типа знака функций означают, что на функции налагаются условия, использующие знаки: $>0,\ <0,\ \geq 0,\ \leq 0,\ >,\ \geq,\ <,\ \leq,$ а также условия, связанные посредством символов $\lim,\ \max, \min, \sup,\ \inf$.

Условия типа малости членов означают, что комбинированные функции, на которые налагаются условия, малые. При этом сами функции могут быть немалыми, а их комбинация –малая. Например, $\frac{1}{t+1}$ - немалая, $t+2$ - немалая, $\frac{1}{t+1}:t+2=\frac{1}{(t+1)(t+2)}$ - малая.

Условия типа немалости членов означают условия типа комбинации условий типа знака функций и малости членов. Например, $a(t)=e^t+\frac{\cos 2t}{(t+4)^2},\ t\geq 0,$ где $a_1(t)=e^t>0;\ a_2(t)=\frac{\cos 2t}{(t+4)^2}$ - малая. Здесь функция $a(t)$ удовлетворяет условию типа немалости членов.

Всюду в настоящей работе рассматриваются обыкновенные ДУ и ИДУ.

В диссертации принята тройная нумерация внутри каждого раздела главы. Например, теорема 2.1.1 означает первую теорему раздела 1 главы 2; (3.2.5) - пятая формула раздела 2 главы 3.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы диссертации. Известно что в последнее время в связи с широким применением усилились исследования по развитию теории эволюционных систем. Во введениии книги [10, с. 5] В.Н. Афанасьева, В.Б. Колмановского, В.Р. Носова приведено: «На описательном уровне под эволюционной системой можно понимать техническую, физическую, биологическую, экологическую и любую иную систему, для которой изучаются изменения, протекающие в ней с течением времени. Математически эволюционные системы могут описаться различными способами». Эти же авторы в числе наиболее часто встречающихся классов эволюционных систем и способов их описания указали [10, с. 5]:

непрерывные системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями;

системы с последействием, для описания которых используются функ-ционально - дифференциальные уравнения. Такие системы возникают тогда, когда протекание процесса определяется не только состоянием системы в данный момент, но также и предысторией процесса.

М.В. Федорюк в своей книге [52, с. 9] отметил: «Дифференциальные уравнения, которые интегрируются в квадратурах, никогда не могли удовлетворить потребностей естествознания». Это замечание относится и другим уравнениям, особенно интегро-дифференциальным уравнениям типа Вольтерра на полуоси. Следовательно, как отметил А. Пуанкаре, наряду с исследованиями по приближенным и численным методам решений дифференциальных и вольтеррова типа интегро-дифференциальных уравнений, актуальными являются исследования по качественной теории этих уравнений.

Отметим, что в развитие общей и качественной теории дифференциальных и вольтеррова типа интегро-дифференциальных уравнений существенный вклад внесли такие ученые, как Ж. Лиувилль, Ж. Л. Лагранж, М. Остроградский, А. Пуанкаре, А.М. Ляпунов, В. Вольтерра, Я.В. Быков, Р. Беллман, К.Л. Кук, С.

Corduneanu, Ф. Хартман, В.В. Немыцкий, В.В. Степанов, А.Д. Мышкис, Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон, Л.Э. Эльсгольц, Б.П. Демидович, Л. Чезари, Н.Н. Красовский, В.И. Зубов, Е.А. Барбашин, А.М. Самойленко, Ю.А. Митропольский, М.И. Иманалиев, Ю.А. Ведь, А.И. Боташев, В.Р. Винокуров, К. Какишов, К.А. Алымкулов, П.С. Панков, Г.Р. Ражапов, З.Пахыров, А. Асанов, С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, А.Б. Байзаков, К.А. Касымов, М.К. Дауылбаев, А. Тунгагатаров, Т.М. Алдибеков, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов, Дж. Хейль, Б.С. Разумихина, А.А. Мартынюк, В. Лакшимикантам, С. Лила, А.А. Мартынюк, Н.В. Азбелев, В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматуллина, М.Е. Драхлин, В.А. Кондратьев, И.Т. Кигурадзе, Т.А. Чантурия, Ю.И. Домшлак, Ю.А. Клоков, В.М. Миллионшиков, И.Н. Сергеев, Л.М. Березанский, А.И. Домошницкий, П.М. Симонов, А.В. Чистяков, T.A. Burton, J.A. Nohel,G. Gripenberg, S.- O. Londen, O. Staffans и др. В работах этих ученых созданы новые методы и определены новые направления научных исследований.

Анализ работ других авторов показывает, что наиболее актуальными являются исследования по общей и качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений второго и третьего порядков, а также интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра.

Заметим, что изучение устойчивости протекания процессов с течением времени способствуют развитию качественной теории дифференциальных и интегро- дифференциальных уравнений типа Вольтерра.

В своей статье [2] Н.В. Азбелев, З.Б. Цалюк написали, что «центральным пунктом аналитических методов исследования вопросов качественной теории уравнений является проблема оценки решения уравнения».

Данная диссертационная работа посвящена оценкам и асимптотическим свойствам решений новых классов дифференциальных и вольтеррова типа интегро-дифференциальных уравнений на полуоси.

Связьтемыдиссертациисnúmнаучно-исследовательскимипроектами.
Работавыполненаврамкахпроектов НИР Институтатеоретическойипри-кладнойматематикиНАНКР:«Развитиеиприложениякомпьютерногомоделирова

ния,асимптотическихианалитическихметодоввтеориидинамическихсистем,обратныхиоптимизационныхэкономическихзадачиванализегеофизическихданныхдляоперативногопрогнозаземлетрясений»(2012-2014),номергос.регистрации№ 0005756, «Развитие и приложения компьютерного моделирования, асимптотических, топологических и аналитических методов в теории устойчивости динамических систем, разрешимости обратных задач, экономических и геофизических процессов» (2015-2017), номер гос. регистрации № 0007125 ивключеныvotчетыпоэтимпроектам.

Целиизадачиисследования.Применением и развитиемкачественныхметодов,разработанныхвИТПМНАНКР,получить достаточные условия, обеспечивающие оценки и асимптотические свойства решений новых классов второго и третьего порядков дифференциальных и вольтеррова типа первого, второго, третьего порядков интегро-дифференциальных уравнений на полуоси.ВыявитьвлияниеинтегральныхвозмущенийтипаВольтерранаасимптотические свойства решений соответствующихДУпервогопорядка. Установить достаточные условия асимптотической устойчивости решений линейного однородного вольтеррова ИДУ третьего порядка в случае, когда решения соответствующего линейного однородного ДУ третьего порядка не могут быть асимптотически устойчивыми, т.е. специфической асимптотической устойчивости решений такого уравнения.

Методика исследования. Применяются метод преобразования уравнений, метод весовых функций, метод частичного срезывания, нестандартные методы сведения к системе, метод возведения уравнений в квадрат, метод интегральных неравенств, разработанные в ИТПМ НАН КР.

Научнаяновизна.Получены формулы для решений и установлены достаточные условия для экспоненциальной оценки на полуоси и стремления к нулю при неограниченном возрастании независимой переменной решения задачи Коши для одного класса линейных ДУ и ИДУ второго порядка; оценки и ограниченности на полуоси решения задачи Коши для новых классов линейных ДУ второго и третьего порядков.

Установлены достаточные условия оценки, ограниченности, степенной абсолютной интегрируемости на полуоси, стремления к нулю, в том числе по экспоненциальному и степенному закону, при неограниченном возрастании независимой переменной решений слабо нелинейного ИДУ первого порядка типа Вольтерра в случае, когда решения соответствующего слабо нелинейного ДУ первого порядка могут не обладать соответствующими асимптотическими свойствами; для оценки, ограниченности, степенной абсолютной интегрируемости на полуоси, стремления к нулю, в том числе по экспоненциальному и степенному закону, при неограниченном возрастании независимой переменной всех решений и их первых производных линейного вольтеррова ИДУ второго порядка; специфической асимптотической устойчивости, т.е. асимптотической устойчивости решений линейного однородного ИДУ третьего порядка в случае, когда решения соответствующего линейного однородного ДУ третьего порядка не могут быть асимптотически устойчивыми; асимптотической устойчивости на полуоси решений линейного ИДУ третьего порядка типа Вольтерра в случае, когда коэффициенты и срезанное ядро этого ИДУ могут быть недифференцируемыми в некоторых точках полуоси.

Для получения этих результатов существенно развиты метод преобразования уравнений, метод весовых функций, метод частичного срезывания, нестандартные методы сведения к системе, метод возведения уравнений в квадрат, метод интегральных неравенств.

Теоретическаяипрактическаязначимость.Настоящаяработаноситтеоретическийхарактериеерезультатымогут-найтиприменениевкачественнойтеорииДУ и вольтеррова типа ИДУ;прикачественномисследованиинекоторыхпроцессовизквантовой механики, биологии,медицины,экологии, аэро и космодинамики.

Основныеположениядиссертации,вносимыеназащиту:

– установление достаточных условий ограниченности на полуоси решения одного нового класса линейных ДУ второго порядка с переменными коэффициентами; для экспоненциальной оценки на полуоси решения новых классов линейных ДУ и вольтеррова типа ИДУвторого порядка с переменными коэффициентами с помощью полученной новой формулы их решения;

– получение новой формулырешения иустановление достаточных условий ограниченности на полуоси решения одного нового класса линейных ДУ третьего порядка с переменными коэффициентами на основе разложения линейных дифференциальных операторов третьего порядка.

Установление достаточных условий:

– для оценки, ограниченности, степенной абсолютной интегрируемости на полуоси, стремления к нулю, в том числе по экспоненциальному и степенному закону, при неограниченном возрастании независимой переменной решений слабо нелинейного ИДУ первого порядка типа Вольтерра в случае, когда решения соответствующего слабо нелинейного ДУ первого порядка могут не обладать соответствующими асимптотическими свойствами;
– для оценки, ограниченности, степенной абсолютной интегрируемости на полуоси, стремления к нулю, в том числе по экспоненциальному и степенному закону, при неограниченном возрастании независимой переменной всех решений и их первых производных линейного вольтеррова ИДУ второго порядка;
– специфической асимптотической устойчивости, т.е. асимптотической устойчивости решений линейного однородного ИДУ третьего порядка в случае, когда решения соответствующего линейного однородного ДУ третьего порядка не могут быть асимптотически устойчивыми;
– асимптотической устойчивости на полуоси решений линейного ИДУ третьего порядка типа Вольтерра в случае, когда коэффициенты и срезанное ядро этого ИДУ могут быть недифференцируемыми в некоторых точках полуоси.

Личныйвкладсоискателя.Задачиисследованияпо темедиссертациипоставленынаучнымруководителемС.Искандаровым.Всематериалы,включенныевдиссертацию,принадлежатавтору.

Апробациярезультатовдиссертации.Результатынастоящейработыдоложеныиобсужденына:

- X Международной Азиатской школе-семинаре «Проблемы оптимизации сложных систем»,(25 июля -5 августа 2014 г., с. Булан - Соготту, Иссык-Кульская обл.);
- XI Международной Азиатской школе-семинаре «Проблемы оптимизации сложных систем» (27 июля – 7 августа 2015 г., г. Чолпон-Ата, Иссык-Кульская обл.);
- Международной научной конференции "Актуальные проблемы математики и информатики", посвященной памяти академика НАН РК Касымова Кулжабая Абдыкалыковича (22 дек. 2015 г., г. Алматы, КазНУ им. аль-Фараби, Казахстан);
- V Международной научной конференции "Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике", посвященной 85-летию академика НАН КР и члена-корреспондента РАН М.И. Иманалиева (13 сент. 2016 г., г. Бишкек).

Полнотаотражениярезультатовдиссертациивпубликациях.Основноесодержаниедиссертацииопубликованов10работах[36, 5, 20, 9,8, 21, 59, 6, 7, 37],изних:8статьи[36, 5, 8, 21, 59, 6, 7, 37],2докладавматериалахконференции[20, 9].Всовместныхработах[36, 20, 9, 8, 21,59,37]постановказадачипринадлежитнаучному руководителю С.Искандарову,обсуждение результатов – соавторам, доказательствотеорем,следствийипостроениеиллюстративныхпримеров–автору.

Структураиобъемдиссертации.Диссертационнаяработасостоитизвведения,трехглав,содержащих14 разделов,выводовисписка использованнойлитературыиз 63наименования, 85стр.компьютерноготекста.

Вглаве1,состоящейизтрехразделов,приводятсяобзорблизких работдругихавторовктемедиссертации,леммы о формуле решения линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, о частичном срезывании и об интегральном неравенстве,изаключения.

Глава2,состоящаяизшестиразделов,посвящена вопросам оценки и ограниченности решений линейных дифференциальных и вольтеррова типа интегро-дифференциальных уравнений на полуоси

Вразделе 2.1установленыдостаточныеусловияэкспоненциальной оценки наполуинтервале J решенийлинейного ДУ второго порядка

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t), \qquad t \geq t_0 \tag{2.1.1}$$

с начальными условиями

$$y(t_0) = m, \qquad y'(t_0) = n, m, n \in R. \tag{2.1.2}$$

с помощью доказанной новой формулы решения задачи (2.1.1), (2.1.2).

Вразделе2.2установленыдостаточныеусловияограниченностина J задачи (2.1.1), (2.1.2) на основе формулы решения этой задачи из раздела 2.1.

Вразделе 2.3установленыдостаточныеусловияэкспоненциальной оценки на полуинтервале J решенийлинейного ИДУ второго порядка

$$y'' + p(t)y' + q(t)y + \int_{t_0}^{t} Q(t,s)y(s)ds = f(t), \qquad t \geq t_0 \tag{2.3.1}$$

с начальными условиями

$$y(t_0) = m, \qquad y'(t_0) = n, m, n \in R, \tag{2.3.2}$$

где $p(t)$, $q(t)$, $f(t)$, $Q(t,s)$ - известные функции, исходя из доказанной, аналогичной к разделу 2.1, формулы решения для задачи (2.3.1), (2.3.2).

Вразделе 2.4установлена новая формула для решения следующего линейного ДУ третьего порядка:

$$y''' + a_1(t)y'' + a_2(t)y' + a_3(t)y = f(t), \tag{2.4.1}$$

где $t \in G, G = [t_1, t_2)$ или $G = (t_1, t_2)$, $t_1 < t_2$, $a_1(t), a_2(t), a_3(t)$ и $f(t)$- известные непрерывные функции на G.

Раздел2.5посвящен установлениюдостаточныхусловийограниченностинаполуинтервале $J=[t_0,\infty)$ решенийлинейного ДУ (2.4.1) с помощью новой формулы решения, доказанной в разделе 2.4.

Раздел 2.6содержит анализрезультатовглавы2.

Вглаве3,состоящейизпятиразделов,развивается метод частичного срезывания в сочетании с другими методами для оценки и асимптотических свойств решений интегро-дифференциальных уравнений первого, второго, третьего порядков типа Вольтерра на полуоси.

Вразделе3.1установленыдостаточныеусловиядля оценки, ограниченности на J, степенной абсолютной интегрируемости на полуоси, стремления к нулю, в том числе по экспоненциальному и степенному закону, при $t\to\infty$, принадлежности пространству $L^P(J,R)$ $(p>0)$решений слабо нелинейного ИДУ первого порядка типа Вольтерра

$$x'(t)+a(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)x(\tau)d\tau=f(t)+$$

$$+F(t,x(t),\int_{t_0}^{t}H(t,\tau,x(\tau))d\tau),\ \ t\ge t_0 \qquad (3.1.1)$$

в случае, когда решения соответствующего слабо нелинейного ДУ первого порядка:

$$x'(t)+a(t)x(t)=f(t)+F(t,x(t),0),\quad t\ge t_0 \qquad (3.1.1_0)$$

могут не обладать соответствующими асимптотическими свойствами, при этом на функции $F(t,x,y), H(t,\tau,y)$ налагаются условия «слабой нелинейности»:

$$|F(t,x,y)|\le g(t)|x|+g_1(t)|y|,\ |H(t,\tau,y)|\le h(t,\tau)|y| \qquad (F,H)$$

с неотрицательными коэффициентами $g(t), g_1(t), h(t,\tau)$.

Речь идет о решениях $x(t)\in C^1(J,R)$ ИДУ (1) с любым начальным значением $x(t_0)$. В силу условий (F,H) такие решения ИДУ (3.1.1) существуют.

Вразделе 3.2установлены достаточные условия для оценки, ограниченности на J, степенной абсолютной интегрируемости на полуоси, стремления к нулю, в том числе по экспоненциальному и степенному закону, при $t \to \infty$, принадлежности пространству $L^{p_k}(J,R)$ $(p_k > 0,\ k = 0,1)$ всех решений и их первых производных линейного ИДУ второго порядка типа Вольтерра

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \int_{t_0}^{t} [Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau)]d\tau = f(t),\ t \ge t_0. \qquad (3.2.1)$$

В разделе3.3установлены достаточные условия асимптотической устойчивости решений линейного однородного ИДУ третьего порядка вида

$$x'''(t) - a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) +$$

$$+\int_{t_0}^{t} \left[Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau) + Q_2(t,\tau)x''(\tau)\right]d\tau = 0,\ t \ge t_0 \qquad (3.3.1)$$

при условии:

$a_2(t) \ge 0,$ (a_2)

т.е. в случае, когда решения соответствующего линейного однородного ДУ третьего порядка:

$$x'''(t) - a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = 0,\ t \ge t_0 \qquad (3.3.1_0)$$

не могут быть асимптотически устойчивыми, что подтверждается формулой Остроградского - Лиувилля.

В разделе3.4установленыдостаточные условия асимптотической устойчивости решений линейного ИДУ третьего порядка типа Вольтерра вида

$$x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) +$$

$$+\int_{t_0}^{t} [Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau) + Q_2(t,\tau)x''(\tau)]d\tau = f(t),\ t \ge t_0. \qquad (3.4.1)$$

Речь идет о решениях $x(t) \in C^3(J,R)$ ИДУ (3.4.1) с любыми начальными данными $x^{(k)}(t_0)\ (k = 0,1,2)$. Каждое такое решение существует и оно единственно.

Вразделе3.5приведенанализрезультатамглавы3.

Навсетеоремыинанекоторыеследствияглав2,3построеныиллюстративныепримеры,показывающиевыполнимость полученных условий.

ГЛАВА 1.ОБЗОРРАБОТДРУГИХАВТОРОВПОТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИИВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕМАТЕРИАЛЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕВРАБОТЕ

1.1.Обзор работ по оценкам и асимптотическим свойствам решений дифференциальных и вольтеррова типа интегро-дифференциальных уравнений

В списках литератур монографий Л. Чезари [54], И.Т. Кигурадзе, Т.А. Чантурия [44], В. Вольтерра [15], T.A. Burton' a [57], Дж. Хейла [53], М. Иманалиев [18], G. Gripenberg'a,S. - O. Londen'a andO. Staffans'a [58] , В. Лакшмикантама, С. Лилы и А.А. Мартынюка [47], Н.В. Азбелева, П.М. Симонова [1], С. Искандарова [27] приведены работы многих авторов из стран СНГ и дальнего зарубежья, посвященным оценкам и асимптотическим свойствам на полуоси решений ДУ и вольтеррова типа ИДУ, а также функционально-дифференциальных уравнений, содержащих в себя некоторые классы ДУ и вольтеррова типа ИДУ.

Ниже приводим анализ результатов некоторых работ, наиболее близких к теме настоящей диссертационной работы.

Многие работы посвящены к нахождению формулы для решения ДУ. В частности, работах [56, 42, 17, 63, 60, 61] получены формулы для решения линейных и нелинейных обыкновенных ДУ. Но в общем случае формулы для решения линейныхДУ второго и выше второго порядка не были получены. В работе [61] получены формулы для решения одного класса линейныхДУ второго порядка с переменными коэффициентами.

Всюду ниже речь пойдет о ДУ с переменными коэффициентами.

Статья С.К. Кыдыралиева, А.Б. Урдалетовой [46] посвящена новому методу решения линейного неоднородного ДУ второго порядка введением некоторой вспомогательной функции.

В статье А. Тунгатарова, Д.К. Ахмед-Заки [62] получена формула решения линейного ДУ второго порядка.

В книге М.В. Федорюка [52, с. 309-332] получены различные асимптотические формулы по независимой переменной и по параметрам для решений и их первых производных линейных однородных ДУ второго порядка.

В книге Р.Беллмана [11, с. 204] отмечена возможность получения общего решения одного класса линейных однородных ДУ третьего порядка с помощью общего решения линейного однородного ДУ второго порядка.

В статье С. Искандарова [24] модифицированным методом преобразования уравнений [27, с. 28-29] установлены достаточные условия для оценок и стремления к нулю $t \to \infty$ всех решений и их первых производных линейного однородного ДУ второго порядка в случае, когда коэффициенты этого уравнения могут быть негладкими.

В статье А.К. Каюпова [43] получены оценки и ограниченность на J решений и их первых, второых производных линейного однородного ДУ третьего порядка с построением определяющей функции Н.К. Куликова [45]. В статье Б. Акмагамбетова [3] с помощью метода функций Ляпунова установлены достаточные условия для оценки и устойчивости на J решений однородной системы ДУ третьего порядка.

В книге Д.Р.Меркина [50, с. 232-239] установлены достаточные условия асимптотической устойчивости системы, жесткость и демпфирование которой нелинейны и зависят явно от времени, описываемой нелинейным однородным ДУ второго порядка нестандартным методом сведения к системе и методом функций Ляпунова.

В статье С. Искандарова [25] получены асимптотические представления и свойства решений и их первых и вторых производных одного класса линейных ИДУ третьего порядка методом весовых и срезывающих функций и модифицированным методом преобразования уравнений [27]. Отметим, что соответствующие результаты этой работы новы и для решений и их первых и вторых производных линейных ДУ третьего порядка.

В статье С. Искандарова, Д. Н. Шабданова [38] разработан метод частичного срезывания для исследования ограниченности на J решений неявного вольтеррова ИДУ первого порядка, основы которго заложены в статье С. Искандарова [26]. В дальнейшем этот метод развит в статье С. Искандарова, Д. Н. Шабданова [39] для ИДУ вольтеррова типа с функционалом. В статье С. Искандарова, Д. Н. Шабданова [40] метод частичного срезывания развит для исследования устойчивости решений вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка в сочетании с нестандартным методом сведения к системе [30]. В статье С. Искандарова, Д. Н. Шабданова [41] установлена специфическая оценка решений линейного однородного вольтеррова ИДУ первого порядка. Статья Д. Н. Шабданова [55] посвящена специфическому признаку устойчивости решений линейного однородного ИДУ третьего порядка типа Вольтерра.

Оценки и асимптотические свойства решений ИДУ типа Вольтерра на полуоси исследованы в многочисленных работах других авторов, некоторые из которых можно найти в списке литературы монографии В. Лакшмикантама, С. Лилы и А.А. Мартынюка [47] и монографии С. Искандарова [27]. Особенно много работ по развитию метода сравнения с решениями соответствующих ДУ и ИДУ. В монографии Я.В. Быкова [12, с. 134-136] установлены оценка и стремление к нулю при $t \to \infty$ решений линейных операторных ИДУ типа Вольтерра методом сравнения с решениями невозмущенного операторного ИДУ с параметром. В статье Ю.А. Ведь [13] и статье Г.Ражапова [51] установлены достаточные условия для оценок и асимпттических свойств решений на полуоси линейных и нелинейных, скалярных и векторных ИДУ типа Вольтерра методом сравнения с решениями невозмущенного ДУ. В статье К. Алымкулова, А.Б. Бейшенкулов [4]получены достаточные условия ограниченности решений ИДУ методом преобразования уравнений и интегральных неравенств.

В настоящей диссертационной работе проводятся исследования по оценкам и асимптотическим свойствам решений новых классов второго и третьего порядков дифференциальных и вольтеррова типа первого, второго и третьего порядков ИДУ на полуоси, при этом применяются и развиваются метод преобразования уравнений, метод весовых функций, метод частичного срезывания, нестандартные методы сведения к системе, метод возведения уравнений в квадрат, метод интегральных неравенств, разработанные в ИТПМ НАН КР.

1.2.Леммы о формуле решения линейного дифференциального уравнения второго порядка, о частичном срезывании и об интегральном неравенстве

Приведемнекоторыелеммы, которые будут использоваться в дальнейшем вглавах2,3.

ЛЕММА 1.1.1 [11]. Пусть $t_0 \epsilon G$, функции $p(t)$ и $q(t)$ представимы в виде

$$p\,(t) = 2K(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)},$$

$$q(t) = K^2(t) + \beta^2(t) + K'(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} K(t)\,,$$

где $t \epsilon G$, $G = [t_1, t_2)$ или $G = (t_1, t_2)$, $t_1 < t_2$ и $f(t), K'(t)$, $\beta'(t) \epsilon C(G), \beta(t) \neq 0$ при всех $t \epsilon G$.Тогда общее решение ДУ

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t),$$

записывается в виде

$$y(t) = y_0(t) + \sum_{i=1}^{2} c_i y_i(t), t \epsilon G,$$

где c_1и c_2 - произвольные постоянные,

$$y_0(t) = \int_{t_0}^{t} exp\left\{-\int_{s}^{t} K(\tau)d\tau\right\} \frac{f(s)}{\beta(s)} \sin\left[\int_{s}^{t} \beta(\tau)d\tau\right] ds,$$

$$y_1(t) = exp\left\{-\int_{t_0}^{t} K(s)ds\right\} cos\left[\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds\right],$$

$$y_2(t) = exp\left\{-\int\limits_{t_0}^{t} K(s)ds\right\} sin\left[\int\limits_{t_0}^{t} \beta(s)ds\right].$$

Эта лемма доказана в работе А. Асанова, М.Х.Челика, Р. Асанова [56] как теорема.

Введем предположения и обозначения [27]:

$$K(t,\tau) = \sum_{i=1}^{n} K_i(t,\tau), \qquad (K)$$

$\psi_i(t)$ $(i = 1...n)$– некоторые срезывающие функции, $R_i(t,\tau) \equiv K_i(t,\tau)(\psi_i(t)\psi_i(\tau))^{-1}$, $P_i(t) \equiv K_i(t,t)\left(\psi_i(t)\right)^{-2} \equiv R_i(t,t)$; $M_i(t,\tau) \equiv K_i(t,\tau)\left(\psi_i(\tau)\right)^{-1}$ $(i = 1...n)$ – частично срезанные ядра.

ЛЕММА 1.1.2 [38]. Пусть функции $P_i(t)$, $P_i'(t), R_i(t,\tau), M_{i\tau}'(t,\tau)$ являются непрерывными при $t \ge t_0$ $,t \ge \tau \ge t_0$. Тогда

$$\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s} R_i(s,\tau)y_i(\tau)y_i(s)d\tau ds = \frac{1}{2}P_i(t)\left(X_i(t,t_0)\right)^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} P_i'(s)\left(X_i(s,t_0)\right)^2 ds - \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s} M_{i\tau}'(s,\tau)X_i(\tau,t_0)x'(s)d\tau ds$$

где

$$y_i(t) \equiv \psi_i(t)x'(t),\ X_i(t,t_0) \equiv \int\limits_{t_0}^{t} y_i(\eta) \quad (i = 1...n).$$

Эта лемма доказана в статье С.Искандарова, Д.Н. Шабданова [38] введением функций $\psi_i(t)$ $(i = 1...n)$ во внутреннем интеграле и интегрированием по частям, с учетом обозначений $P_i(t)$, $M_i(t,\tau)$, и лежит на основе метода метода частичного срезывания.

ЛЕММА 1.1.3 [14]. Пусть для неотрицательных и непрерывных функцийu $u(t)$, $\vartheta_k(t), w_k(t,\tau)$ $(k = 0{,}1)$ при $t \ge t_0$, $t \ge \tau \ge t_0$ и неотрицательной постоянной c_* выполняется неравенство

$$u(t) \le c_* + \int_{t_0}^{t} \{\vartheta_0(s)u(s) + \vartheta_1(s)(u(s))^{\frac{1}{2}} + \int\limits_{t_0}^{s} [w_0(s,\tau)u(\tau) +$$

$$+w_1(s,\tau)(u(s))^{\frac{1}{2}}(u(\tau))^{\frac{1}{2}}]d\tau\}ds,\ t \ge t_0.$$

Тогда

$$u(t) \le exp\left[\int_{t_0}^{t} M(s)ds\right]\left\{c_*^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \vartheta_1(s)exp\left[-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{s} M(\eta)\,d\eta\right]ds\right\}^2, t \ge t_0,$$

где

$$M(t) \equiv \vartheta_0(t) + \int_{t_0}^{t}[w_0(t,\tau) + w_1(t,\tau)]d\tau.$$

1.4.Заключениепоглаве1

Приведен обзор и анализ результатов работ других авторов, наиболее близких к теме предлагаемой работы. На основе этого анализа можем утверждать, что исследования по оценкам и другим свойствам решений ДУ и вольтеррова типа ИДУактуальны и имеют определенный теоретический и практический интерес.

Приведены леммы о формуле решения линейного дифференциального уравнения второго порядка, о частичном срезывании и об интегральном неравенстве, которые будут использованы в главах 2, 3настоящей диссертационной работы.

ГЛАВА 2. ОЦЕНКА И ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО- ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПОЛУОСИ

В этой главе все фигурирующие функции от $t, (t,\tau)$ и их производные являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \geq t_0$, $t \geq s \geq t_0$; $J = [t_0, \infty)$; ИДУ - интегро-дифференциальное уравнение; ДУ - дифференциальное уравнение.

2.1. Экспоненциальная оценка решений одного класса линейных дифференциальных уравнений второго порядка на полуоси

Рассмотрим линейное ДУ второго порядка

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t), \qquad t \geq t_0 \tag{2.1.1}$$

с начальными условиями

$$y(t_0) = m, \qquad y'(t_0) = n, m, n \in R. \tag{2.1.2}$$

Предположим выполнения следующих условий:

а) $$q(t) = q_0(t) + q_1(t), t \geq t_0, \tag{2.1.3}$$

$$q_0(t) = K^2(t) + \beta^2(t) + K'(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}K(t), \qquad t \geq t_0, \tag{2.1.4}$$

$$K(t) = \frac{1}{2}\left[p(t) + \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\right], \tag{2.1.5}$$

где $q_0(t), q_1(t), K(t), p(t), f(t), \beta(t), K'(t), \beta'(t)$ - известные функции, причем $\beta(t) > 0$ и $K(t) \geq 0$;

б) $exp\left\{\int_{t_0}^{t} K(\tau)d\tau\right\}\frac{f(t)}{\beta(t)}, \ \frac{q_1(t)}{\beta(t)} \in L^1(J, R)$.

Подставляя (2.1.3) в (2.1.1) имеем

$$y'' + p(t)y' + q_0(t)y = f(t) - q_1(t)y, \qquad t \geq t_0. \tag{2.1.6}$$

Учитывая (2.1.2), (2.1.4), (2.1.5) и формулу (17) работы [56] или лемму 1.1.1, из (2.1.6) получим

$$y(t) = my_1(t) + \frac{1}{\beta(t_0)}[K(t_0)m + n]y_2(t) + y_3(t), \tag{2.1.7}$$

где

$$y_1(t) = exp\left\{-\int_{t_0}^{t} K(s)ds\right\}cos\left[\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds\right], \tag{2.1.8}$$

$$y_2(t) = exp\left\{-\int_{t_0}^{t} K(s)ds\right\}sin\left[\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds\right], \tag{2.1.9}$$

$$y_3(t) = \int_{t_0}^{t} exp\left\{-\int_{s}^{t} K(\tau)d\tau\right\}\frac{f(s) - q_1(s)y(s)}{\beta(s)}sin\left[\int_{s}^{t} \beta(\tau)d\tau\right]ds, \tag{2.1.10}$$

Подставляя (2.1.8), (2.1.9) и (2.1.10) в (2.1.7), имеем

$$y(t) = mexp\left\{-\int_{t_0}^{t} K(s)ds\right\}cos\left[\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds\right] +$$

$$+\frac{1}{\beta(t_0)}[K(t_0)m + n]exp\left\{-\int_{t_0}^{t} K(s)ds\right\}sin\left[\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds\right] +$$

$$+\int_{t_0}^{t} exp\left\{-\int_{s}^{t} K(\tau)d\tau\right\}\frac{f(s)}{\beta(s)}sin\left[\int_{s}^{t} \beta(\tau)d\tau\right]ds -$$

$$-\int_{t_0}^{t} exp\left\{-\int_{s}^{t} K(\tau)d\tau\right\}\frac{q_1(s)}{\beta(s)}sin\left[\int_{s}^{t} \beta(\tau)d\tau\right]y(s)ds. \tag{2.1.11}$$

Умножая уравнение (2.1.11) на $exp\left\{\int_{t_0}^{t} K(s)ds\right\}$ и вводя обозначения

$$F(t) = mcos\left[\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds\right] + \frac{1}{\beta(t_0)}[K(t_0)m + n]sin\left[\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds\right] +$$

$$+\int_{t_0}^{t} exp\left\{\int_{t_0}^{s} K(\tau)d\tau\right\}\frac{f(s)}{\beta(s)} sin\left[\int_{s}^{t} \beta(\tau)d\tau\right]ds, \qquad (2.1.12)$$

$$z(t) = y(t)exp\left\{\int_{t_0}^{t} K(s)ds\right\}, t \geq t_0\,, \qquad (2.1.13)$$

получаем

$$z(t) = F(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{q_1(s)}{\beta(s)} sin\left[\int_{s}^{t} \beta(\tau)d\tau\right] z(s)ds\,, t \geq t_0. \qquad (2.1.14)$$

ТЕОРЕМА 2.1.1.Пусть выполняются условия а) и б). Тогда решение $y(t)$задачи Коши (2.1.1)-(2.1.2) удовлетворяет следующей оценке:

$$|y(t)| \leq c_2 exp\left\{-\int_{t_0}^{t} K(s)ds\right\}, t \geq t_0\,, \qquad (2.1.15)$$

где

$$c_2 = c_1 exp\left\{\int_{t_0}^{t} \left|\frac{q_1(s)}{\beta(s)}\right| |y(s)|ds\right\},$$

$$c_1 = |m| + \frac{1}{\beta(t_0)}|K(t_0)m + n| + \int_{t_0}^{t} exp\left\{\int_{t_0}^{s} K(\tau)d\tau\right\}\left|\frac{f(s)}{\beta(s)}\right| ds. \qquad (2.1.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая (2.1.16) из (2.1.12) имеем

$$|F(t)| \leq |m| + \frac{1}{|\beta(t_0)|}|K(t_0)m + n| +$$

$$+\int_{t_0}^{t} exp\left\{\int_{t_0}^{s} K(\tau)d\tau\right\}\left|\frac{f(s)}{\beta(s)}\right| ds \leq c_1, \qquad t \geq t_0. \qquad (2.1.17)$$

В силу (2.1.17) из (2.1.14) получим

$$|z(t)| \leq c_1 + \int_{t_0}^{t} \left|\frac{q_1(s)}{\beta(s)}\right| |z(s)|ds\,, \qquad t \geq t_0. \qquad (2.1.18)$$

Применяя неравенство Гронуолла-Беллмана, из (2.1.18) имеем

$$|z(t)| \leq c_1 exp\left\{\int_{t_0}^{t}\left|\frac{q_1(s)}{\beta(s)}\right| ds\right\} \leq c_2, \qquad t \geq t_0. \tag{2.1.19}$$

Учитывая (2.1.19), из (2.1.14) получим оценку (2.1.15). Теорема2.1.1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.1.1.Пустьвыполняются условия а), б) и $K(t) \geq \propto > 0$, $\propto$ - постоянная. Тогда для решения задача Коши (2.1.1) - (2.1.2) справедлива следующая оценка:

$$|y(t)| \leq c_2 exp\{-\propto (t - t_0)\}, \qquad t \geq t_0.$$

ПРИМЕР 2. 1.1.Рассмотрим уравнение (2.1) для $t_0 = 0$,

$$q(t) = q_0(t) + q_1(t), \qquad t \geq 0,$$

$$q_0(t) = \propto p(t) - \propto^2 + a^2 \exp\left\{4 \propto t - 2\int p(t)dt\right\},$$

$$q_1(t) = \frac{K_1 \exp[2 \propto t]}{(t+\beta_0)^2} exp\left\{-\int p(t)dt\right\},$$

$$f(t) = \frac{f_0 \exp[\propto t]}{(t+\beta_1)^3} exp\left\{-\int p(t)dt\right\}, t \geq 0,$$

где $\propto, a, K_1,\ f_0,\ \beta_0,\ \beta_1$ - известные постоянные,$\propto > 0,\ \beta_0 > 0,\ \beta_1 > 0$, $a \neq 0, p(t)$- произвольная известная функция ,

$$K(t) = \propto, \beta(t) = a exp\left\{2 \propto t - \int p(t)dt\right\}, t \geq 0,$$

$$\beta'(t) = \beta(t)[2 \propto - p(t)], \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} = 2 \propto - p(t),$$

$$q_0(t) = K^2(t) + \beta^2(t) + K'(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} K(t) =$$

$$=\propto^2 + a^2 \exp\left[4 \propto t - 2\int p(t)dt\right] - [2 \propto - p(t)] \propto =$$

$$\propto p(t) - \propto^2 + a^2 \exp\left\{4 \propto t - \int p(t)dt\right\},$$

$$K(t) = \frac{1}{2}\left[p(t) + \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\right] = \frac{1}{2} \cdot 2 \propto = \propto,$$

$$\frac{q_1(t)}{\beta(t)} = \frac{K_1}{a(\,t + \beta_0)^2} \in L_1(0, \infty),$$

$$exp\left\{\int_0^t K(\tau)d\tau\right\}\frac{f(t)}{\beta(t)} = \frac{f_0}{a(\,t + \beta_1)^3} \in L_1(0, \infty).$$

Отсюда видно, что в этом примере 2.1. 1 все условия следствия 2.1.1 теоремы 2.1.1 выполняются.

ПРИМЕР 2.1.2.Рассмотрим задачи (2.1.1)-(2.1.2), для $t_0 = 0, p(t) = 0$ при $t \epsilon [0, \infty)$,

$$q(t) = q_0(t) + q_1(t), t \epsilon [0, \infty),$$

$$q_0(t) = -\propto^2 + a^2 \exp\{4 \propto t\},$$

$$q_1(t) = \frac{K_1 \exp[2 \propto t]}{(t + \beta_0)^{\propto_0}}, f(t) = \frac{f_0 \exp[\propto t]}{(t + \beta_1)^{\propto_1}}, t \geq 0,$$

где $\propto$, a, K_1, f_0, β_0, β_1, $\propto_0$, $\propto_1$ - известные постоянные, $\propto > 0$, $\propto_0 > 1$, $\propto_1 > 1$, $a \neq 0$, $\beta_0 > 0$, $\beta_1 > 0$.

В этом случае

$$K(t) = \propto, \beta(t) = aexp[2 \propto t], t \geq 0,$$

$$\beta'(t) = 2 \propto \beta(t); \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} = 2 \propto,$$

$$q_0(t) = K^2(t) + \beta^2(t) + K'(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}K(t) =$$

$$= \propto^2 + a^2 \exp[4 \propto t] - 2 \propto^2 = - \propto^2 + a^2 \exp[4 \propto t],$$

$$K(t) = \frac{1}{2}\left[p(t) + \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\right] = \frac{1}{2} \cdot 2 \propto = \propto, t \geq 0,$$

$$\frac{q_1(t)}{\beta(t)} = \frac{K_1}{a}(\,t+\beta_0)^{-\alpha_0} \in L^1(R_+,R),$$

$$exp\left\{\int_0^t K(\tau)d\tau\right\}\frac{f(t)}{\beta(t)} = \frac{f_0}{a}(\,t+\beta_1)^{-\alpha_1} \in L^1(R_+,R).$$

Таким образом, в этом примере 2.1.2 все условия следствия 2.1.1 теоремы 2.1.1 выполняются.

2.2. Ограниченность решений одного класса линейных дифференциальных уравнений второго порядка на полуоси

Рассмотрим линейное ДУ второго порядка

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t), \qquad t \geq t_0, \tag{2.2.1}$$

с начальными условиями

$$y(t_0) = m, \qquad y'(t_0) = n, m, n \in R. \tag{2.2.2}$$

Предположим выполнения следующих условий:

а) $$q(t) = q_0(t) + q_1(t), t \geq t_0, \tag{2.2.3}$$

$$q_0(t) = K^2(t) + \beta^2(t) + K'(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}K(t), t \geq t_0, \tag{2.2.4}$$

$$K(t) = \frac{1}{2}\left[p(t) + \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\right], \tag{2.2.5}$$

где $q_0(t), q_1(t), K(t), p(t), f(t), \beta(t), K'(t), \ \beta'(t)$ - известные функции $,\beta(t) > 0$;

б) $\frac{f(t)}{\beta(t)}, \ \frac{q_1(t)}{\beta(t)} \in L^1(\,J\,, R)$.

Подставляя (2.2.3) в (2.2.1) имеем

$$y'' + p(t)y' + q_0(t)y = f(t) - q_1(t)y, t \geq t_0. \tag{2.2.6}$$

Учитывая (2.2.2), (2.2.4), (2.2.5) и формулу (17) работы [56] или лемму 1.1.1, из (2.2.6) получим

$$y(t) = my_1(t) + \frac{1}{\beta(t_0)}[K(t_0)m + n]y_2(t) + y_3(t), \tag{2.2.7}$$

где

$$y_1(t) = exp\left\{-\int_{t_0}^{t} K(s)ds\right\} cos\left[\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds\right], \tag{2.2.8}$$

$$y_2(t) = exp\left\{-\int_{t_0}^{t} K(s)ds\right\} sin\left[\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds\right], \tag{2.2.9}$$

$$y_3(t) = \int_{t_0}^{t} exp\left\{-\int_{s}^{t} K(\tau)d\tau\right\} \frac{f(s) - q_1(s)y(s)}{\beta(s)} sin\left[\int_{s}^{t} \beta(\tau)d\tau\right] ds, \tag{2.2.10}$$

Подставляя (2.2.8), (2.2.9) и (2.2.10) на (2.2.7) получим

$$y(t) = mexp\left\{-\int_{t_0}^{t} K(s)ds\right\} cos\left[\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds\right] +$$

$$+\frac{1}{\beta(t_0)}[K(t_0)m + n]exp\left\{-\int_{t_0}^{t} K(s)ds\right\} sin\left[\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds\right] +$$

$$+\int_{t_0}^{t} exp\left\{-\int_{s}^{t} K(\tau)d\tau\right\} \frac{f(s)}{\beta(s)} sin\left[\int_{s}^{t} \beta(\tau)d\tau\right] ds -$$

$$-\int_{t_0}^{t} exp\left\{-\int_{s}^{t} K(\tau)d\tau\right\} \frac{q_1(s)}{\beta(s)} sin\left[\int_{s}^{t} \beta(\tau)d\tau\right] y(s)ds. \tag{2.2.11}$$

Вводя обозначения

$$F(t) = mcos\left[\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds\right] exp\left\{-\int_{t_0}^{t} K(s)ds\right\}$$

$$+\frac{1}{\beta(t_0)}[K(t_0)m + n]sin\left[\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds\right] exp\left\{-\int_{t_0}^{t} K(s)ds\right\} +$$

$$+\int_{t_0}^{t} exp\left\{-\int_{s}^{t} K(\tau)d\tau\right\}\frac{f(s)}{\beta(s)} sin\left[\int_{s}^{t}\beta(\tau)d\tau\right]ds, \qquad (2.2.12)$$

уравнение (2.2.11) запишем в следующем виде

$$y(t) = F(t) + \int_{t_0}^{t} exp\left\{-\int_{s}^{t} K(\tau)d\tau\right\}\frac{q_1(s)}{\beta(s)} sin\left[\int_{s}^{t}\beta(\tau)d\tau\right]y(s)ds, t \geq t_0. \quad (2.2.13)$$

ТЕОРЕМА 2.2.1.Пусть выполняются условия а) , б) и $K(t) \geq 0$. Тогда решение $y(t)$задачи Коши (2.2.1)-(2.2.2) ограничено на полуинтервале J
и справедлива оценка:

$$|y(t)| \leq c_1 exp\left\{\int_{t_0}^{t}\left|\frac{q_1(s)}{\beta(s)}\right|ds\right\}, \qquad t \geq t_0, \qquad (2.2.14)$$

где

$$c_1 = |m| + \frac{1}{\beta(t_0)}|K(t_0)m + n| + \int_{t_0}^{\infty}\left|\frac{f(s)}{\beta(s)}\right|ds. \qquad (2.2.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая (2.2.15) из (2.2.12) имеем

$$|F(t)| \leq |m| + \frac{1}{|\beta(t_0)|}|K(t_0)m + n| +$$

$$+\int_{t_0}^{t} exp\left\{\int_{t_0}^{s} K(\tau)d\tau\right\}\left|\frac{f(s)}{\beta(s)}\right|ds \leq c_1, \qquad t \geq t_0. \qquad (2.2.16)$$

В силу (2.2.15), из (2.2.13) получим

$$|y(t)| \leq c_1 + \int_{t_0}^{t}\left|\frac{q_1(s)}{\beta(s)}\right||y(s)|ds, \qquad t \geq t_0. \qquad (2.2.17)$$

Применяя неравенство Гронуолла-Беллмана, из (2.2.17) получим оценку (2.2.14). Теорема 2.2.1 доказана.

ТЕОРЕМА 2.2.2.Пусть выполняются условия а), б) и$\left|\int_{t_0}^{t} K(\tau)d\tau\right| \leq c_2$ при всех $t \geq t_0$. Тогда решение $y(t)$задачи Коши (2.2.1)-(2.2.2) ограниченно на J и справедлива оценка:

$$|y(t)| \leq c_3 exp\left\{\exp(2\,c_2)\int_{t_0}^{t}\left|\frac{q_1(s)}{\beta(s)}\right|ds\right\}, t \geq t_0, \quad (2.2.18)$$

где

$$c_3 = \exp(\,c_2)\left[|m| + \frac{1}{\beta(t_0)}|K(t_0)m + n| + \exp(\,c_2)\int_{t_0}^{\infty}\left|\frac{f(s)}{\beta(s)}\right|ds\right].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условий теоремы 2.2.2, из (2.2.12) имеем

$$|F(t)| \leq \exp(c_2)\left[|m| + \frac{1}{\beta(t_0)}|K(t_0)m + n| + \exp(c_2)\int_{t_0}^{t}\left|\frac{f(s)}{\beta(s)}\right|ds\right] \leq$$

$$\leq c_3, \qquad t \geq t_0. \qquad (2.2.19)$$

Учитывая (2.2.19), из (2.2.17) получим

$$|y(t)| \leq c_3 + \exp(2\,c_2)\int_{t_0}^{t}\left|\frac{q_1(s)}{\beta(s)}\right||y(s)|ds, \qquad t \geq t_0.$$

Отсюда применяя неравенство Гронуолла-Беллмана, имеем оценку (2.2.18). Теорема 2.2.2. доказана.

ПРИМЕР 2.2.1.Рассмотрим уравнение (2.2.1) для $t_0 = 0$,

$$q(t) = q_0(t) + q_1(t), t \geq 0,$$

$$q_0(t) = K_0 p(t) - K_0{}^2 + a^2 \exp\left\{4\,K_0 t - 2\int p(t)dt\right\},$$

$$q_1(t) = \frac{K_1 \exp[2\,K_0 t]}{(t+1)^2} exp\left\{-\int p(t)dt\right\},$$

$$f(t) = \frac{f_0 \exp[\,2K_0 t]}{(t+2)^3} exp\left\{-\int p(t)dt\right\}, t \geq 0,$$

где $K_0, a, K_1,\ f_0$ - известные постоянные, $K_0 \geq 0, a > 0$,

$p(t)$- произвольная известная функция,

$$K(t) = K_0, \beta(t) = aexp\left\{2\ K_0 t - \int p(t)dt\right\}, t \geq 0,$$

$$\beta'(t) = \beta(t)[2\ K_0 - p(t)], \qquad \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} = 2\ K_0 - p(t),$$

$$q_0(t) = K^2(t) + \beta^2(t) + K'(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} K(t) =$$

$$= {K_0}^2 + a^2 \exp\left[4\ K_0 t - 2\int p(t)dt\right] - [2\ K_0 - p(t)]\ K_0 =$$

$$K_0 p(t) - {K_0}^2 + a^2 \exp\left\{4\ K_0 t - \int p(t)dt\right\},$$

Отсюда видно, что в этом примере 2.2.1 выполняется.условие а) теоремы 2.2.1. Проверим выполнение условия б):

$$\frac{q_1(t)}{\beta(t)} = \frac{K_1}{a(\ t+1\ \ )^2} \in L^1(R_+, R),$$

$$\frac{f(t)}{\beta(t)} = \frac{f_0}{a(\ t+2\ \ )^3} \in L^1(R_+, R).$$

Таким образом, выполняются условия а) и б) теоремы 2.2.1. Поэтому все решения ДУ (2.2.1) ограничены на R_+.

ПРИМЕР 2.2.2.Рассмотрим задачи (2.2.1)-(2.2.2) для $t_0 = 0$,

$$q(t) = q_0(t) + q_1(t),$$

где $q_0(t)$,

$$q_0(t) = -\propto^2 + a^2 \exp\{4 \propto t\},$$

$$q_1(t) = \frac{K_1 \exp[2 \propto t]}{(t+\beta_0)^{\propto_0}}, f(t) = \frac{f_0 \exp[\propto t]}{(t+\beta_1)^{\propto_1}},$$

где $\propto,\ a,\ K_1,\ f_0,\ \beta_0,\ \beta_1,\ \propto_0,\ \propto_1$ - известные постоянные, $\propto > 0,\ \propto_0 > 1,\ \propto_1 > 1,\ a \neq 0,\ \beta_0 > 0,\ \beta_1 > 0$.

В этом случае

$$K(t) = \propto, \beta(t) = aexp[2 \propto t],$$

$$\beta'(t) = 2 \propto \beta(t);\ \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} = 2 \propto,$$

$$q_0(t) = K^2(t) + \beta^2(t) + K'(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} K(t) =$$

$$= \propto^2 + a^2 \exp[4 \propto t] - 2 \propto^2 = - \propto^2 + a^2 \exp[4 \propto t],$$

$$K(t) = \frac{1}{2}\left[p(t) + \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\right] = \frac{1}{2} \cdot 2 \propto = \propto,$$

$$\frac{q_1(t)}{\beta(t)} = \frac{K_1}{a}(\, t + \beta_0)^{-\propto_0} \in L^1(R_+, R),$$

$$exp\left\{\int_0^t K(\tau)d\tau\right\}\frac{f(t)}{\beta(t)} = \frac{f_0}{a}(\, t + \beta_1)^{-\propto_1} \in L^1(R_+, R).$$

Таким образом, в этом примере 2.2.2 все условия теоремы 2.2.2 выполняются.

2.3.Экспоненциальная оценка решений одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка на полуоси

Рассмотрим линейное ИДУ второго порядка

$$y'' + p(t)y' + q(t)y + \int_{t_0}^t Q(t,s)y(s)ds = f(t), \qquad t \geq t_0 \qquad (2.3.1)$$

с начальными условиями

$$y(t_0) = m, \qquad y'(t_0) = n, m, n \in R, \qquad (2.3.2)$$

где *p(t), q(t), f(t)*, *Q(t,s)* - известные функции.

Предположим выполнения следующих условий:

а) $q(t) = q_0(t) + q_1(t), t \geq t_0,$ (2.3.3)

$$q_0(t) = K^2(t) + \beta^2(t) + K'(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} K(t), t \geq t_0, \qquad (2.3.4)$$

$$K(t) = \frac{1}{2}\left[p(t) + \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\right], \qquad (2.3.5)$$

где $q_0(t), q_1(t), K(t), p(t), f(t), \beta(t)$ - известные функции, $\beta(t) > 0$ и $K(t) \geq 0, K'(t)$ и $\beta'(t)$ - производные функции соответственно $K(t)$ и$\beta(t)$.

б) $exp\left\{\int_{t_0}^{t} K(\tau)d\tau\right\}\frac{f(t)}{\beta(t)},\ \frac{q_1(t)}{\beta(t)} \in L^1(J, R)$,

$$\int_{s}^{\infty} \frac{|Q(\tau,s)|}{\beta(\tau)} \exp\left\{-\int_{\tau}^{s} \mathrm{K}(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}\mathrm{d}\tau \leq M(s), \qquad M(s) \in L^1(J, R_+).$$

Подставляя (2.3.3) в (2.3.1) имеем

$$y'' + p(t)y' + q_0(t)y = f(t) - q_1(t)y - \int_{t_{0}}^{t} Q(t,s)y(s)ds,\ t \geq t_0. \tag{2.3.6}$$

Учитывая (2.3.2), (2.3.4), (2.3.5) и формулу (17) работы [5] или лемму 1.1.1, из (2.3.6) получим

$$y(t) = my_1(t) + \frac{1}{\beta(t_0)}[K(t_0)m + n]y_2(t) + y_3(t), \tag{2.3.7}$$

где

$$y_1(t) = exp\left\{-\int_{t_0}^{t} K(s)ds\right\} cos\left[\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds\right], \tag{2.3.8}$$

$$y_2(t) = exp\left\{-\int_{t_0}^{t} K(s)ds\right\} sin\left[\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds\right], \tag{2.3.9}$$

$$y_3(t) = \int_{t_0}^{t} exp\left\{-\int_{s}^{t} K(\tau)d\tau\right\}\left[\frac{f(s) - q_1(s)y(s)}{\beta(s)} - \frac{1}{\beta(s)}\int_{t_{0}}^{s} Q(s,t)y(t)dt\right] sin\left[\int_{s}^{t} \beta(\tau)d\tau\right] ds. \tag{2.3.10}$$

Подставляя (2.3.8), (2.3.9)и (2.3.10) на (2.3.7) и применяя формулу Дирихле, получим

$$y(t) = mexp\left\{-\int_{t_0}^{t} K(s)ds\right\} cos\left[\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds\right] +$$

$$+\frac{1}{\beta(t_0)}[K(t_0)m+n]exp\left\{-\int_{t_0}^{t}K(s)ds\right\}sin\left[\int_{t_0}^{t}\beta(s)ds\right]+$$

$$+\int_{t_0}^{t}exp\left\{-\int_{s}^{t}K(\tau)d\tau\right\}\frac{f(s)}{\beta(s)}sin\left[\int_{s}^{t}\beta(\tau)d\tau\right]ds-$$

$$-\int_{t_0}^{t}exp\left\{-\int_{s}^{t}K(\tau)d\tau\right\}\left[\frac{q_1(s)}{\beta(s)}y(s)+\frac{1}{\beta(s)}\int_{t_0}^{s}Q(s,t)y(t)dt\right]\times$$

$$\times sin\left[\int_{s}^{t}\beta(\tau)d\tau\right]ds. \qquad (2.3.11)$$

Умножая уравнение (2.3.11) на $exp\left\{\int_{t_0}^{t}K(s)ds\right\}$, вводя обозначения

$$F(t)=mcos\left[\int_{t_0}^{t}\beta(s)ds\right]+\frac{1}{\beta(t_0)}[K(t_0)m+n]sin\left[\int_{t_0}^{t}\beta(s)ds\right]+$$

$$+\int_{t_0}^{t}exp\left\{\int_{t_0}^{s}K(\tau)d\tau\right\}\frac{f(s)}{\beta(s)}sin\left[\int_{s}^{t}\beta(\tau)d\tau\right]ds, \qquad (2.3.12)$$

$$z(t)=y(t)exp\left\{\int_{t_0}^{t}K(s)ds\right\},t\geq t_0. \qquad (2.3.13)$$

и применяя формулу Дирихле, получаем

$$z(t)=F(t)+\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{q_1(s)}{\beta(s)}sin\left[\int_{s}^{t}\beta(\tau)d\tau\right]+\right.$$

$$\left.+\int_{s}^{t}\frac{Q(\tau,s)}{\beta(\tau)}exp\left\{-\int_{\tau}^{s}K(\tau)\,d\tau\right\}sin\left[\int_{\tau}^{t}\beta(\tau)d\tau\right]d\tau\right\}z(s)ds. \qquad (2.3.14)$$

ТЕОРЕМА 2.3.1.Пусть выполняются условия а) и б). Тогда решение $y(t)$задачи Коши (2.3,1)-(2.3.2) удовлетворяет следующей оценке:

$$|y(t)|\leq c_2exp\left\{-\int_{t_0}^{t}K(s)ds\right\},t\geq t_0, \qquad (2.3.15)$$

где

$$c_2 = c_1 exp\left\{\int_{t_0}^{\infty}\left[\left|\frac{q_1(s)}{\beta(s)}\right| + M(s)\right]ds\right\},$$

$$c_1 = |m| + \frac{1}{\beta(t_0)}|K(t_0)m+n| + \int_{t_0}^{t} exp\left\{\int_{t_0}^{s}K(\tau)d\tau\right\}\left|\frac{f(s)}{\beta(s)}\right|ds. \qquad (2.3.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.Учитывая (2.3.16) из (2.3.12) имеем

$$|F(t)| \le |m| + \frac{1}{|\beta(t_0)|}|K(t_0)m+n| +$$

$$+\int_{t_0}^{t} exp\left\{\int_{t_0}^{s}K(\tau)d\tau\right\}\left|\frac{f(s)}{\beta(s)}\right|ds \le c_1, \qquad t \ge t_0. \qquad (2.3.17)$$

В силу (2.3.17), из (2.3.14) получим

$$|z(t)| \le c_1 + \int_{t_0}^{t}\left[\left|\frac{q_1(s)}{\beta(s)}\right| + M(s)\right]|z(s)|ds, \qquad t \ge t_0. \qquad (2.3.18)$$

Применяя неравенство Гроноулла-Беллмана, из(2.3.18) имеем

$$|z(t)| \le c_1 exp\left\{\int_{t_0}^{t}\left[\left|\frac{q_1(s)}{\beta(s)}\right| + M(s)\right]ds\right\} \le c_2, \qquad t \ge t_0. \qquad (2.3.19)$$

Учитывая (2.3.19), из (2.3.14) получим оценку (2.3.15). Теорема 2.3.1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.3.1.Пусть выполняются условия а), б) и $K(t) \ge \propto > 0, \propto$ - постоянная. Тогда для решения задача Коши (2.3.1)-(2.3.2) справедлива следующая оценка

$$|y(t)| \le c_2 exp\{-\propto (t-t_0)\}, \qquad t \ge t_0.$$

ПРИМЕР 2.3.1.Рассмотрим задачи (2.3.1)-(2.3.2) для $t_0 = 0, p(t) = 0$,

$$q(t) = q_0(t) + q_1(t),$$

$$q_0(t) = -\propto^2 + a^2 \exp\{4 \propto t\},$$

$$q_1(t) = \frac{K_1 \exp[2 \propto t]}{(t+\beta_0)^{\propto_0}}, f(t) = \frac{f_0 \exp[\propto t]}{(t+\beta_1)^{\propto_1}},$$

$$Q(t,s) = a_0 \exp\{\gamma(t+s)\},$$

где $\propto,\ a, a_0, K_1, f_0,\ \beta_0, \beta_1,\ \gamma, \propto_0,\ \propto_1$ - известные постоянные, $\propto > 0,\ \propto_0 > 1,\ \propto_1 > 1,\ a > 0, \beta_0 > 0, \beta_1 > 0, a_0 \ne 0, \gamma < \propto$.

В этом случае

$$K(t) = \propto, \beta(t) = aexp[2 \propto t],$$

$$\beta'(t) = 2 \propto \beta(t); \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} = 2 \propto,$$

$$q_0(t) = K^2(t) + \beta^2(t) + K'(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} K(t) =$$

$$= \propto^2 + a^2 \exp[4 \propto t] - 2 \propto^2 = - \propto^2 + a^2 \exp[4 \propto t],$$

$$K(t) = \frac{1}{2}\left[p(t) + \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\right] = \frac{1}{2} \cdot 2 \propto = \propto,$$

$$\frac{q_1(t)}{\beta(t)} = \frac{K_1}{a}(\, t + \beta_0)^{-\propto_0} \in L^1(R_+, R),$$

$$exp\left\{\int_0^t K(\tau)d\tau\right\}\frac{f(t)}{\beta(t)} = \frac{f_0}{a}(\, t + \beta_1)^{-\propto_1} \in L^1(R_+, R),$$

$$\int_s^\infty \frac{|Q(\tau,s)|}{\beta(\tau)} exp\left\{-\int_\tau^s K(\tau)d\tau\right\} d\tau \le \frac{|a_0|}{\alpha - \gamma} e^{-\alpha(\alpha-\gamma)s} = M(s) \epsilon L^1(R_+, R_+).$$

Таким образом, в этом примере все условия следствия 2.3.1 теоремы 2.3.1 выполняются.

2.4. Формулы для решения одного класса линейных дифференциальных уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y''' + a_1(t)y'' + a_2(t)y' + a_3(t)y = f(t), \tag{2.4.1}$$

где $t \in G, G = [t_1, t_2)$ или $G = (t_1, t_2)$, $t_1 < t_2$, $a_1(t), a_2(t), a_3(t)$ и $f(t)$- известные непрерывные функции на G.

ТЕОРЕМА 2.4.1.Пусть $t_0 \epsilon\, G$ функции $a_1(t), a_2(t)$ и $a_3(t)$ представимы в виде

$$a_1(t) = \propto (t) + 2K(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)},$$

$$a_2(t) = 3K'(t) - \beta''(t)\beta^{-1}(t) + (\beta'(t))^2\beta^{-2}(t) + \propto (t)\left[2K(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\right] +$$

$$+K^2(t) + \beta^2(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}K(t),$$

$$a_3(t) = 2K(t)K'(t) + 2\beta(t)\beta'(t) + K''(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}K'(t) - \frac{\beta''(t)}{\beta(t)}K(t) +$$

$$+\left(\beta'(t)\right)^2\beta^{-2}(t)K(t) + \propto (t)\left[K^2(t) + \beta^2(t) + K'(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}K(t)\right],$$

где $t \in G$ и $f(t), K''(t), \beta''(t), \propto (t) \in C(G), \beta(t) \neq 0$ при всех $t \in G$. Тогда общее решение дифференциального уравнения (2.4.1) записывается в виде

$$y(t) = y_0(t) + \sum_{i=1}^{3} c_i y_i(t), t \in G, \quad (2.4.2)$$

где c_1, c_2 и c_3 - произвольные постоянные,

$$y_0(t) = \int_{t_0}^{t} exp\left\{-\int_{s}^{t} K(\tau)d\tau\right\}\frac{1}{\beta(s)}\left\{\int_{t_0}^{s} e^{-\int_{\tau}^{s}\propto(\tau)d\tau} f(\tau)d\tau\right\}\sin\left[\int_{s}^{t}\beta(\tau)d\tau\right]ds,$$

$$y_1(t) = exp\left\{-\int_{t_0}^{t} K(s)ds\right\}cos\left[\int_{t_0}^{t}\beta(s)ds\right],$$

$$y_2(t) = exp\left\{-\int_{t_0}^{t} K(s)ds\right\}sin\left[\int_{t_0}^{t}\beta(s)ds\right],$$

$$y_3(t) = \int_{t_0}^{t}\frac{1}{\beta(s)}exp\left\{-\int_{s}^{t} K(\tau)d\tau - \int_{t_0}^{s}\propto (\tau)d\tau\right\}\sin\left[\int_{s}^{t}\beta(\tau)d\tau\right]ds,$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В этом случае, в силу условия теоремы 2.4.1 дифференциальное уравнение (2.4.1) можно записать в виде

$$\left(\frac{d}{dt} + \propto (t)\right)[y'' + p(t)y' + q(t)y] = f(t), \ \ t \in (t_1, t_2), \quad (2.4.3)$$

где

$$\begin{cases} p(t) = 2K(t) - \dfrac{\beta'(t)}{\beta(t)}, \\ q(t) = K^2(t) + \beta^2(t) + K'(t) - \dfrac{\beta'(t)}{\beta(t)} K(t). \end{cases} \tag{2.4.4}$$

Из (2.4.3) имеем

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = e^{-\int_{t_0}^{t} \propto(s)ds} \left[c_3 + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{s} \propto(s)ds} f(s)ds \right], \tag{2.4.5}$$

где $t \in G, c_3$- произвольная постоянная. Учитывая (4) и на основе работы [42], общее решение дифференциального уравнения (2.4.5) записывается в виде (2.4.2). Теорема 2.4. 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2.4.2.Пусть $t_0 \in G$ и функции $a_1(t), a_2(t)$ и $a_3(t)$ представимы в виде $a_1(t) = \propto(t) + 2K(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}$,

$$a_2(t) = 2 \propto'(t) + 2 \propto(t)K(t) - [\propto(t) + K(t)] \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} + K^2(t) + \beta^2(t) + K'(t),$$

$$a_3(t) = \propto''(t) + 2 \propto'(t)K(t) - [\propto'(t) + \propto(t)K(t)] \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} + K^2(t) + \beta^2(t) + K'(t),$$

где $t \in G$ и $f(t), \propto''(t), K'(t), \beta'(t) \in C(G), \beta(t) \neq 0$ для всех $t \in G$. Тогда общее решение дифференциального уравнения (2.4.1) записывается в виде

$$y(t) = y_0(t) + \sum_{i=1}^{3} c_i y_i(t), t \in G, \tag{2.4.6}$$

где c_1, c_2 и c_3 - произвольные постоянные,

$$y_0(t) = \int_{t_0}^{t} exp\left\{-\int_{s}^{t} \propto(t)d\tau\right\} \left\{ \int_{t_0}^{s} exp\left[-\int_{\tau}^{s} K(\tau)d\tau\right] \frac{f(\tau)}{\beta(\tau)} sin\left[\int_{\tau}^{s} \beta(\tau)d\tau\right] d\tau \right\} ds,$$

$$y_1(t) = exp\left\{-\int_{t_0}^{t} \propto(t)d\tau\right\},$$

$$y_2(t) = \int_{t_0}^{t} exp\left\{-\int_{s}^{t} \propto(\tau)d\tau - \int_{t_0}^{s} K(\tau)d\tau\right\} sin\left[\int_{t_0}^{s} \beta(\tau)d\tau\right] ds,$$

$$y_3(t) = \int_{t_0}^{t} exp\left\{-\int_{s}^{t} \propto(\tau)d\tau - \int_{t_0}^{s} K(\tau)d\tau\right\} cos\left[\int_{t_0}^{s} \beta(\tau)d\tau\right] ds,$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия теоремы 2.4.2 дифференциальное уравнение (2.4.1) можно записать в виде

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + p(t)\frac{d}{dt} + q(t)\right][y'(t) + \propto(t)y(t)] = f(t), t \in G, \tag{2.4.7}$$

где $p(t)$ и $q(t)$определены по формуле (2.4.4). Вводя обозначения

$$z(t) = y'(t) + \propto(t)y(t), \tag{2.4.8}$$

дифференциальное уравнения (2.4.7) запишем в виде

$$z'' + p(t)z' + q(t)z = f(t), \qquad t \in G. \tag{2.4.9}$$

Учитывая (2.4.4) и на основе работы [54], общее решение уравнения (2.4.9) записывается в виде

$$z(t) = z_0(t) + c_2 z_1(t) + c_3 z_2(t), t \in G, \tag{2.4.10}$$

где c_2 и c_3 - произвольные постоянные

$$\begin{cases} z_1(t) = exp\left\{-\int_{t_0}^{t} K(s)ds\right\} cos\left[\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds\right], \\ z_2(t) = exp\left\{-\int_{t_0}^{t} K(s)ds\right\} sin\left[\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds\right], \\ z_0(t) = \int_{t_0}^{t} exp\left\{-\int_{s}^{t} K(\tau)d\tau\right\} \frac{f(s)}{\beta(s)} sin\left[\int_{s}^{t} \beta(\tau)d\tau\right] ds, t \in G. \end{cases} \tag{2.4.11}$$

Учитывая (2.4.10) и (2.4.11), из (2.4.8) получим

$$y(t) = c_1 \exp\left[-\int_{t_0}^{t} \propto(s)ds\right] +$$

$$+\int_{t_0}^{t} exp\left\{-\int_{s}^{t} \propto(\tau)d\tau\right\}\left\{\int_{t_0}^{s} exp\left[-\int_{\tau}^{s} K(\tau)d\tau\right]\frac{f(\tau)}{\beta(\tau)} sin\left[\int_{\tau}^{s} \beta(\tau)d\tau\right]d\tau+\right.$$

$$+c_2\exp\left[-\int_{t_0}^{s} K(\tau)d\tau\right] sin\left[\int_{t_0}^{s}\beta(\tau)d\tau\right]+$$

$$\left.+c_3\exp\left[-\int_{t_0}^{s} K(\tau)d\tau\right] cos\left[\int_{t_0}^{s}\beta(\tau)d\tau\right]\right\}ds=$$

$$=y_0(t)+c_1y_1(t)+c_2y_2(t)+c_3y_3(t).$$

Теорема 2.4.2 доказана.

Приведем формулы из [17], являющимся частными случаями результатов теорем 2.4.1 и 2.4.2.

ПРИМЕР 2.4.1. В [17, с.438] рассмотрено ДУ:

$$y'''+f(t)y''+ay'+af(t)y=0, \qquad (2.4.12)$$

где $f(t)$ - известная непрерывная функция на G, $a \epsilon R, a>0$. Частными решениями уравнение (2.4.12) являются

$$y_1(t)=\cos(t\sqrt{a}), y_2(t)=\sin(t\sqrt{a}), t \epsilon G.$$

Тогда для ДУ (2.4.12) выполняются все условия теоремы 2.4. 1 при $K(t)=0, \beta(t)=\sqrt{a}$ и $\propto(t)=f(t)-a, t \epsilon G$.

ПРИМЕР 2.4. 2. В [17] рассмотрено ДУ:

$$y'''+f(t)y''+af(t)y'+a^2(f(t)-a)y=0, \qquad (2.4.13)$$

где $f(t)$ - известная непрерывная функция наG, $a \epsilon R$. Частными решениями уравнения (2.4.13) являются

$$y_1(t)=exp\left[-\frac{at}{2}\right]cos\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}t\right), y_2(t)=exp\left[-\frac{at}{2}\right]sin\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}t\right), t \epsilon G.$$

Тогда для ДУ (2.4.13) выполняются все условия теоремы 2.4.1 при

$$K(t)=\frac{a}{2}, \beta(t)=\frac{a\sqrt{3}}{2}, \propto(t)=f(t), t \epsilon G.$$

ПРИМЕР 2.4.3. В [17, с.439] рассмотрено ДУ:

$$y'''+tf(t)y''+(at^2-f(t))y'+at(t^2f(t)+3)y=0, \qquad (2.4.14)$$

где $a \epsilon R, a > 0, f(t)$ - известная непрерывная функция наG. Частными решениями уравнения (2.4.14) являются

$$y_1(t) = cos\left(\frac{1}{2}t^2\sqrt{a}\right), y_2(t) = sin\left(\frac{1}{2}t^2\sqrt{a}\right), t \epsilon G.$$

Тогда для дифференциального уравнения (2.4.14) выполняются все условия теоремы 2.4.1 при $K(t) = 0, \beta(t) = \sqrt{a}t, \propto(t) = tf(t) + \frac{1}{t}, t \epsilon G$.

ПРИМЕР 2.4.4. В [17, с. 440] рассмотрено ДУ:

$$y''' + \left(f(t) + \frac{3}{t}\right)y'' + \left(\frac{2f(t)}{t} + a\right)y' + a\left(f(t) + \frac{1}{t}\right)y$$
$$= 0, \tag{2.4.15}$$

где $f(t)$ - известная непрерывная функция на G, $a \epsilon R, a > 0$. Частными решениями уравнения (2.4.15) являются

$$y_1(t) = \frac{1}{t}cos(t\sqrt{a}), y_2(t) = \frac{1}{t}sin(t\sqrt{a}), t \epsilon G.$$

Тогда для ДУ (2.4.15) выполняются все условия теоремы 1 при $K(t) = \frac{1}{t}, \beta(t) = \sqrt{a}$ и $\propto(t) = f(t) + \frac{1}{t}, t \epsilon G$.

ПРИМЕР 2.4. 5. В [17] рассмотрено ДУ:

$$y''' + \left(f(t) + \frac{3}{t}\right)y'' + \left(a + \frac{2}{t}\right)f(t)y' + a\left(af(t) + \frac{1}{t}f(t) - a^2\right)y = 0, \tag{2.4.16}$$

где $f(t)$ - известная непрерывная функция на G, $a \epsilon R$. Частными решениями уравнения (2.4.16) являются

$$y_1(t) = \frac{1}{t}exp\left[-\frac{at}{2}\right]cos\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}t\right), y_2(t) = \frac{1}{t}exp\left[-\frac{at}{2}\right]sin\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}t\right), t \epsilon G.$$

Тогда для уравнения (2.4.16) выполняются все условия теоремы 1 при $K(t) = \frac{1}{t} + \frac{a}{2}, \beta(t) = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \propto(t) = f(t) + \frac{1}{t} - a, t \epsilon G$.

ПРИМЕР 2.4.6. В [17, с. 442] рассмотрено ДУ:

$$y''' + \frac{1}{t}f(t)y'' + \frac{1}{t^2}(f(t) - 1)y' + \frac{1}{t^3}(f(t) - 3)y = 0, \tag{2.4.17}$$

где $f(t)$ - известная непрерывная функция наG. Частными решениями уравнения (2.4.17) являются

$$y_1(t) = \cos(lnt), y_2(t) = \sin(lnt), t \epsilon G.$$

Тогда для уравнения (2.4.17) выполняются все условия теоремы 2.4.1 при $K(t) = 0, \beta(t) = \frac{1}{t}, \ \propto (t) = \frac{1}{t}(f(t) - 1), t \epsilon G.$

ПРИМЕР 2.4.7. В [17, с. 388] рассмотрено уравнение:

$$y''' + \lambda y = 0, \lambda \neq 0, t \epsilon G. \qquad (2.4.18)$$

Частными решениями уравнения (2.4.18) являются

$$y_1(t) = e^{-kt}, y_2(t) = e^{\frac{k}{2}t} cos\left(\frac{k\sqrt{3}}{2}t\right), y_3(t) = e^{\frac{k}{2}t} sin\left(\frac{k\sqrt{3}}{2}t\right), t \epsilon G,$$

где $k = \sqrt[3]{\lambda}$. Тогда для уравнения (2.4.18) выполняются все условия теоремы 2.4.1 при $\beta(t) = \frac{k\sqrt{3}}{2}, K(t) = -\frac{k}{2}$ и $\propto (t) = k, t \epsilon G.$

ПРИМЕР 2.4.8. В [17, с.391] рассмотрено уравнение:

$$y''' - (3b^2t^2 + a + 3b)y' + 2bt(b^2t^2 - a)y = 0, t \epsilon G, \qquad (2.4.19)$$

где $a < 0$. Частными решениями уравнения (2.4.19) являются

$$y_1(t) = exp\left(\frac{1}{2}bt^2\right)\cos\left(t\sqrt{-a}\right), y_2(t) = exp\left(\frac{1}{2}bt^2\right) sin\left(t\sqrt{-a}\right), t \epsilon G.$$

Тогда для уравнения (2.4.19) выполняются все условия теоремы 2.4.1 при $\beta(t) = \sqrt{-a}, K(t) = -bt, \propto (t) = 2bt, t \epsilon G.$

ПРИМЕР 2.4.9. В [17, с.393] рассмотрено уравнение:

$$y''' + at^n - by' - abt^n y = 0, x \epsilon G, \qquad (2.4.20)$$

где $a, b \epsilon R, b < 0$. Частными решениями уравнения (2.4.20) являются

$$y_1(t) = \cos\left(t\sqrt{-b}\right), y_2(t) = sin\left(t\sqrt{-b}\right), t \epsilon G.$$

Тогда для уравнения (2.4.20) выполняются все условия теоремы 2.4.1 при $\beta(t) = \sqrt{-b}, K(t) = 0$ и $\propto (t) = at^n, t \epsilon G.$

2.5. Ограниченность решения одного класса линейных дифференциальных уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами на полуоси

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y''' + a_1(t)y'' + a_2(t)y' + a_3(t)y = f(t), \;\; t \ge t_0\,, \tag{2.5.1}$$

где $a_1(t), a_2(t), a_3(t)$ и $f(t)$- известные функции.

Предположим выполнения следующих условий:

а) $a_1(t) = \propto(t) + 2K(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}$,

$$a_2(t) = 3K'(t) - \beta''(t)\beta^{-1}(t) + (\beta'(t))^2\beta^{-2}(t) + \propto(t)\left[2K(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\right] +$$

$$+K^2(t) + \beta^2(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}K(t),$$

$$a_3(t) = 2K(t)K'(t) + 2\beta(t)\beta'(t) + K''(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}K'(t) - \frac{\beta''(t)}{\beta(t)}K(t) +$$

$$+\left(\beta'(t)\right)^2\beta^{-2}(t)K(t) + \propto(t)\left[K^2(t) + \beta^2(t) + K'(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}K(t)\right],$$

где $\beta(t) \neq 0$;

б) $a_1(t) = \propto(t) + 2K(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}$,

$$a_2(t) = 2\propto'(t) + 2\propto(t)K(t) - [\propto(t) + K(t)]\frac{\beta'(t)}{\beta(t)} + K^2(t) + \beta^2(t) + K'(t),$$

$$a_3(t) = \propto''(t) + 2\propto'(t)K(t) - [\propto'(t) + \propto(t)K(t)]\frac{\beta'(t)}{\beta(t)} + K^2(t) + \beta^2(t)$$

$$+ K'(t),$$

где $\beta(t) \neq 0$.

При выполнении условия а) в силу теоремы 2.4.1 общее решение ДУ (2.5.1) записывается в виде

$$y(t) = y_0(t) + \sum_{i=1}^{3} c_i y_i(t), t \ge t_0, \tag{2.5.2}$$

где c_1, c_2 и c_3 - произвольные постоянные,

$$y_0(t) = \int_{t_0}^{t} exp\left\{-\int_{s}^{t} K(\tau)d\tau\right\}\frac{1}{\beta(s)}\left\{\int_{t_0}^{s} e^{-\int_\tau^s \propto(\tau)d\tau} f(\tau)d\tau\right\}\sin\left[\int_{s}^{t}\beta(\tau)d\tau\right]ds,$$

$$y_1(t) = exp\left\{-\int\limits_{t_0}^{t} K(s)ds\right\} cos\left[\int\limits_{t_0}^{t} \beta(s)ds\right],$$

$$y_2(t) = exp\left\{-\int\limits_{t_0}^{t} K(s)ds\right\} sin\left[\int\limits_{t_0}^{t} \beta(s)ds\right],$$

$$y_3(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{\beta(s)} exp\left\{-\int\limits_{s}^{t} K(\tau)d\tau - \int\limits_{t_0}^{s} \propto(\tau)d\tau\right\} \sin\left[\int\limits_{s}^{t} \beta(\tau)d\tau\right] ds.$$

ТЕОРЕМА 2.5.1. Пусть выполняется условие a), $K(t) \geq 0$ и $\propto(t) \geq 0, \sup\limits_{t \geq t_0} \int_{t_0}^{t} \frac{1}{|\beta(s)|} exp\left\{-\int_s^t K(\tau)d\tau\right\} ds \leq M_0 < \infty,$

$$\sup_{t \geq t_0} \int\limits_{t_0}^{t} exp\left\{-\int\limits_{s}^{t} \propto(\tau)d\tau\right\} |f(s)|ds \leq M_1 < \infty.$$

Тогда все решения ДУ (2.5.1) ограничены на J и для общего решения $y(t)$ ДУ (2.5.1) справедлива оценка

$$|y(t)| \leq M, t \geq t_0, \tag{2.5.3}$$

где $M = M_0 M_1 + |c_1| + |c_2| + |c_3| M_0$, c_1, c_2 и c_3 - произвольные постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая условия теоремы 2.5.1, из (2.5.2) имеем

$$|y(t)| \leq |y_0(t)| + |c_1||y_1(t)| + |c_2||y_2(t)| + |c_3||y_3(t)| \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \frac{exp\left\{-\int_s^t K(\tau)d\tau\right\}}{|\beta(s)|} \int_{t_0}^{s} |f(\tau)|\, exp\left\{-\int_{\tau}^{s} K(\tau)d\tau\right\} d\tau +$$

$$+ c_1 \left|cos\left[\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds\right]\right| + |c_2| \left|sin\left[\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds\right]\right| + c_3 \int_{t_0}^{t} \frac{exp\left\{-\int_s^t K(\tau)d\tau\right\}}{|\beta(s)|} ds \leq$$

$$\leq M_0 M_1 + c_1 + c_2 + c_3 M_0 = M, t \geq t_0.$$

Теорема 2.5.1 доказана.

При выполнении условия б) в силу теоремы 2.5.1 общее решение ДУ (2.5.1) записывается в виде

$$y(t) = y_0(t) + \sum_{i=1}^{3} c_i y_i(t), t \geq t_0, \tag{2.5.4}$$

где c_1, c_2 и c_3 - произвольные постоянные,

$$y_0(t) = \int_{t_0}^{t} exp\left\{-\int_{s}^{t} \propto (t)d\tau\right\}\left\{\int_{t_0}^{s} exp\left[-\int_{\tau}^{s} K(\tau)d\tau\right]\frac{f(\tau)}{\beta(\tau)} sin\left[\int_{\tau}^{s} \beta(\tau)d\tau\right]d\tau\right\}ds,$$

$$y_1(t) = exp\left\{-\int_{t_0}^{t} \propto (t)d\tau\right\},$$

$$y_2(t) = \int_{t_0}^{t} exp\left\{-\int_{s}^{t} \propto (\tau)d\tau - \int_{t_0}^{s} K(\tau)d\tau\right\} sin\left[\int_{t_0}^{s} \beta(\tau)d\tau\right]ds,$$

$$y_3(t) = \int_{t_0}^{t} exp\left\{-\int_{s}^{t} \propto (\tau)d\tau - \int_{t_0}^{s} K(\tau)d\tau\right\} cos\left[\int_{t_0}^{s} \beta(\tau)d\tau\right]ds.$$

ТЕОРЕМА 2.5.2.Пусть выполняется условие б), $K(t) \geq 0$ и $\propto (t) \geq 0$ при всех $t \,\epsilon [t_0, \infty)$,

$$\sup_{t \geq t_0} \int_{t_0}^{t} exp\left\{-\int_{s}^{t} \propto (\tau)d\tau\right\}ds \leq N_1 < \infty,$$

$$\sup_{t \geq t_0} \int_{t_0}^{t} exp\left\{-\int_{s}^{t} K(\tau)d\tau\right\}\left|\frac{f(s)}{\beta(s)}\right|ds \leq N_2 < \infty,$$

Тогда все решения ДУ (2.5.1) ограничены на J и для общего решения $y(t)$ ДУ (2.5.1) справедлива оценка

$$|y(t)| \leq N_3 \,,\ t \geq t_0, \tag{2.5.5}$$

где $N_3 = N_1 N_2 + |\, c_1| + |c_2| + |c_3| N_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая условия теоремы 2.5.2, из (2.5.4) имеем

$$|y(t)| \le |y_0(t)| + |c_1||y_1(t)| + |c_2||y_2(t)| + |c_3||y_3(t)| \le$$

$$\le \int_{t_0}^{t} exp\left\{-\int_{s}^{t} \propto(\tau)d\tau\right\} \int_{t_0}^{s} exp\left\{-\int_{\tau}^{s} K(\tau)d\tau\right\} \left|\frac{f(\tau)}{\beta(\tau)}\right| d\tau ds + |c_1| +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} exp\left\{-\int_{s}^{t} \propto(\tau)d\tau\right\} ds[|c_2| + |c_3|] \le N_1N_2 + |c_1| + N_1[|c_2| + |c_3|].$$

Теорема 2.5.2 доказана.

ПРИМЕР 2.5.1. Рассмотрим ДУ

$$y''' + m(t)y'' + a\,m(t)y' + a^2\,(m(t) - a)y = f(t), \qquad t \ge t_0, \tag{2.5.6}$$

где $m(t)$ и $f(t)$ - известные функции, $a \epsilon R$. Предположим, что $a > 0, m(t) - a \ge 0$ при всех $t \epsilon [t_0, \infty)$,

$$\sup_{t \ge t_0} \int_{t_0}^{t} exp\left\{-\int_{s}^{t} m(\tau)d\tau\right\} |f(s)|ds = M_1 < \infty.$$

Тогда для ДУ (2.5.6) выполняются все условия теоремы 2.5.1 при

$$K(t) = \frac{a}{2}, \beta(t) = \frac{a\sqrt{3}}{2}\alpha(t) = m(t) - a, t \epsilon G.$$

ПРИМЕР 2.5.2.Рассмотрим ДУ

$$y''' + \left(m(t) + \frac{3}{t}\right)y'' + \left(a + \frac{2}{t}\right)m(t)y' +$$

$$+a\big(m(t)\big) + \frac{1}{t}m(t) - a^2)y = f(t), \qquad t \ge 1\,, \tag{2.5.7}$$

где $m(t)$ и $f(t)$ - известные функции, $a \epsilon R$. Предположим, что $a > 0, m(t) + \frac{1}{t} - a \ge 0, t \ge 1$,

$$\sup_{t \ge 1} \int_{1}^{t} exp\left\{-\int_{s}^{t} \left[m(\tau) + \frac{1}{\tau} - a\right] d\tau\right\} |f(s)|ds = M_1 < \infty.$$

Тогда для ДУ (2.5.7) выполняются все условия теоремы 2.5.1 при

$$K(t) = \frac{1}{t} + \frac{a}{2}, \beta(t) = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \alpha(t) = m(t) + \frac{1}{t} - a, t \epsilon G.$$

ПРИМЕР 2.5.3.Рассмотрим уравнение

$$y''' + m(t)y'' + [2m'(t) + 2m(t) - 3a^2 + b^2]y' +$$

$$+[m''(t) + 2m'(t)a + a^2 + b^2]y = f(t), \qquad t \geq t_0, \tag{2.5.8}$$

где $m(t)$ и $f(t) -$ известные функции, $a, b \epsilon R$. Предположим, что

$$a > 0, m(t) - 2a \geq 0, t \geq t_0,$$

$$\sup_{t \geq t_0} \int_{t_0}^{t} exp\left\{-\int_{s}^{t} [m(\tau) - 2a]d\tau\right\} ds \leq N_1 < \infty,$$

$$\sup_{t \geq t_0} \int_{t_0}^{t} exp\{-a(t-s)\} \left|\frac{f(s)}{b}\right| ds \leq N_2 < \infty.$$

Тогда для уравнения (2.5.8) выполняются все условия теоремы 2.5.2 при $K(t) = a, \beta(t) = b, \propto(t) = m(t) - 2a, \ t \geq t_0$.

2.6. Заключение по главе 2

Получены формулы для решений и установлены достаточные условия для экспоненциальной оценки на полуоси и стремления к нулю при неограниченном возрастании независимой переменной решения задачи Коши для одного класса линейных ДУ и ИДУ второго порядка; оценки и ограниченности на полуоси решения задачи Коши для одного класса линейных ДУ второго и третьего порядков.

На все утверждения построены иллюстративные примеры.

ГЛАВА 3. МЕТОД ЧАСТИЧНОГО СРЕЗЫВАНИЯ, ОЦЕНКИ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА НА ПОЛУОСИ

Всюду в этой главе все фигурирующие функции от $t, (t, \tau)$ и их производные являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \ge t_0, t \ge \tau \ge t_0$; функции от (x, y) являются непрерывными при $|x|, |y| < \infty$; $J = [t_0, \infty)$; ИДУ - интегро-дифференциальное уравнение; ДУ - дифференциальное уравнение.

3.1. Метод частичного срезывания, оценка и асимптотические свойства решений слабо нелинейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка

ЗАДАЧА 3.1.1. Установить достаточные условия оценки, ограниченности на J, стремления к нулю, в том числе по экспоненциальному и степенному закону, при $t \to \infty$, принадлежности пространству $L^P(J, R)$ $(p > 0)$ решений следующего слабо нелинейного ИДУ первого порядка типа Вольтерра:

$$x'(t) + a(t)x(t) + \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t) +$$

$$+F(t, x(t), \int_{t_0}^{t} H(t,\tau,x(\tau))d\tau), \quad t \ge t_0 \qquad (3.1.1)$$

в случае, когда решения соответствующего слабо нелинейного ДУ первого порядка:

$$x'(t) + a(t)x(t) = f(t) + F(t, x(t), 0), \quad t \ge t_0 \qquad (3.1.1_0)$$

могут не обладать соответствующими асимптотическими свойствами, при этом на функции $F(t,x,y)$, $H(t,\tau,y)$ налагаются условия «слабой нелинейности»:

$$|F(t,x,y)| \le g(t)|x| + g_1(t)|y|, \; |H(t,\tau,y)| \le h(t,\tau)|y| \qquad (F,H)$$

с неотрицательными коэффициентами $g(t), g_1(t), h(t,\tau)$.

Речь идет о решениях $x(t) \in C^1(J,R)$ ИДУ (1) с любым начальным значением $x(t_0)$. В силу условий (F,H) такие решения ИДУ (3.1.1) существуют.

Отметим, что задача, аналогичная выше приведенной, ранее решена в [22; 27, с. 42-58] методом весовых и срезывающих функций [27] и методом интегральных неравенств [14]. В настоящей работе указанная задача решается методом весовых функций [27, с. 27-28], методом частичного срезывания [38] и методом интегральных неравенств [14]. Таким образом, главное отличия от [22; 27, с. 42-58] - это применение метода частичного срезывания [38], что приведет к установлению новых результатов по сравнению с ранее известными в [22; 27, с. 42-58].

Аналогично в [27, с. 42-58; 38] введем следующие предположения и обозначения: $0 < \varphi(t)$ – некоторая весовая функция; $\Delta(t) \equiv 2a(t)\varphi(t) - \varphi'(t)$;

$$K(t,\tau) = \sum_{i=1}^{n} K_i(t,\tau), \tag{K}$$

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} f_i(t), \tag{F}$$

$\psi_i(t)$ $(i = 1..n)$ - некоторые срезывающие функции,

$P_i(t) \equiv \varphi(t) K_i(t,t) (\psi_i(t))^{-2}$, $Q_i(t,\tau) \equiv \varphi(t) K_i(t,\tau)(\psi_i(\tau))^{-1}$,

$E_i(t) \equiv \varphi(t) f_i(t) (\psi_i(t))^{-1}$,

$$P_i(t) = A_i(t) + B_i(t) \quad (i = 1..n), \tag{P}$$

$c_i(t) (i = 1..n)$ - некоторые функции.

Заметим, что ядра $Q_i(t,\tau)$ $(i = 1...n)$ называются частично срезанными [38].

Далее поступаем аналогично [1, 2, 4]. Для произвольно фиксированного решения $x(t)$ ИДУ (3.1.1) умножаем на $\varphi(t) x(t)$ [22], интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, при этом подобно [27, 38] вводим функции

$\psi_i(t), P_i(t), Q_i(t,\tau),$ используем лемму [38] или лемму 1.1.2, вводим условия (P), функции $c_i(t)(i=1...n)$. Тогда приходим к следующему тождеству:

$$\varphi(t)(x(t))^2 + \int_{t_0}^{t} \Delta(s)(x(s))^2 ds + \sum_{i=1}^{n} \{A_i(t)(X_i(t,t_0))^2 + B_i(t)(X_i(t,t_0))^2 -$$

$$-2E_i(t)X_i(t,t_0) + c_i(t) - \int_{t_0}^{t} [B_i'(s)(X_i(s,t_0))^2 - 2E_i'(s)X_i(s,t_0) + c_i'(s)]ds\} \equiv$$

$$\equiv c_* + \sum_{i=1}^{n} [\int_{t_0}^{t} A_i'(s)(X_i(s,t_0))^2 ds + 2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} Q_{i\tau}'(s,\tau)X_i(\tau,t_0)x(s)ds] + 2\int_{t_0}^{t} \varphi(s)x(s)f_0(s)ds +$$

$$+2\int_{t_0}^{t} \varphi(s)x(s)F(s,x(s),\int_{t_0}^{s} H(s,\tau,x(\tau))d\tau)ds, \qquad (3.1.2)$$

где

$$X_i(t,\tau) \equiv \int_{\tau}^{t} \psi_i(\eta)x(\eta)d\eta \quad (i=1...n),\ c_* = \varphi(t_0)(x(t_0))^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i(t_0).$$

ТЕОРЕМА 3.1.1. Пусть 1) $\varphi(t) > 0$, выполняются условия (F,H), *(K), (f)*, (P); 2) $\Delta(t) \geq 0$; 3) $A_i(t) > 0,$ существует функция $A^*(t) \in L^1(J,R_+)$ такие, что $A_i'(t) \leq A_i^*(t)A_i(t)\ (i=1...n)$; 4) $B_i(t) \geq 0,\ B_i'(t) \leq 0$, существуют функции $c_i(t)$ такие, что $(E_i^{(k)}(t))^2 \leq B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t)\ (i=1...n;\ k=0,1)$;

5) $$(\varphi(t))^{\frac{1}{2}}[f_0(t) + \int_{t_0}^{t} G(t,\tau)(\varphi(\tau))^{-\frac{1}{2}}d\tau] + g(t) +$$

$$+(\varphi(t))^{-\frac{1}{2}}\int_{t_0}^{t} |Q_{i\tau}'(t,\tau)|(A_i(\tau))^{-\frac{1}{2}}d\tau \in L^1(J,R_+) \quad (i=1...n),$$

где $G(t,\tau) \equiv g_1(t)h(t,\tau).$

Тогда для любого решения $x(t)$ ИДУ (3.1.1) справедливы следующие оценка:

$$x(t) = (\varphi(t))^{-\frac{1}{2}}O(1) \qquad (3.1.3)$$

и утверждения:

$$\int_{t_0}^{t} \Delta(s)(x(s))^2 ds = O(1), \qquad (3.1.4)$$

$$A_i(t)(X_i(t,t_0))^2 = O(1) \quad (i=1..n). \qquad (3.1.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначение:

$$u(t) \equiv \varphi(t)(x(t))^2 + \int_{t_0}^{t} \Delta(s)(x(s))^2 + \sum_{i=1}^{n} A_i(t)(X_i(t,t_0))^2 \ . \tag{3.1.6}$$

Тогда с учетом условий 1) - 4) имеем $u(t) \geq 0$, а также получаем:

$$\varphi(t)(x(t))^2 \leq u(t), \int_{t_0}^{t} \Delta(s)(x(s))^2 ds \leq u(t), \sum_{i=1}^{n} A_i(t)(X_i(t,t_0))^2 \leq u(t). \tag{3.1.7}$$

На основании условий 1) - 4) теоремы 3.1.1 и обозначения (3.1.6), используя условия (F,H), из тождества (3.1.2), переходим к следующему интегральному неравенству:

$$u(t) \leq c_* + 2\int_{t_0}^{t} (\varphi(s))^{\frac{1}{2}} | f_0(s)| (u(s))^{\frac{1}{2}} ds + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} [A_i^*(s)u(s) +$$

$$+2(\varphi(s))^{-\frac{1}{2}} (u(s))^{\frac{1}{2}} \int_{t_0}^{s} |Q'_{i\tau}(s,\tau)| (A_i(\tau))^{-\frac{1}{2}} (u(s))^{\frac{1}{2}} d\tau] ds +$$

$$+2\int_{t_0}^{t} [g(s)u(s) + (\varphi(s))^{\frac{1}{2}} (u(s))^{\frac{1}{2}} \int_{t_0}^{s} G(s,\tau)(\varphi(\tau))^{-\frac{1}{2}} (u(\tau))^{\frac{1}{2}} d\tau] ds \, . \tag{3.1.8}$$

Применяя к интегральному неравенству (3.1.8) лемму 1 [14] или лемму 1.1.3 и учитывая условия 3), 5), будем иметь оценку

$$u(t) \leq c_{**}, . \tag{3.1.9}$$

где

$$c_{**} = \{\sqrt{c_*} + \int_{t_0}^{\infty} (\varphi(s))^{\frac{1}{2}} | f_0(s)| \exp(-\tfrac{1}{2}\int_{t_0}^{s} D(\eta)d\eta) ds\}^2 \exp[\int_{t_0}^{\infty} D(s)ds] < \infty,$$

$$D(t) \equiv \sum_{i=1}^{n} [A_i^*(t) + 2(\varphi(t))^{-\frac{1}{2}} \int_{t_0}^{t} |Q'_{i\tau}(t,\tau)| (A_i(\tau))^{-\frac{1}{2}} d\tau +$$

$$+2[g(t) + (\varphi(t))^{\frac{1}{2}} \int_{t_0}^{t} G(t,\tau)(\varphi(\tau))^{-\frac{1}{2}} d\tau].$$

Из (3.1.9) в силу соотношений (3.1.6), (3.1.7) вытекают утверждения (3.1.3) - (3.1.5) теоремы. Теорема 3.1.1 доказана.

Из оценки (3.1.3) аналогично следствиям 3.1-3.4 из [27, с.117] получается

СЛЕДСТВИЕ 3.1.1. Если выполняются все условия теоремы 3.1.1 и

$a)\ \varphi(t)\ge\varphi_0>0;\quad b)\ \varphi(t)\to\infty,\ t\to\infty;\ c)\ (\varphi(t))^{-\frac{1}{2}}=e^{-\lambda t}O(1)$

$(\lambda-const>0);\ d)\ t_0=0,\ (\varphi(t))^{-\frac{1}{2}}=(t+\delta)^{-\gamma}O(1)\ (\delta,\lambda-const>0);$

$e)\ (\varphi(t))^{-\frac{1}{2}}\in L^P(J,R_+\setminus\{0\})\ (p>0)$, то для любого решения $x(t)$ ИДУ (3.1.1) справедливы утверждения:

$a)\ x(t)=O(1);\quad b)\ x(t)\to 0,\ t\to\infty;\ c)\ x(t)=e^{-\lambda t}O(1)\ (\lambda-const>0);$
$d)\ x(t)=(t+\delta)^{-\gamma}O(1)\ (t_0=0,\ \delta,\lambda-const>0);\ \ e)\ x(t)\in L^P(J,R)\ (p>0)$

Исходя из утверждения (3.1.4), аналогично следствию 3.5 [27, с. 117], устанавливается

СЛЕДСТВИЕ 3.1.2. Если выполняются все условия теоремы 3.1.1 и $\Delta(t)\ge\Delta_0>0$ (соответственно $\Delta(t)>0,\ (\Delta(t))^{-1}\in L^1(J,R_+\setminus\{0\})$), то любое решение ИДУ (1) $x(t)\in L^2(J,R)$ (соответственно $x(t)\in L^1(J,R)$).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1.1. Исходя из утверждения (3.1.5), используя леммы 3.1-3.3 [27, с. 110-111] об интегральных неравенствах первого рода можно установить условия для получения утверждения:

$\int\limits_{t_0}^{t}x(s)ds=O(1),$ где $x(t)$ - любое решение ИДУ (3.1.1).

ПРИМЕР 3.1.1. Для ИДУ первого порядка

$$x'(t)+x(t)+\int\limits_0^t e^{t+2\tau}(e^{-4t-2\tau}-e^{-6t}+1)^{\frac{1}{2}}x(\tau)d\tau=2e^t-\sin e^{-t}+\frac{xe^{-t}}{t^2+1}\sin[x-e^t]-$$
$$-\int\limits_0^t\frac{\sin e^{-t}\cdot(\cos t)^{\frac{1}{3}}|x(\tau)|}{(t+\tau+2)^3}d\tau,\quad t\ge 0$$

выполняются все условия теоремы 3.1.1, пункта c) следствия 3.1.1, следствия 3.1.2 при $\varphi(t)\equiv e^t$, здесь $t_0=0,\ \Delta(t)\equiv 2e^t-e^t=e^t,\ n=1,\ \ \psi_1(t)\equiv e^{2t},\ \ P_1(t)\equiv 1,$

$Q_1(t,\tau)\equiv(-e^{-6t}+e^{-4t-2\tau}+1)^{\frac{1}{2}}e^{2t},\ \ A_1(t)\equiv 0,\ \ B_1(t)\equiv 1,\ \ f_0(t)\equiv -\sin e^{-t},\ \ f_1(t)\equiv 2e^t,$

$E_1(t)\equiv 2,\ \ c_1(t)\equiv 4,\ \ g(t)\equiv\frac{1}{t^2+1},\ \ g_1(t)\equiv 1,\ \ h(t,\tau)\equiv\frac{1}{(t+\tau+1)^4}.$

Значит, для любого решения $x(t)$ этого ИДУ справедливы утверждения:

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2}}O(1), \int_0^t e^s (x(s))^2 ds = O(1).$$

Однако, соответствующее слабо нелинейное ДУ:

$$x'(t) + x(t) = 2e^t + \frac{xe^{-t}}{t^2+1}\sin[x - e^t], \quad t \geq 0$$

имеет решение $x(t) = e^t$, неограниченное на полуоси $R_+ = [0, \infty)$.

Таким образом, нам удалось найти новый класс ИДУ вида (3.1.1), для которого выше сформулированная задача решаема, т.е. удалось обнаружить влияние интегральных возмущений типа Вольтерра на асимптотические свойства решений слабо нелинейного ДУ первого порядка ($3.1.1_0$).

3.2. Об оценке решений и их первых производных линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка

ЗАДАЧА 3.2.1. Установить достаточные условия для оценки всех решений и их первых производных линейного ИДУ второго порядка типа Вольтерра вида

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \int_{t_0}^{t} [Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau)]d\tau = f(t), \; t \geq t_0. \tag{3.2.1}$$

Такая задача решена в [29]. Настоящая работа дополняет результаты и применяется метод метод сведения к системе с некоторой весовой функцией из [29]. Затем в отличие от [29] к полученной системе развивается метод весовых функций [27, с.27-28] и метод частичного срезывания [38]. Вследствие этого устанавливаются достаточные условия наличия оценок, ограниченности на J, стремления к нулю при $t \to \infty$, в том числе по экспоненциальному и степенному закону, принадлежности пространству $L^p(J, R)$ $(p > 0)$ решений и их первых производных ИДУ (3.2.1).

Речь идет о решениях $x(t)\in C^2(J,R)$ ИДУ (3.2.1) с любыми начальными данными $x^{(k)}(t_0)\in R$ $(k=0,1)$. Каждое такое решение ИДУ (3.2.1) существует и единственно.

Переходим к изложению результатов работы.

Аналогично, как в статье [29] в ИДУ (3.2.1) делается следующая замена неизвестной функции $x(t)$:

$$x'(t)+\lambda^2 x(t)=W(t)y(t),\ t\ge t_0, \qquad (3.2.2)$$

где λ - некоторый вспомогательный параметр, причем $\lambda\in R,\ 0<W(t)$ - некоторая весовая функция, $y(t)$ - новая неизвестная функция, и ИДУ (3.2.1) сводится к следующей эквивалентной системе:

$$\begin{cases} x'(t)+\lambda^2 x(t)=W(t)\,y(t)\,, \\ y'(t)+a(t)y(t)+b(t)x(t)+\int\limits_{t_0}^{t}[Q(t,\tau)x(\tau)+K(t,\tau)y(\tau)]d\tau=F(t),\ t\ge t_0, \end{cases} \qquad (3.2.3)$$

где

$$a(t)\equiv a_1(t)-\lambda^2+W'(t)(W(t))^{-1},\quad b(t)\equiv (W(t))^{-1}[a_0(t)+\lambda^4-\lambda^2 a_1(t)],$$
$$Q(t,\tau)\equiv (W(t))^{-1}[Q_0(t,\tau)-\lambda^2 Q_1(t,\tau)],\ K(t,\tau)\equiv (W(t))^{-1}Q_1(t,\tau)W(\tau),$$
$$F(t)\equiv (W(t))^{-1}f(t).$$

К системе (3.2.3) развивается метод весовых функций [27, с. 27-28] и метод частичного срезывания [38]. А именно первое уравнение системы (3.2.3) умножаем на $\varphi_1(t)x(t)$, второе - на $\varphi_2(t)y(t)$, где $0<\varphi_k(t)$ $(k=1,2)$ - некоторые весовые функции, $(x(t),y(t))$ - произвольно фиксированное решение системы (3.2.3), сложим полученные соотношения и интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям. Тогда получаем следующее тождество:

$$\varphi_1(t)(x(t))^2+\int\limits_{t_0}^{t}[2\lambda^2\varphi_1(s)-\varphi_1'(s)](x(s))^2ds+\varphi_2(t)(y(t))^2+\int\limits_{t_0}^{t}[2\varphi_2(s)a(s)-$$
$$-\varphi_2'(s)](y(s))^2ds+2\int\limits_{t_0}^{t}\varphi_2(s)b(s)x(s)y(s)ds+2\int\limits_{t_0}^{t}\varphi_2(s)y(s)\{\int\limits_{t_0}^{s}[Q(s,\tau)x(\tau)+$$
$$+K(s,\tau)y(\tau)]d\tau\}ds\equiv c_*+2\int\limits_{t_0}^{t}\varphi_1(s)W(s)x(s)y(s)ds+2\int\limits_{t_0}^{t}\varphi_2(s)F(s)y(s)ds, \qquad (3.2.4)$$

где

$c_* = \varphi_1(t_0)(x(t_0))^2 + \varphi_2(t_0)(y(t_0))^2$.

Пусть в [27, с. 42-58; 3]:

$$K(t,\tau) = \sum_{i=0}^{n} K_i(t,\tau), \tag{K}$$

$$F(t) = \sum_{i=0}^{n} F_i(t), \tag{F}$$

$\psi_i(t)$ $(i = 1..n)$ - некоторые срезывающие функции,

$P_i(t) \equiv \varphi_2(t) K_i(t,t)(\psi_i(t))^{-2}$, $T_i(t,\tau) \equiv \varphi_2(t) K_i(t,\tau)(\psi_i(\tau))^{-1}$,

$E_i(t) \equiv \varphi_2(t) F_i(t)(\psi_i(t))^{-1}$,

$$P_i(t) = A_i(t) + B_i(t) \quad (i = 1..n), \tag{P}$$

$c_i(t)(i = 1..n)$ - некоторые функции.

Отметим, что ядра $T_i(t,\tau)$ $(i = 1...n)$ называются частично срезанными [38].

Интегрированием по частям в двойном интеграле с $K_i(t,\tau)$ $(i = 1..n)$, применением лемму [38] или лемму 1.1.2, и в интеграле с $F_i(t)$ $(i = 1..n)$, учитывая условия *(K), (F), (R)* и введенные обозначения, и применяя леммы 1.4, 1.5 [28], из тождества (3.2.4) будем иметь следующее тождество:

$$\varphi_1(t)(x(t))^2 + \int_{t_0}^{t} D_1(s)(x(s))^2 ds + \varphi_2(t)(y(t))^2 + \int_{t_0}^{t} D_2(s)(y(s))^2 ds +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\Big\{ A_i(t)\big(Y_i(t,t_0)\big)^2 - \int_{t_0}^{t} A_i'(s)\big(Y_i(s,t_0)\big)^2 ds + B_i(t)\big(Y_i(t,t_0)\big)^2 -$$

$$-2E_i(t)Y_i(t,t_0) + c_i(t) - \int_{t_0}^{t}\big[B_i'(s)\big(Y_i(s,t_0)\big)^2 -$$

$$-2E_i'(s)Y_i(s,t_0) + c_i'(s)\big]ds - 2\int_{t_0}^{t}[\int_{t_0}^{s} T_{i\tau}'(s,\tau)Y_i(s,\tau)d\tau]y(s)ds\Big\} \equiv$$

$$\equiv c_{**} + 2\int_{t_0}^{t} \varphi_1(s)W(s)x(s)y(s)ds + 2\int_{t_0}^{t} \varphi_2(s)F(s)y(s)ds -$$

$$-2\int_{t_0}^{t} \varphi_2(s)b(s)x(s)y(s)ds - 2\int_{t_0}^{t} \varphi_2(s)y(s)[\int_{t_0}^{s} Q(s,\tau)x(\tau)d\tau]ds -$$

$$-2\int_{t_0}^{t}\varphi_2(s)y(s)[\int_{t_0}^{s}K_0(s,\tau)y(\tau)d\tau]ds, \qquad (3.2.5)$$

где $D_1(t)\equiv 2\lambda^2\varphi_1(t)-\varphi_1'(t),\quad D_2(t)\equiv 2\varphi_2(t)a(t)-\varphi_2'(t),$

$$Y_i(t,\tau)\equiv\int_{\tau}^{t}\psi_i(s)y(s)ds \quad (i=1..n),\quad c_{**}=c_*+\sum_{i=1}^{n}c_i(t_0)\,.$$

Из тождества (3.2.5), аналогично теоремам 1.1, 2.1 из [27], доказывается

ТЕОРЕМА 3.2.1. Пусть 1) $\lambda\neq 0,\ \ W(t)>0;\ \ 0<\varphi_k(t)\ \ (k=1,2);$ 2) $D_k(t)\geq 0\ \ (k=1,2);$ 3) $A_i(t)>0,$ существует функция $A^*(t)\in L^1(J,R_+)$ такие, что $A_i'(t)\leq A_i^*(t)A_i(t)\ \ (i=1...n)$; 4) $B_i(t)\geq 0,\ \ B_i'(t)\leq 0$, существуют функции $c_i(t)$ такие, что $(E_i^{(k)}(t))^2\leq B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t)\ \ (i=1...n;\ k=0,1);$

5) $$(\varphi_2(t))^{-\frac{1}{2}}\int_{t_0}^{t}|T_{i\tau}'(t,\tau)|(A_i(\tau))^{-\frac{1}{2}}d\tau+(\varphi_2(t))^{\frac{1}{2}}[|F_0(t)|+(\varphi_1(t))^{-\frac{1}{2}}|b(t)|+$$

$$+\int_{t_0}^{t}|Q(t,\tau)|(\varphi_1(\tau))^{-\frac{1}{2}}d\tau+\int_{t_0}^{t}|K_0(t,\tau)|(\varphi_2(\tau))^{-\frac{1}{2}}d\tau]+(\varphi_1(t))^{\frac{1}{2}}(\varphi_2(t))^{-\frac{1}{2}}W(t)\in L^1(J,R_+\setminus\{0\})\,.$$

Тогда для любого решения $(x(t),\ y(t))$ системы (3.2.3) справедливы следующие оценки:

$$x(t)=(\varphi_1(t))^{-\frac{1}{2}}O(1), \qquad (3.2.6)$$

$$y(t)=(\varphi_2(t))^{-\frac{1}{2}}O(1), \qquad (3.2.7)$$

и с учетом замены (3.2.2) для любого решения $x(t)$ ИДУ (3.2.1) верны оценки (3.2.6) и

$$x'(t)=\lambda^2(\varphi_1(t))^{-\frac{1}{2}}O(1)+W(t)(\varphi_2(t))^{-\frac{1}{2}}O(1)=W_1(t)O(1), \qquad (3.2.8)$$

где

$$W_1(t)\equiv\lambda^2(\varphi_1(t))^{-\frac{1}{2}}+W(t)(\varphi_2(t))^{-\frac{1}{2}}.$$

Из оценок (3.2.6), (3.2.8) аналогично следствиям 3.1-3.4, 3.10, 3.22, 3.33 из [27] вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.2.1. Если выполняются условия теоремы 3.2.1 и

a) $\varphi_1(t) \geq \varphi_{10}(t) > 0$ (соответственно $W_1(t) \geq W_{10} > 0$);

b) $\varphi_1(t) \to \infty$ (соответственно $W_1(t) \to 0$) при $t \to \infty$;

c) существуют числа $\lambda_k > 0 \quad (k = 0,1)$ такие, что $(\varphi_1(t))^{-\frac{1}{2}} = e^{-\lambda_0 t} O(1),$ (соответственно $W_1(t) = e^{-\lambda_1 t} O(1)$);

d) $t_0 = 0,$ существует числа $\delta_k > 0, \quad \mu_k > 0 \quad (k = 0,1)$ такие, что $(\varphi_1(t))^{-\frac{1}{2}} = (t + \delta_0)^{-\mu_0} O(1),$ (соответственно $W_1(t) = (t + \delta_1)^{-\mu_1} O(1)$);

e) $(\varphi_1(t))^{-\frac{1}{2}} \in L^{P_0}(J, R_+ \setminus \{0\})$(соответственно $W_1(t) \in L^{P_1}(J, R_+ \setminus \{0\})) \; (P_k > 0, \; k = 0,1)$, то для любого решения $x(t)$ и его первой производной $x'(t)$

ИДУ (3.2.1) справедливы следующие асимптотические свойства:

a) *x(t)=O(1)* (соответственно $x'(t) = O(1)$);

b) $x_1(t) \to 0$ (соответственно $x'(t) \to 0$) при $t \to \infty$;

c) $x(t) = e^{-\lambda_0 t} O(1)$ (соответственно $x'(t) = e^{-\lambda_1 t} O(1)$) $(\lambda_k > 0, \quad k = 0,1)$;

d) $x(t) = (t + \delta_0)^{-\mu_0} O(1)$ (соответственно $x'(t) = (t + \delta_1)^{-\mu_1} O(1)$ $(t_0 = 0,$ $\delta_k > 0, \quad \mu_k > 0 \quad (k = 0,1))$;

e) $x(t) \in L^{P_0}(J, R),$ (соответственно $x'(t) \in L^{P_1}(J, R)$) $(P_k > 0, \quad k = 0,1)$.

Приведем простейший пример.

ПРИМЕР 3.2.1. ИДУ второго порядка

$$x''(t) + [4 + e^t + \sqrt[5]{\cos t}]x'(t) + [3 + e^t + \sqrt[5]{\cos t}]x(t) +$$

$$+\int_0^t e^{3\tau}\sqrt{1 + e^{-5t} + e^{-4t-\tau}}\,[x(\tau) + x'(\tau)]d\tau = -\sqrt{1 + 2e^{-5t}} - \sin e^{-t^2}, \quad t \geq 0 \qquad (3.2.1_1)$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 3.2.1 и пунктам a), b), c), e) следствия 3.2.1 при $\lambda = 1,$ $W(t) \equiv e^{-t}$ $\varphi_1(t) \equiv \varphi_2(t) \equiv e^t,$ здесь

$$t_0 = 0, \; a(t) \equiv 2 + e^t + \sqrt[5]{\cos t}, \; b(t) \equiv -10e^{-t}, \quad Q(t,\tau) \equiv 0, \quad K(t,\tau) \equiv$$
$$\equiv e^{t+2\tau}\sqrt{e^{-5t} + e^{-4t-\tau} + 1}, \; F(t) \equiv -\sqrt{1 + 2e^{-5t}} - \sin e^{-t^2}, \quad D_1(t) \equiv e^t,$$

$D_2(t) \equiv 3e^t + 2e^{2t} + 2e^t \sqrt[5]{\cos t}$, $n = 1$, $\psi_1(t) \equiv e^{2t}$, $P_1(t) \equiv \sqrt{1 + 2e^{-5t}}$,

$T_1(t,\tau) \equiv e^{2t}\sqrt{e^{-5t} + e^{-4t-\tau} + 1}$, $A_1(t) \equiv \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2e^{-5t}}$, $A_1^*(t) \equiv 0$,

$B_1(t) \equiv \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2e^{-5t}}$, $E_1(t) \equiv -\sqrt{1 + 2e^{-5t}}$, $c_1(t) \equiv 8\sqrt{1 + 2e^{-5t}}$,

$K_0(t,\tau) \equiv 0$, $F_0(t) \equiv -e^{2t}\sin e^{-t^2}$. Следовательно, для любого решения $x(t)$ линейного однородного ИДУ ($3.2.1_1$) справедливы оценки: $x^{(k)}(t) = e^{-\frac{t}{2}}O(1)$ $(k = 0,1)$.

Анализ установленных условий позволяет утверждать о том, что нами изучены асимптотические свойства решений и их первых производных новых классов ИДУ вида (3.2.1), в отличие от ранее проведенных исследований в [29, 23].

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2.1. Выше поставленную задачу можно изучить для слабо нелинейного вольтеррова ИДУ второго порядка вида

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \int_{t_0}^{t}[Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau)]d\tau =$$

$$= f(t) + q(t, x(t), x'(t), \int_{t_0}^{t} H(t,\tau,x(\tau),x'(\tau))d\tau), \quad t \geq t_0, \tag{3.2.9}$$

где функции $q(t,x,y,z)$, $H(t,\tau,x,y)$ удовлетворяют условиям слабой нелинейности:

$$|q(t,x,y,z)| \leq q_0(t) + g_0(t)|x| + g_1(t)|y| + g_2(t)|z|,$$

$$|H(t,\tau,x,y)| \leq h_0(t,\tau)|x| + h_1(t,\tau)|y| \tag{3.2.10}$$

с неотрицательными $q_0(t)$, $g_k(t)$, $h_j(t,\tau)$ $(k = 0,1,2;\ j = 0,1)$. Тогда можно получить теорему и следствие, подобные к выше сформулированным. Остается добавить, что замена (3.2.2) подставляется в правую часть ИДУ (3.2.9):

$$q(t, x(t), -\lambda^2 x(t) + W(t)y(t), \int_{t_0}^{t} H(t,\tau,x(\tau), -\lambda^2 x(\tau) + W(\tau)y(\tau))d\tau)$$

и с учетом условий (3.2.10) осуществляется переход к интегральному неравенству, к решению которого применяется лемма 1 [14]об интегральном неравенстве или лемма 1.1.3.

3.3. Лемма Люстерника-Соболева и специфическая асимптотическая устойчивость решений линейного однородного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка

В настоящей статье продолжаются исследования специфических асимптотических свойств решений линейных однородных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерры [32, 19].

Под асимптотической устойчивостью решений линейного ИДУ и ДУ третьего порядка понимается стремление к нулю при $t \to \infty$ всех решений и их первых и вторых производных.

Ставится следующая

ЗАДАЧА 3.3.1. Установить достаточные условия асимптотической устойчивости решений линейного однородного ИДУ третьего порядка вида

$$x'''(t) - a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\left[Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau) + Q_2(t,\tau)x''(\tau)\right]d\tau = 0,\ t \ge t_0 \qquad (3.3.1)$$

при условии:

$a_2(t) \ge 0,$ $\qquad$ (a_2)

т.е. в случае, когда решения соответствующего линейного однородного ДУ третьего порядка:

$$x'''(t) - a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = 0,\ t \ge t_0 \qquad (3.3.1_0)$$

не могут быть асимптотически устойчивыми, что подтверждается формулой Остроградского - Лиувилля.

Известно, что такие условия называются специфическими.

Речь идет о решениях $x(t) \in C^3(J, R)$ ИДУТВ (3.3.1) с любыми начальными данными Коши $x^{(k)}(t_0)$ $(k = 0,1,2)$. Каждое такое решение существует и единственно.

В настоящей работе для решения сформулированной нами задачи предлагается метод, основанный на применении и развитии нестандартного метода сведения к системе [21], метода возведения уравнений в квадрат [27, с. 28], метода частичного срезывания [38], методов преобразований из [27, с. 149-151], метода интегральных неравенств [14] и леммы Люстерника-Соболева [49, с. 393-394; 34].

Отметим, что лемма Люстерника-Соболева, которая в [49, с. 393-394] приведена в описательном виде и впервые применена в [34], гласит так:

ЛЕММА ЛЮСТЕРНИКА-СОБОЛЕВА [49, с. 393-394;34]. Если $x^{(k)}(t) \in L^2(J,R) \quad (k=0,1)$, то $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Приступим к получению основного результата.

Для решения поставленной задачи сначала аналогично работе [31] в ИДУ (3.3.1) делается замена:

$$x''(t) + px'(t) + qx(t) = W(t)y(t), \tag{3.3.2}$$

где p,q - некоторые вспомогательные параметры, причем $p>0,\ q>0,\ 0<W(t)$ - некоторая вспомогательная весовая функция, $y(t)$ - новая неизвестная функция.

Тогда ИДУ третьего порядка (3.3.1) сводится к следующей эквивалентной системе:

$$\begin{cases} x''(t) + px'(t) + qx(t) = W(t)y(t), \\ y'(t) - b_2(t)y(t) + b_1(t)x'(t) + b_0(t)x(t) + \int\limits_{t_0}^{t} [P_0(t,\tau)x(\tau) + \\ +P_1(t,\tau)x'(\tau) + K(t,\tau)y(\tau)]d\tau = 0,\ t \ge t_0, \end{cases} \tag{3.3.3}$$

где

$$b_2(t) \equiv a_2(t) + p - W'(t)(W(t))^{-1}, \quad b_1(t) \equiv (W(t))^{-1}[a_1(t) + pa_2(t) + p^2 - q],$$
$$b_0(t) \equiv (W(t))^{-1}[a_0(t) + qa_2(t) + pq], \quad P_0(t,\tau) \equiv (W(t))^{-1}[Q_0(t,\tau) - qQ_2(t,\tau)],$$
$$P_1(t,\tau) \equiv (W(t))^{-1}[Q_1(t,\tau) - pQ_2(t,\tau)],\ K(t,\tau) \equiv (W(t))^{-1}Q_2(t,\tau)W(\tau).$$

Теперь поступаем аналогично работе [34]. А именно каждое уравнение системы (3.3.3) преобразуем отдельно. Для произвольно фиксированного решения

$(x(t),\ y(t))$ первое уравнение системы (3.3.3), т.е. замену (3.3.2) возводим в квадрат, интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, и приходим к следующему тождеству:

$$V_1(t) \equiv \int_{t_0}^{t} [(x''(s))^2 + (p^2 - q)(x'(s))^2 + q^2(x(s))^2]ds +$$

$$+p(x'(t))^2 + 2qx(t)x'(t) + pq(x(t))^2 \equiv V_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} (W(s))^2(y(s))^2 ds. \qquad (3.3.4)$$

Для преобразования второго уравнения системы (3.3.3), т.е. ИДУ первого порядка для $y(t)$, аналогично [38] введем следующие предположения и обозначения:

$\psi(t)$ - некоторая срезывающая функция,

$$M(t) \equiv K(t,t)(\psi(t))^{-2}, \quad T(t,\tau) \equiv K(t,\tau)(\psi(\tau))^{-1}, \quad Y(t,\tau) \equiv \int_{\tau}^{t} \psi(\eta)y(\eta)d\eta,$$

т.е. применяем метод частичного срезывания, который основан на использовании следующего преобразования:

$$2\int_{t_0}^{t} y(s)[\int_{t_0}^{s} K(s,\tau)y(\tau)d\tau]ds = 2\int_{t_0}^{t} y(s)[\int_{t_0}^{s} K(s,\tau)(\psi(\tau))^{-1}\psi(\tau)y(\tau)d\tau]ds =$$

$$= 2\int_{t_0}^{t} y(s)[\int_{t_0}^{s} T(s,\tau)d_\tau Y(\tau,t_0)]ds = 2\int_{t_0}^{t} y(s)[T(s,s)Y(s,t_0) - \int_{t_0}^{s} T'_\tau(s,\tau)Y(\tau,t_0)d\tau]ds =$$

$$= 2\int_{t_0}^{t} T(s,s)(\psi(\tau))^{-1}Y(s,t_0)d_sY(s,t_0) - 2\int_{t_0}^{t} y(s)[\int_{t_0}^{s} T'_\tau(s,\tau)Y(\tau,t_0)d\tau]ds =$$

$$= \int_{t_0}^{t} M(s)d_s(Y(s,t_0))^2 - 2\int_{t_0}^{t} y(s)[\int_{t_0}^{s} T'_\tau(s,\tau)Y(\tau,t_0)d\tau]ds =$$

$$= M(t)(Y(t,t_0))^2 - \int_{t_0}^{t} M'(s)(Y(s,t_0))^2 ds - 2\int_{t_0}^{t} y(s)[\int_{t_0}^{s} T'_\tau(s,\tau)Y(\tau,t_0)d\tau]ds. \qquad (3.3.5)$$

Заметим, что ядро $T(t,\tau)$ называется частично срезанным [38].

Для произвольно фиксированного решения $(x(t),\ y(t))$ системы (3.3.3) ее второе уравнение умножаем на $y(t)$, производим интегрирование в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, при этом вводим функции $M(t),\ T(t,\tau),\ Y(t,t_0),$ используем преобразование (3.3.5). В итоге получаем следующее тождество:

$$V_2(t) \equiv (y(t))^2 - 2\int_{t_0}^{t} b_2(s)(y(s))^2 + \int_{t_0}^{t} y(s)\{b_1(s)x'(s) + b_0(s)x(s) + \int_{t_0}^{s} [P_0(s,\tau)x(\tau) + P_1(s,\tau)x'(\tau)]\}ds +$$

$$+M(t)(Y(t,t_0))^2 - \int_{t_0}^{t} M'(s)(Y(s,t_0))^2 ds - 2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} T'_\tau(s,\tau)Y(\tau,t_0)y(s)d\tau ds \equiv V_2(t_0). \quad (3.3.6)$$

Пусть

$$W'(t) \le 0. \qquad (W)$$

Тогда для функции $b_2(t)$ выполняются следующие условия:

$$b_2(t) > 0, \ \int_{t_0}^{\infty} b_2(t)dt = \infty,$$

и в тождестве (3.3.6) имеется неположительный интегральный член:

$$I(t) \equiv -2\int_{t_0}^{t} b_2(s)\left(y(s)\right)^2 ds, \qquad (3.3.7)$$

который не поддается применению леммы 1 [14] об интегральном неравенстве. Для преобразования этого «плохого» интеграла проведем преобразования, аналогичные преобразованиям (3.108) – (3.113) из [27, с. 149-151] или преобразованиям (9) - (12) из [19].

В (3.3.7) введем функцию $\psi(t)$, интегрируем по частям и получаем следующий аналог преобразования (9) из [19]:

$$I(t) = -2\int_{t_0}^{t} b_2(s)\left(\psi(s)\right)^{-1} y(s)\psi(s)y(s)ds = -2\int_{t_0}^{t} \alpha(s)y(s)d_sY(s,t_0) =$$

$$= -2\alpha(t)y(t)Y(t,t_0) + 2\int_{t_0}^{t} [\alpha'(s)y(s) + \alpha(s)y'(s)]Y(s,t_0)ds, \qquad (3.3.8)$$

где $\alpha(t) \equiv b_2(t)\left(\psi(t)\right)^{-1}$.

Далее в соотношении (3.3.8) заменим $y'(s)$ на ее выражение из второго уравнения системы (3.3.3):

$$I(t) = -2\alpha(t)y(t)Y(t,t_0) + 2\int_{t_0}^{t} [\alpha'(t) + b_2(s)\alpha(s)]y(s)Y(s,t_0)ds -$$

$$-2\int_{t_0}^{t}\alpha(t)Y(s,t_0)\int_{t_0}^{s}K(s,\tau)y(\tau)d\tau-2\int_{t_0}^{t}\alpha(s)Y(s,t_0)\{b_1(s)x'(s)+b_0(s)x(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{s}[P_0(s,\tau)x(\tau)+P_1(s,\tau)x'(\tau)]d\tau\}ds. \qquad (3.3.9)$$

Теперь преобразуем первый и второй интегралы из (3.3.9). Первый интеграл преобразуем аналогично (11) из [19], введением функции $\psi(t)$ и интегрированием по частям:

$$2\int_{t_0}^{t}[\alpha'(s)+b_2(s)\alpha(s)]y(s)Y(s,t_0)ds=$$

$$=2\int_{t_0}^{t}[\alpha'(s)+b_2(s)\alpha(s)]\left(\psi(s)\right)^{-1}\psi(s)y(s)Y(s,t_0)ds=$$

$$=\int_{t_0}^{t}\beta(s)d_s\left(Y(s,t_0)\right)^2=\beta(t)\left(Y(t,t_0)\right)^2-\int_{t_0}^{t}\beta'(s)\left(Y(s,t_0)\right)^2ds, \qquad (3.3.10)$$

где $\beta(t)\equiv[\alpha'(t)+b_2(t)\alpha(t)](\psi(t))^{-1}$.

Для второго интеграла из соотношения (3.3.9) введем функцию $\psi(t)$ во внутреннем интеграле с учетом обозначений $\alpha(t), M(t), T(t,\tau)$ и проинтегрируем по частям:

$$-2\int_{t_0}^{t}\alpha(s)Y(s,t_0)\int_{t_0}^{s}K(s,\tau)y(\tau)d\tau ds=$$

$$=-2\int_{t_0}^{t}\alpha(s)Y(s,t_0)[\int_{t_0}^{s}K(s,\tau)\left(\psi(\tau)\right)^{-1}\psi(\tau)y(\tau)d\tau]ds=$$

$$=-2\int_{t_0}^{t}\alpha(s)Y(s,t_0)[\int_{t_0}^{s}T(s,\tau)d_\tau Y(\tau,t_0)]ds=-2\int_{t_0}^{t}\alpha(s)Y(s,t_0)[T(s,s)Y(s,t_0)-$$

$$-\int_{t_0}^{s}T'_\tau(s,\tau)Y(\tau,t_0)d\tau]ds=-2\int_{t_0}^{t}b_2(s)M(s)(Y(s,t_0))^2ds+$$

$$+2\int_{t_0}^{t}\alpha(s)Y(s,t_0)[\int_{t_0}^{s}T'_\tau(s,\tau)Y(\tau,t_0)d\tau]ds. \qquad (3.3.11)$$

Учитывая (3.3.10), (3.3.11), из (3.3.9) получаем соотношение:

$$I(t)=-2\alpha(t)y(t)Y(t,t_0)+\beta(t)\big(Y(t,t_0)\big)^2-\int_{t_0}^{t}[\beta'(s)+2b_2(s)M(s)]\big(Y(s,t_0)\big)^2 ds+$$

$$+2\int_{t_0}^{t}\alpha(s)Y(s,t_0)[\int_{t_0}^{s}T'_\tau(s,\tau)Y(\tau,t_0)d\tau]ds-2\int_{t_0}^{t}\alpha(s)Y(s,t_0)\{b_1(s)x'(s)+b_0(s)x(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{s}[P_0(s,\tau)x(\tau)+P_1(s,\tau)x'(\tau)]d\tau\}ds. \qquad (3.3.12)$$

С учетом преобразования (3.3.12) из тождества (3.3.6) имеем:

$$V_2(t)\equiv\big(y(t)\big)^2-2\alpha(t)y(t)Y(t,t_0)+A(t)\big(Y(t,t_0)\big)^2-$$

$$-\int_{t_0}^{t}B(s)\big(Y(s,t_0)\big)^2 ds\equiv V_2(t_0)+2\int_{t_0}^{t}[y(s)-\alpha(s)Y(s,t_0)][\int_{t_0}^{s}T'_\tau(s,\tau)Y(\tau,t_0)d\tau]ds+$$

$$+2\int_{t_0}^{t}[\alpha(s)Y(s,t_0)-y(s)]\{b_1(s)x'(s)+b_0(s)x(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{s}[P_0(s,\tau)x(\tau)+P_1(s,\tau)x'(\tau)]d\tau\}ds, \qquad (3.3.13)$$

где $A(t)\equiv M(t)+\beta(t),\ B(t)\equiv M'(t)+\beta'(t)+2b_2(t)M(t)$.

Сложим тождества (3.3.4), (3.3.13) и получаем следующее окончательное тождество:

$$V(t)\equiv\int_{t_0}^{t}[\big(x''(s)\big)^2+(p^2-q)\big(x'(s)\big)^2+q^2\big(x(s)\big)^2]ds+$$

$$+p\big(x'(t)\big)^2+2qx(t)x'(t)+pq\big(x(t)\big)^2+\big(y(t)\big)^2-2\alpha(t)y(t)Y(t,t_0)+$$

$$+A(t)\big(Y(t,t_0)\big)^2-\int_{t_0}^{t}B(s)\big(Y(s,t_0)\big)^2 ds\equiv V(t_0)+\int_{t_0}^{t}\big(W(s)\big)^2\big(y(s)\big)^2 ds+$$

$$+2\int_{t_0}^{t}[y(s)-\alpha(s)Y(s,t_0)][\int_{t_0}^{s}T'_\tau(s,\tau)Y(\tau,t_0)d\tau]ds+$$

$$+2\int_{t_0}^{t}[\alpha(s)Y(s,t_0)-y(s)]\{b_1(s)x'(s)+b_0(s)x(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{s}[P_0(s,\tau)x(\tau)+P_1(s,\tau)x'(\tau)]d\tau\}ds, \tag{3.3.14}$$

где $V(t_0)=V_1(t_0)+V_2(t_0)$.

Переходя от тождества (3.3.14) к интегральному неравенству, аналогично теореме [34] доказывается

ТЕОРЕМА 3.3.1. Пусть 1) выполняется условие

(a_2); 2) $p>0,\ q>0,\ W(t)>0,$ выполняется условие (W);

$A(t)=A_1(t)+A_2(t),\ A_1(t)>0,\ A_2(t)\geq 0;$ 3) $p^2-q>0;$

4) существует число $\varepsilon\in(0,1)$ такое, что $(\alpha(t))^2\leq(1-\varepsilon)A_2(t);$

5) существует функция $B^*(t)\in L^1(J,R_+)$ такая, что $B(t)\leq B^*(t)A_1(t);$

6) $(W(t))^2+[1+|\alpha(t)|(A_1(t))^{-\frac{1}{2}}]\{\int_{t_0}^{t}|T'_\tau(t,\tau)|(A_1(\tau))^{-\frac{1}{2}}d\tau+$

$$+[1+(\alpha(t))^2(A_1(t))^{-1}](b_k(t))^2+[\int_{t_0}^{t}(P_k(t,\tau))^2d\tau]^{\frac{1}{2}}\}\in L^1(J,R_+\setminus\{0\})\ (k=0,1).$$

Тогда для любого решения $(x(t),y(t))$ системы (3.3.3) справедливы утверждения

$$x^{(k)}(t)\in L^2(J,R)\ (k=0,1,2),\quad y(t)=O(1), \tag{3.3.15}$$

и для любого решения $x(t)$ ИДУ третьего порядка (3.3.1)

$x^{(k)}(t)\to 0\ (k=0,1,2)$ при $t\to\infty,$ т.е. любое решение ИДУ (3.3.1) асимптотически устойчиво.

В самом деле, из первой части утверждений (3.3.15) в силу леммы Люстерника-Соболева следует $x^{(k)}(t)\to\infty$ $(k=0,1)$ при $t\to\infty$. Из условий $W(t)>0$ и (W) вытекает, что существует конечный предел $W(t)\to W(\infty)$ при $t\to\infty$. Из условия (3.3.6) имеем $(W(t))^2\in L^1(J,R_+\setminus\{0\})$. Тогда применяя теорему 460 [48, с. 425], получаем, что $W(t)\to 0$ при $t\to\infty$, и с учетом второй части утверждения (3.3.15), из замены (3.3.2) будем иметь, что $x''(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Значит, для любого решения $x(t)$ ИДУ (3.3.1) верны соотношения: $x^{(k)}(t)\to 0$ $(k=0,1,2)$ при $t\to\infty$, что равносильно утверждению теоремы 3.3.1.

Отметим, что при доказательстве теоремы 3.3.1 используются:

а) условие 2) теоремы 3.3.1 обеспечивает выполнение соотношения

$p(x'(t))^2+2qx(t)x'(t)+pq(x(t))^2\ge 0;$

б) для любых чисел $\varepsilon_k\in(0,1)$, $D_k(t)>0$ выполняются соотношения

$$2\int_{t_0}^{t}[\alpha(s)Y(s,t_0)-y(s)]b_k(s)x^{(k)}(s)ds=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\varepsilon_k D_k}}\int_{t_0}^{t}[\alpha(s)Y(s,t_0)-y(s)]b_k(s)\sqrt{\varepsilon_k D_k}\,x^{(k)}(s)ds\le$$

$$\le\varepsilon_k D_k\int_{t_0}^{t}\left(x^{(k)}(s)\right)^2ds+\frac{1}{\varepsilon_k D_k}\int_{t_0}^{t}[\alpha(s)Y(s,t_0)-y(s)]^2\left(b_k(s)\right)^2ds\le$$

$$\le\varepsilon_k D_k\int_{t_0}^{t}\left(x^{(k)}(s)\right)^2ds+\frac{2}{\varepsilon_k D_k}\int_{t_0}^{t}[\left(\alpha(s)\right)^2\left(Y(s,t_0)\right)^2+\left(y(s)\right)^2]\left(b_k(s)\right)^2ds\quad(k=0,1)$$

(у нас: $D_0=q^2,\quad D_1=p^2-q$);

в) соотношение

$$2\int_{t_0}^{t}[\alpha(s)Y(s,t_0)-y(s)]\int_{t_0}^{s}P_k(s,\tau)x^{(k)}(\tau)d\tau ds\le$$

$$\le 2\int_{t_0}^{t}[|\alpha(s)||Y(s,t_0)|+|y(s)|][\int_{t_0}^{s}\left(P_k(s,\tau)\right)^2d\tau]^{\frac{1}{2}}[\int_{t_0}^{s}\left(x^{(k)}(\tau)\right)^2d\tau]^{\frac{1}{2}}ds\quad(k=0,1),$$

которое получается с использованием неравенства Коши-Буняковского.

ПРИМЕР 3.3.1. ИДУ с $t_0 = 0, \quad a_2(t) \equiv 1$:

$$x'''(t) - x''(t) - (\frac{5}{64} - e^{-6t}\sin t)x'(t) - (\frac{9}{128} + e^{-7t}\cos t)x(t) +$$

$$+\int_0^t [(\frac{1}{16}Q_2(t,\tau) + e^{-t}(t+\tau+1)^{-1}\sin(t\tau))x(\tau) +$$

$$+(\frac{1}{8}Q_2(t,\tau) - e^{-\frac{t}{8}}(t+\tau+4)^{-3}\sin(t\tau))x'(\tau) + Q_2(t,\tau)x''(\tau)]d\tau = 0, \quad t \ge 0,$$

где $Q_2(t,\tau) \equiv 25e^{\frac{1}{8}(79t+81\tau)}[3+\cos(\tau e^{-18t})]$, удовлетворяет всем условиям теоремы 3.3.1 при $p = \frac{1}{8}$, $q = \frac{1}{16}$, $W(t) \equiv e^{-\frac{t}{8}}$, $\psi(t) \equiv e^{10t}$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$; здесь

$$b_2(t) \equiv \frac{5}{4},\ b_1(t) \equiv e^{-\frac{47t}{8}}\sin t,\ b_0(t) \equiv -e^{-\frac{55t}{8}}\cos t,\ P_0(t,\tau) \equiv e^{-\frac{7t}{8}}(t+\tau+1)^{-1}\sin(t\tau),$$

$$P_1(t,\tau) \equiv -(t+\tau+4)^{-3},\ K(t,\tau) \equiv 25e^{10(t+\tau)}[3+\cos(te^{-18t})],$$

$$T(t,\tau) \equiv 25e^{10t}[3+\cos(te^{-18t})],\ M(t) \equiv 25e^{-10t}[3+\cos(te^{-18t})],$$

$$\alpha(t) \equiv \frac{5}{4}e^{-10t},\ \beta(t) \equiv -\frac{175}{16}e^{-10t},\ A(t) \equiv 25e^{-10t}[3+\cos(te^{-18t})] -$$

$$-\frac{175}{16}e^{-20t},\ A_1(t) \equiv e^{-10t},\ A_2(t) \equiv 74e^{-10t} + 25e^{-10t}\cos(te^{-18t}) -$$

$$-\frac{175}{16}e^{-20t},\ B(t) \le 450(t+1)e^{-18t},\ B^*(t) \equiv 450(t+1)e^{-8t}.$$

Сравнение результатов показывает, что нам удалось снять условие $W(t) \to 0,\ t \to \infty$ статьи З.А. Жапаровой [16], а именно показать, что это условие вытекает из наложенных условий *(W)* и $(W(t))^2 \in L^1(J, R_+)$, которые также содержатся в [16]. Отметим, что в [16] наряду с другими методами развит метод весовых и срезывающих функций С. Искандарова[27].

3.4. Об асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка

В этом разделе продолжается исследование раздела 3.3 без требования знака функций $a_2(t)$.

ЗАДАЧА 3.4.1. Установить достаточные условия асимптотической устойчивости решений линейного ИДУ третьего порядка типа Вольтерра вида

$$x'''(t)+a_2(t)x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}[Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)+Q_2(t,\tau)x''(\tau)]d\tau=f(t),\ t\ge t_0. \qquad (3.4.1)$$

Речь идет о решениях $x(t)\in C^3(J,R)$ ИДУ (3.4.1) с любыми начальными данными $x^{(k)}(t_0)\ (k=0,1,2)$. Каждое такое решение существует и оно единственно.

Для решения этой задачи сначала делается замена (3.3.2).

Тогда ИДУ (3.4.1) сводится к следующей эквивалентной системе:

$$\begin{cases} x''(t)+px'(t)+qx(t)=W(t)y(t), \\ y'(t)+b_2(t)y(t)+b_1(t)x'(t)+b_0(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}[P_0(t,\tau)x(\tau)+ \\ +P_1(t,\tau)x'(\tau)+K(t,\tau)y(\tau)]d\tau=F(t),\ t\ge t_0, \end{cases} \qquad (3.4.2)$$

где

$$b_2(t)\equiv a_2(t)-p+W'(t)(W(t))^{-1},\quad b_1(t)\equiv (W(t))^{-1}[a_1(t)-pa_2(t)+p^2-q],$$
$$b_0(t)\equiv (W(t))^{-1}[a_0(t)-qa_2(t)+pq],\quad P_0(t,\tau)\equiv (W(t))^{-1}[Q_0(t,\tau)-qQ_2(t,\tau)],$$
$$P_1(t,\tau)\equiv (W(t))^{-1}[Q_1(t,\tau)-pQ_2(t,\tau)],\ K(t,\tau)\equiv (W(t))^{-1}Q_2(t,\tau)W(\tau),\quad F(t)\equiv$$
$$\equiv (W(t))^{-1}f(t).$$

Теперь поступаем аналогично работе [35]. А именно каждое уравнение системы (3.4.2) преобразуем отдельно, как и в разделе 3.3. Для произвольно фиксированного решения $(x(t),\,y(t))$ первое уравнение системы (3.4.2), т.е. замену

(3.3.2) возводим в квадрат, интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, и приходим к тождеству (3.3.4).

Для преобразования второго уравнения системы (3.4.2), т.е. ИДУ первого порядка для $y(t)$, аналогично [38] введем следующие предположения и обозначения:

$$K(t,\tau)=\sum_{i=0}^{n}K_i(t,\tau)\,, \tag{K}$$

$$F(t)=\sum_{i=0}^{n}F_i(t), \tag{F}$$

$\psi_i(t)\ (i=1...n)$ - некоторые срезывающие функции,

$$P_i(t)\equiv K_i(t,t)(\psi_i(t))^{-2},\ \ T_i(t,\tau)\equiv K_i(t,\tau)(\psi_i(\tau))^{-1},$$

$$E_i(t)\equiv F_i(t)(\psi_i(t))^{-1},$$

$$P_i(t)=A_i(t)+B_i(t)\quad (i=1..n), \tag{P}$$

$c_i(t)\,(i=1...n)$ - некоторые функции, т.е. применяем метод частичного срезывания.

Заметим, что ядра $T_i(t,\tau)\ \ (i=1...n)$ называются частично срезанными [38].

Для произвольно фиксированного решения $\big(x(t),\,y(t)\big)$ системы (3.4.2) ее второе уравнение умножаем на $y(t)$, производим интегрирование в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, при этом вводим условия $(K),(F),(P)$, функции $T_i(t,\tau),E_i(t),c_i(t)\ (i=1..n)$, используем леммы 1.4, 1.5 [28]. В итоге получаем следующее тождество:

$$V_2(t)\equiv(y(t))^2+2\int_{t_0}^{t}b_2(s)(y(s))^2+\int_{t_0}^{t}y(s)\{b_1(s)x'(s)+b_0(s)x(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{s}[P_0(s,\tau)x(\tau)+P_1(s,\tau)x'(\tau)+$$

$$+K_0(s,\tau)y(\tau)]d\tau-F_0(s)\}ds+\sum_{i=1}^{n}\{A_i(t)(Y_i(t,t_0))^2-\int_{t_0}^{t}A_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2ds+$$

$$+B_i(t)(Y_i(t,t_0))^2-2E_i(t)Y_i(t,t_0)+c_i(t)-\int\limits_{t_0}^{t}[B_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2-2E_i'(s)Y_i(s,t_0)+$$

$$+c_i'(s)]ds-2\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s}T_{i\tau}'(s,\tau)Y_i(\tau,t_0)y(s)d\tau ds]\equiv V_2(t_0), \qquad (3.4.3)$$

где

$$Y_i(t,\tau)\equiv\int\limits_{\tau}^{t}\psi_i(\eta)y(\eta)d\eta \quad (i=1..n).$$

Сложим тождества (3.3.4), (3.4.3) и получаем окончательное энергетическое тождество для любого произвольно фиксированного решения $(x(t),\ y(t))$ системы (3.4.2):

$$V(t)\equiv\int\limits_{t_0}^{t}[(x''(s))^2+(p^2-q)(x'(s))^2+q^2(x(s))^2]ds+p(x'(t))^2+2qx(t)x'(t)+pq(x(t))^2+$$

$$+(y(t))^2+2\int\limits_{t_0}^{t}b_2(s)(y(s))^2+\int\limits_{t_0}^{t}y(s)\{b_1(s)x'(s)+b_0(s)x(s)+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{s}[P_0(s,\tau)x(\tau)+P_1(s,\tau)x'(\tau)+K_0(s,\tau)y(\tau)]d\tau-F_0(s)\}ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\{A_i(t)(Y_i(t,t_0))^2-\int\limits_{t_0}^{t}A_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2ds+B_i(t)(Y_i(t,t_0))^2-2E_i(t)Y_i(t,t_0)+c_i(t)-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t}[B_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2-2E_i'(s)Y_i(s,t_0)+c_i'(s)]ds-2\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s}T_{i\tau}'(s,\tau)Y_i(\tau,t_0)y(s)ds]\equiv$$

$$\equiv V(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}(W(s))^2(y(s))^2ds, \qquad (3.4.4)$$

где

$$V(t)\equiv V_1(t)+V_2(t).$$

Переходя от тождества (3.4.4) к интегральному неравенству, аналогично теореме и следствию 1 работы [35], применением неравенства между средней арифметической и геометрической двух неотрицательных функций, неравенства

Коши-Буняковского, метода интегральных неравенств Ю.А. Ведь, З. Пахырова [14] и леммы Люстерника-Соболева из раздела 3.3 доказывается

ТЕОРЕМА 3.4.1. Пусть 1) $p>0,\, q>0,\, W(t)>0,$ выполняются условия *(К), (F),(P)*; 2) $p^2-q>0;$ 3) $b_2(t)\ge 0;$ 4) $A_i(t)\ge 0,$ существуют функции $A_i^*(t)\in L^1(J,R_+)$ акие, что $A_i'(t)\le A_i^*(t)A_i(t)$ $(i=1..n);$ 5) $B_i(t)\ge 0,\, B_i'(t)\le 0,$ существуют функции $c_i(t)$ такие, что $(E_i^{(k)}(t))^2\le B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t)$ $(i=1..n;\ k=0,1);$

6) $(W(t))^2+(b_k(t))^2+[\int\limits_{t_0}^{t}(P_k(t,\tau))^2d\tau]^{\frac{1}{2}}+\left|F_0(t)\right|+\int\limits_{t_0}^{t}\left|K_0(t,\tau)\right|d\tau+$

$+\int\limits_{t_0}^{t}\left|T_{i\tau}'(t,\tau)\right|(A_i(\tau))^{-\frac{1}{2}}d\tau\in L^1(J,R_+\setminus\{0\})$ $(k=0,1;\ i=1..n).$

Тогда для любого решения $(x(t),y(t))$ системы (3.4.2) верны следующие утверждения:

$$x^{(k)}(t)\in L^2(J,R)\ \ (k=0,1,2), \tag{3.4.5}$$

$$y(t)=O(1). \tag{3.4.6}$$

Пусть, кроме того, 7) $W(t)\to 0,\, t\to\infty.$ Тогда все решения ИДУ (3.4.1) и их первые и вторые производные стремятся к нулю при $t\to\infty$, иначе говоря, любое решение ИДУ третьего порядка (3.4.1) асимптотически устойчиво.

Заметим, что из утверждений (3.4.5) на основе леммы Люстерника-Соболева имеем, что $x^{(k)}(t)\to 0,\, t\to\infty$ $(k=0,1).$ В силу условия 7) и утверждения (3.4.6) из замены (3.3.2) получаем, что $x''(t)\to 0,\, t\to\infty.$ Следовательно, для любого $x(t)$ ИДУ (3.4.1) $x^{(k)}(t)\to 0,\, t\to\infty$ $(k=0,1,2),$ что дает асимптотическую устойчивость решений ИДУ третьего порядка (3.4.1).

ПРИМЕР 3.4.1. Для ИДУ третьего порядка

$$x'''(t)+[3+D(t)]x''(t)+[2D(t)-3-\frac{e^{-t}\sin t}{t}]x'(t)+[D(t)-2-\frac{e^{-t}}{t+1}]x(t)+$$

$$+\int_0^t\{[Q_2(t,\tau)+\frac{e^{-t}}{(t^2+1)(\tau^2+1)}]x(\tau)+[Q_2(t,\tau)-\frac{2e^{-2t}}{t+\tau+1}]x'(\tau)+Q_2(t,\tau)x''(\tau)\}d\tau=$$

$$=-4e^{-t+t^2}\sin t+e^{-t-t^2}\cos t,\quad t\ge 0,$$

где

$$D(t)\equiv\exp[t(\cos t)^{\frac{1}{3}}],\ Q_2(t,\tau)\equiv e^{-t+\tau+t^2+\tau^2}(e^{-5t^2+\sqrt[3]{\sin t}-\tau}-$$

$$-e^{-5t^2-t+\sqrt[3]{\sin t}}+9)^{\frac{1}{2}}\sin t\sin\tau-\frac{e^{-t+\tau}}{(t+\tau+1)^7},$$

выполняются все условия теоремы 3.4.1 при $p=2,\ \ q=1, W(t)\equiv e^{-t},$ здесь

$$t_0=0,\ b_2(t)\equiv D(t), b_1(t)\equiv-\frac{\sin t}{t}, b_0(t)\equiv-\frac{1}{t+1}, P_0(t,\tau)\equiv-\frac{1}{(t^2+1)(\tau^2+1)},$$

$$P_1(t,\tau)\equiv-\frac{2e^{-t}}{t+\tau+1},\ n=1, \psi_1(t)\equiv e^{t^2}\sin t,\ K_1(t,\tau)\equiv e^{t^2+\tau^2}(e^{-5t^2+\sqrt[3]{\sin t}-\tau}-$$

$$-e^{-5t^2-t+\sqrt[3]{\sin t}}+9)^{\frac{1}{2}}\sin t\sin\tau,\ K_0(t,\tau)\equiv-\frac{1}{(t+\tau+1)^7}, P_1(t)\equiv 3,\ A_1(t)\equiv 1,\ B_1(t)\equiv 2,$$

$$F(t)\equiv-4e^{t^2}\sin t+e^{-t^2}\cos t,\ E_1(t)\equiv-4, c_1(t)\equiv 4,$$

$$T_1(t,\tau)\equiv(e^{-5t^2+\sqrt[3]{\sin t}-\tau}-e^{-5t^2-t+\sqrt[3]{\sin t}}+9)^{\frac{1}{2}}e^{t^2}\sin t,$$

и, значит, любое решение и его первые и вторые производные этого ИДУ стремятся к нулю при $t\to\infty$, т.е. любое решение асимптотически устойчиво.

Отметим, что коэффициенты $a_k(t)\ (k=0,1,2)$ и срезанное ядро $T_1(t,\tau)$ недифференцируемы при $t\ge 0$.

Заметим, что выше поставленная задача ранее решена в [33] применением к первому уравнению системы (3.4.2) модифицированный метод преобразования уравнений [24, 27]. Анализ полученных результатов показывает, что условия полученные в настоящей работе и в [33] не пересекаются. Тем самым, расширяется класс ИДУ третьего порядка вида (3.4.1), для которого выше сформулированная задача решаема.

3.5. Заключение по главе 3

Установлены достаточные условия оценки, ограниченности, степенной абсолютной интегрируемости на полуоси, стремления к нулю, в том числе по экспоненциальному и степенному закону, при неограниченном возрастании независимой переменной решений слабо нелинейного ИДУ первого порядка типа Вольтерра в случае, когда решения соответствующего слабо нелинейного ДУ первого порядка могут не обладать соответствующими асимптотическими свойствами; для оценки, ограниченности, степенной абсолютной интегрируемости на полуоси, стремления к нулю, в том числе по экспоненциальному и степенному закону, при неограниченном возрастании независимой переменной всех решений и их первых производных линейного вольтеррова ИДУ второго порядка; специфической асимптотической устойчивости, т.е. асимптотической устойчивости решений линейного однородного ИДУ третьего порядка в случае, когда решения соответствующего линейного однородного ДУ третьего порядка не могут быть асимптотически устойчивыми; асимптотической устойчивости на полуоси решений линейного ИДУ третьего порядка типа Вольтерра в случае, когда коэффициенты и срезанное ядро этого ИДУ могут быть недифференцируемыми в некторых точках полуоси.

Во всех разделах построены иллюстративные примеры.

ВЫВОДЫ

Получены формулы для решений и установлены достаточные условия для экспоненциальной оценки на полуоси и стремления к нулю при неограниченном возрастании независимой переменной решения задачи Коши для одного класса линейных ДУ и ИДУ второго порядка;оценки и ограниченности на полуоси решения задачи Коши для одного класса линейных ДУ второго и третьего порядков.

Установлены достаточные условия оценки, ограниченности, степенной абсолютной интегрируемости на полуоси, стремления к нулю, в том числе по экспоненциальному и степенному закону, при неограниченном возрастании независимой переменной решений слабо нелинейного ИДУ первого порядка типа Вольтерра в случае, когда решения соответствующего слабо нелинейного ДУ первого порядка могут не обладать соответствующими асимптотическими свойствами; для оценки, ограниченности, степенной абсолютной интегрируемости на полуоси, стремления к нулю, в том числе по экспоненциальному и степенному закону, при неограниченном возрастании независимой переменной всех решений и их первых производных линейного вольтеррова ИДУ второго порядка; специфической асимптотической устойчивости, т.е. асимптотической устойчивости решений линейного однородного ИДУ третьего порядка в случае, когда решения соответствующего линейного однородного ДУ третьего порядка не могут быть асимптотически устойчивыми; асимптотической устойчивости на полуоси решений линейного ИДУ третьего порядка типа Вольтерра в случае, когда коэффициенты и срезанное ядро этого ИДУ могут быть недифференцируемыми в некторых точках полуоси.

Во всех разделах построены иллюстративные примеры.

Эти результаты могут найти применение в качественной теории ДУ и вольтеррова типа ИДУ; при качественном исследовании некоторых процессов из квантовой механики, биологии, медицины, экологии, аэро и космодинамики.

СПИСОКИСПОЛЬЗОВАННОЙЛИТЕРАТУРЫ

1. Азбелев Н.В. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными [Текст] / Н.В. Азбелев, П.М. Симонов. – Пермь : Изд-во Пермск. ун-та, 2001. – 230 с.
2. Азбелев Н.В. Об интегральных и дифференциальных неравенствах [Текст] / Н.В. Азбелев, З.Б. Цалюк // Тр. Четвертого Всесоюзного мат. съезда. – Ленинград: Наука, 1964. – Т.2. – С.384-391.
3. Акмагамбетов Б. Об устойчивости одной динамической системы // Дифференциальные уравнения и их применение [Текст] / Б. Акмагамбетов. – Алма-Ата: Наука, 1967. – С. 103-105.
4. Алымкулов К.А. Об ограниченных решениях одного класса возмущенных интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / К.А. Алымкулов, А.Б. Бейшенкулов // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек:Илим,1992. – Вып.24. – С.271-274.
5. Асанова К. А. Асимптотическая устойчивость решений одного класса линейных дифференциальных уравнений второго порядка на полуоси [Текст] / К.А. Асанова // Исслед. по интегро-диффренц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2014. – Вып.46. – С. 98-102.
6. Асанова К.А. Устойчивость решений одного класса линейных интегро- дифференциальных уравнений второго порядка на полуоси [Текст] / К.А. Асанова // Символ науки. – 2016. – № 6, Ч.1. – С.10-13.
7. Асанова К.А. Ограниченность решения одного класса линейных дифференциальных уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами на полуоси [Текст] / К.А. Асанова // Жалал-Абад мамлекеттик университетинин жарчысы. – 2016. – №1(32). – С.20-24.
8. Асанова К. А. Формулы для решения одного класса линейных дифференциальных уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами [Текст] / К. А. Асанова, Р.А. Асанов // Символ науки. – 2016. – №1, Ч.1. – С.20-25.

9. Асанова К.А. Об оценке решений и их первых производных линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка [Текст] / К.А. Асанова, С. Искандаров // Тр. XI Международной Азиатской школы-семинара «Проблемы оптимизации сложных систем», 27 июля – 7 авг. 2015 г. – Чолпон-Ата, 2015. – Ч. I. – С. 86-91.
10. Афанасьев В.Н. Математическая теория конструирования систем управления [Текст] / В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов. – М.: Высшая школа, 1989. – 448 с.
11. Беллмана Р. Введение в теорию матриц [Текст] / Р.Беллмана: Пер. с англ. – М.: Наука, 1976. – 352 с.
12. Быков Я.В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений[Текст] / Я.В.Быков. – Фрунзе: Киргиз.гос. ун-т, 1957. – 328 с.
13. Ведь Ю.А. О возмущениях линейных однородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [Текст] / Ю.А. Ведь // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии.-Фрунзе:Илим,1965. –Вып.3. – С.93-121.
14. Ведь Ю.А. Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / Ю.А. Ведь, З. Пахыров // Исслед. по интегро-диффренц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим, 1973. – Вып.9. – С. 68-103.
15. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений [Текст]: Пер. с англ. и доп.М.К.Керимова / В. Вольтерра. – М.:Наука, 1982. – 304 с.
16. Жапарова З.А. Об оценках и специфической асимптотической устойчивости решений линейного однородного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка [Текст] / З.А. Жапарова // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. – Бишкек: КНУ, 2012. – Вып.5. – С. 20-25.
17. Зайцев В.Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям [Текст] / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. – М., 2001. – 576 с.

18. Иманалиев М. Колебания и устойчивость решений сингулярно - возмущенных интегро-дифференциальных систем [Текст] / М. Иманалиев. – Фрунзе: Илим, 1974. –352 с.
19. Иманалиев М.И. Специфический признак устойчивости решений линейного однородного вольтеррова интегродифференциального уравнения четвертого порядка [Текст] / М.И.Иманалиев, С. Искандаров // Докл. Российск. Акад. наук. – 2009. – Т. 425, №4. – С. 447 - 451.
20. Иманалиев М.И. Об ограниченности решений одного класса линейных дифференциальных уравнений второго порядка на полуоси [Текст] / М.И. Иманалиев, А. Асанов, К.А. Асанова // Тр. X Международной Азиатской школы-семинара «Проблемы оптимизации сложных систем», 25 июля -5 августа 2014 г.–Булан-Соготту (Иссык-Куль), 2014. – Ч. I. – С.306-310.
21. Иманалиев М.И. Лемма Люстерника-Соболева и специфическая асимтотическая устойчивость решений линейного однородного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка типа Вольтерры [Текст] / М.И. Иманалиев, К.А. Асанова, С. Искандаров // Докл. Российск. Акад. наук. – 2016. – Т. 469, №4. – С. 397 - 401.
22. Искандаров С. Достаточные условия ограниченности и устойчивости решений слабо нелинейных интегро-дифференциальных уравнений первого и второго порядка типа Вольтерра. Неограниченность решений линейных однородных уравнений первого порядка [Текст] / С. Искандаров // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1980. – Вып.13. – С. 149-184.
23. Искандаров С. Об ограниченности и квадратичной интегрируемости на полуоси решений и их первых производных одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра [Текст] / С. Искандаров // Изв. АН Киргиз.ССР. –1983. – № 1. – С.19-23.
24. Искандаров С. Модификация метода В. Вольтерры для исследования асимптотического поведения решений линейного уравнения второго порядка

[Текст] / С.Искандаров // Дифференц.уравнения. –1991. –Т.27, № 9. –С.1638-1639.

25. Искандаров С. Об асимптотических представлениях и свойствах решений и их первых и вторых производных одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений третьего порядка типа Вольтерра [Текст] / С. Искандаров // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек:Илим, 1991. –Вып.23. – С. 15-21.

26. Искандаров С. Об асимптотических свойствах решений слабо нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра на полуоси [Текст] / С. Искандаров // Исслед. по интегро-дифференц.уравнениям. – Бишкек: Илим, 1998. – Вып.27. – С. 102-108.

27. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра [Текст] / С. Искандаров. – Бишкек: Илим, 2002. – 216 с.

28. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений уравнений типа Вольтерра [Текст] /: Автореф. дис…докт. физ.-мат. наук: 01.01.02 / С. Искандаров. – Бишкек, 2003. – 34 с.

29. Искандаров С. О методе сведения к системе для линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка [Текст] / С. Искандаров // Исслед. по интегро-диффренц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2006. – Вып.35. – С. 31–35.

30. Искандаров С. О методе сведения к системе для линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка [Текст] / С. Искандаров // Исслед. по интегро-диффренц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2007. – Вып.36. – С. 31–35.

31. Искандаров С. О новом варианте метода нестандартного сведения к системе для линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка [Текст] / С. Искандаров // Исслед. по интегро-диффренц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2007. – Вып.37. – С. 24-29.

32. Искандаров С. Асимптотическая устойчивость двух классов интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерры [Текст] / С. Искандаров // Дифференц. уравнения. – Москва, 2008. – Т. 44, №7. – С. 883-895.
33. Искандаров С. Нестандартный метод сведения к системе и асимптотическая устойчивость решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка [Текст] / С. Искандаров // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. – Бишкек: КНУ, 2011. – Спец. вып. – С. 66-70.
34. Искандаров С. Об одном нестандартном методе исследования асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка [Текст] / С. Искандаров // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2012. – Вып. 44. – С.44-51.
35. Искандаров С. О методе исследования асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения пятого порядка [Текст] / С. Искандаров // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2014. – Вып. 46. – С.41-48.
36. Искандаров С. Метод частичного срезывания, оценка и асимптотические свойства решений слабо нелинейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка [Текст] / С. Искандаров, К.А. Асанова // Исслед. по интегро-диффренц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2014. – Вып.46. – С. 49-53.
37. Искандаров С. Об асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка [Текст] / С. Искандаров, К.А. Асанова // Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета. – 2016. – Том 16,№ 9. – С. 12-15.
38. Искандаров С. Метод частичного срезывания и ограниченность решений неявного вольтеррова интегро- дифференциального уравнения первого порядка [Текст] / С. Искандаров, Д.Н. Шабданов // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2004. – Вып.33. – С. 67-71.

39. Искандаров С. Развитие метода частичного срезывания для изучения свойств решений вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка с функционалом [Текст] / С. Искандаров, Д. Н. Шабданов // Исслед. по интегро-диффренц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2006. – Вып.35. – С. 41 – 47.
40. Искандаров С. О методе частичного срезывания для вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка [Текст] / С. Искандаров, Д. Н. Шабданов // Исслед. по интегро-диффренц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2007. – Вып.36. – С. 63 - 67.
41. Искандаров С. Специфическая оценка решений линейного однородного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка [Текст] / С. Искандаров, Д. Н. Шабданов // Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. Сер. матем., мех., информатика. – Алматы, 2008 . – №3. – Спец. выпуск. – С. 110-115.
42. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям [Текст] / Э. Камке. – СПб.: Изд-во «Лань», 2003. – 576 с.
43. Каюпов А.К. Об ограниченности решений некоторых дифференциальных уравнений третьего порядка [Текст] / А.К. Каюпов // Дифференциальные уравнения и их применение. – Алма-Ата: Наука, 1967. – С. 65-74.
44. Кигурадзе И.Т. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / И.Т.Кигурадзе, Т.А. Чантурия. – М.: Наука, 1990. – 432 с.
45. Куликов Н.К. Инженерный метод решения и исследования обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / Н.К. Куликов. – М.: Высшая школа, 1964. – 224 с.
46. Кыдыралиев С.К. Факторизация обыкновенных линейных дифференциальных операторов [Текст] / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2000. – Вып.29. – С.246-253.

47. Лакшмикантам В. Устойчивость движения: метод сравнения [Текст] / В. Лакшмикантам, С.Лила, А.А. Мартынюк. – Киев:Наук.думка,1991.– 248 с.
48. Ландау Э. Введение в дифференциальное и интегральное исчисление [Текст] / Э. Ландау. – М.: Гос. изд-во иностр. литературы, 1948. – 461 с.
49. Люстерник Л.А. Элементы функционального анализа [Текст] / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука, 1965. – 520 с.
50. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения [Текст] / Д.Р. Меркин. – М.:Наука, 1976. – 320 с.
51. Ражапов Г. Об устойчивости свойства ограниченности решений линейных однородных дифференциальных уравнений в пространстве $L^p(t_0,\infty)$ $(p=1,2)$ [Текст] / Г. Ражапов //Мат-лы 13-й науч.конф.проф.-препод.состава физ.-мат.фак-та Киргиз.гос.ун-та.Секц.матем. – Фрунзе:Мектеп,1965. – С.72-74.
52. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / М.В. Федорюк. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
53. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений [Текст]: Пер.с англ. / Дж. Хейл. – М.:Мир,1984. – 424 с.
54. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / Л. Чезари. – М.: Мир, 1964. – 477 с.
55. Шабданов Д.Н. Об одном специфическом признаке устойчивости решений линейного однородного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка типа Вольтерра [Текст] / Д. Н. Шабданов // Исслед. по интегро-дифф-ренц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2010. – Вып.42. – С. 35-41.
56. Asanov Avyt. One Formula for Solution of the Linear Differential Equations of the Second Order with the Variable Coefficients [Текст] / Avyt Asanov, M.Haluk Chelik, Ruhidin Asanov // Global Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2012. – Vol. 8, N. 3. – P. 321-328.

57.Burton T.A. Volterra Integral and Differential Equations: Second edition [Текст] / T.A. Burton. –New York a.o.: Elsevier, 2005. –VIII+367 p.
58.Gripenberg G. Volterra integral and functional equations [Текст] / G. Gripenberg, S.- O. Londen, O.Staffans. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990. – 701 p.
59.Imanaliev M. The Lyusternik-Sobolev Lemma and the Specific Asymptotic Stability of Solutions of Linear Homogeneous Volterra type Integro-Differential Equations of Order 3 [Текст] / M.Imanaliev, K.A. Asanova, S. Iskandarov // Doklady Mathematics. – 2016. – Vol. 94, № 1. – P. 418-422.
60.Tada T. A method by separation of variables for the first order nonlinear ordinary differential equations [Текст] / T. Tada, S. Saiton // Journal of Analysis and Applications. – 2004. – Vol. 2. – P.51-53.
61. Tada T. A method by separation of variables for the second order ordinary differential equations [Текст] / T. Tada, S. Saiton // International Journal of Mathematical Sciences. – 2005. Vol. 3, N.2. – P.285-296.
62.Tungatarov A. General solution of second order linear ordinary differential equations with variable coefficients [Текст] / A.Tungatarov, D.K. Akhmed-Zaki // Journal of Inequalities and Special Functions. – 2012. – Vol.3, N. 4. – P. 42-49.
63.Walter W. Ordinary Differential Equations [Текст] / W. Walter: Graduate Texts in Mathematics. –Springer,1998. – 384 p.