НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙРЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им.Ж.БАЛАСАГЫНА

Диссертационный совет Д 01.15.513

На правах рукописи
УДК 517.968.72+74

АСАНОВА КАНЫКЕЙ АВЫТОВНА

ОЦЕНКИ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПОЛУОСИ

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Бишкек – 2017

Работа выполнена в лаборатории теории интегро-дифференциальных уравнений Института теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Искандаров С.**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук,профессор, член-корреспондент НАН КР **Алымкулов К.,** кандидат физико-математических наук, доцент **Пахыров З.**
Ведущая организация:	Казахский Национальный университет им. аль-Фараби. Адрес: Республика Казахстан, 050038, г.Алматы, пр. аль-Фараби, 71.

Защита диссертации состоится «11» апреля 2017г. в 16-00 часов на заседании диссертационного совета Д 01.15.513 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук при Институте теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики и Кыргызском Национальном университете им.Ж.Баласагына по адресу: Кыргызстан, 720054, г.Бишкек, ул. Абдымомунова 328, лабораторный корпус №6 КНУ, аудитория 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН КР, Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а и на сайте: www.math.aknet.kg ИТПМ НАН КР.

Автореферат разослан “__07_” марта 2017 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета, к.э.н., доцент Чороев К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации.

Известно что в последнее время в связи с широким применением усилились исследования по развитию теории эволюционных систем. В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов (1989)написали: «На описательном уровне под эволюционной системой можно понимать техническую, физическую, биологическую, экологическую и любую иную систему, для которой изучаются изменения, протекающие в ней с течением времени. Математически эволюционные системы могут описаться различными способами». Эти же авторы в числе наиболее часто встречающихся классов эволюционных систем и способов их описания указали (1989):

непрерывные системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями;

системы с последействием, для описания которых используются функционально - дифференциальные уравнения. Такие системы возникают тогда, когда протекание процесса определяется не только состоянием системы в данный момент, но также и предысторией процесса.

М.В. Федорюк(1980) отметил: «Дифференциальные уравнения, которые интегрируются в квадратурах, никогда не могли удовлетворить потребностей естествознания». Это замечание относится и другим уравнениям, особенно интегро-дифференциальным уравнениям типа Вольтерра на полуоси. Следовательно, как отметил А. Пуанкаре, наряду с исследованиями по приближенным и численным методам решений дифференциальных и вольтеррова типа интегро-дифференциальных уравнений, актуальными являются исследования по качественной теории этих уравнений.

Отметим, что в развитие общей и качественной теории дифференциальных и вольтеррова типа интегро-дифференциальных уравнений существенный вклад внесли такие ученые, как Ж. Лиувилль, Ж. Л. Лагранж, М. Остроградский, А. Пуанкаре, А.М. Ляпунов, В. Вольтерра, Я.В. Быков, Р. Беллман, К.Л. Кук, C. Corduneanu, Ф. Хартман, В.В. Немыцкий, В.В. Степанов, А.Д. Мышкис, Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон, Л.Э. Эльсгольц, Б.П. Демидович, Л. Чезари, Н.Н. Красовский, В.И. Зубов, Е.А. Барбашин, А.М. Самойленко, Ю.А. Митропольский, М.И. Иманалиев, Ю.А. Ведь, А.И. Боташев, В.Р. Винокуров, К. Какишов, К.А. Алымкулов, П.С. Панков, Г.Р. Ражапов, З.Пахыров, А. Асанов, С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, А.Б. Байзаков, К.А. Касымов, М.К. Дауылбаев, А. Тунгагатаров, Т.М. Алдибеков, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов, Дж. Хейль, Б.С. Разумихина, А.А. Мартынюк, В. Лакшимикантам, С. Лила, А.А. Мартынюк, Н.В. Азбелев, В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматуллина, М.Е. Драхлин, В.А. Кондратьев, И.Т. Кигурадзе, Т.А. Чантурия, Ю.И. Домшлак, Ю.А. Клоков, В.М. Миллионшиков, И.Н. Сергеев, Л.М. Березанский, А.И.Домошницкий, П.М. Симонов, А.В. Чистяков, T.A. Burton, J.A. Nohel, G. Gripenberg, S.- O. Londen, O. Staffans и др. В работах этих ученых созданы новые методы и определены новые направления научных исследований.

Анализ работ других авторов показывает, что наиболее актуальными являются исследования по общей и качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений второго и третьего порядков, а также интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра.

Заметим, что изучение устойчивости протекания процессов с течением времени способствуют развитию качественной теории дифференциальных и интегро- дифференциальных уравнений типа Вольтерра.

В своей статье (1964) Н.В. Азбелев, З.Б. Цалюк написали, что «центральным пунктом аналитических методов исследования вопросов качественной теории уравнений является проблема оценки решения уравнения».

Данная диссертационная работа посвящена оценкам и асимптотическим свойствам решений новых классов дифференциальных и вольтеррова типа интегро-дифференциальных уравнений на полуоси.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами. Работа выполнена в рамках проектов НИР Института теоретической и прикладной математики НАН КР: «Развитие и приложения компьютерного моделирования, асимптотических и аналитических методов в теории динамических систем, обратных и оптимизационных экономических задач и в анализе геофизических данных для оперативного прогноза землетрясений» (2012-2014), номер гос. регистрации № 0005756, «Развитие и приложения компьютерного моделирования, асимптотических, топологических и аналитических методов в теории устойчивости динамических систем, разрешимости обратных задач, экономических и геофизических процессов» (2015-2017), номер гос. регистрации № 0007125 и включены в отчеты по этим проектам.

<u>Цели и задачи исследования.</u>

Применением и развитием качественных методов, разработанных в ИТПМ НАН КР, получить достаточные условия, обеспечивающие оценки и асимптотические свойства решений новых классов второго и третьего порядков дифференциальных и вольтеррова типа первого, второго, третьего порядков интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) на полуоси. Выявить влияние интегральных возмущений типа Вольтерра на асимптотические свойства решений соответствующих дифференциальныхуравнений (ДУ) первого порядка. Установить достаточные условия асимптотической устойчивости решений линейного однородного вольтеррова ИДУ третьего порядка в случае, когда решения соответствующего линейного однородного ДУ третьего порядка не могут быть асимптотически устойчивыми, т.е. специфической асимптотической устойчивости решений такого уравнения.

<u>Методика исследования.</u>

Применяются метод преобразования уравнений, метод весовых функций, метод частичного срезывания, нестандартные методы сведения к системе, метод возведения уравнений в квадрат, метод интегральных неравенств, разработанные в ИТПМ НАН КР.

Научная новизна работы.

Получены формулы для решений и установлены достаточные условия для экспоненциальной оценки на полуоси и стремления к нулю при неограниченном возрастании независимой переменной решения задачи Коши для одного класса линейных ДУ и ИДУ второго порядка; оценки и ограниченности на полуоси решения задачи Коши для новых классов линейных ДУ второго и третьего порядков.

Установлены достаточные условия оценки, ограниченности, степенной абсолютной интегрируемости на полуоси, стремления к нулю, в том числе по экспоненциальному и степенному закону, при неограниченном возрастании независимой переменной решений слабо нелинейного ИДУ первого порядка типа Вольтерра в случае, когда решения соответствующего слабо нелинейного ДУ первого порядка могут не обладать соответствующими асимптотическими свойствами; для оценки, ограниченности, степенной абсолютной интегрируемости на полуоси, стремления к нулю, в том числе по экспоненциальному и степенному закону, при неограниченном возрастании независимой переменной всех решений и их первых производных линейного вольтеррова ИДУ второго порядка; специфической асимптотической устойчивости, т.е. асимптотической устойчивости решений линейного однородного ИДУ третьего порядка в случае, когда решения соответствующего линейного однородного ДУ третьего порядка не могут быть асимптотически устойчивыми; асимптотической устойчивости на полуоси решений линейного ИДУ третьего порядка типа Вольтерра в случае, когда коэффициенты и срезанное ядро этого ИДУ могут быть недифференцируемыми в некоторых точках полуоси.

Для получения этих результатов существенно развиты метод преобразования уравнений, метод весовых функций, метод частичного срезывания, нестандартные методы сведения к системе, метод возведения уравнений в квадрат, метод интегральных неравенств.

Теоретическая и практическая ценность.

Настоящая работа носит теоретический характер и ее результаты могут найти применение в качественной теории ДУ и вольтеррова типа ИДУ; при качественном исследовании некоторых процессов из квантовой механики, биологии, медицины, экологии, аэро и космодинамики.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

– установление достаточных условий ограниченности на полуоси решения одного нового класса линейных ДУ второго порядка с переменными коэффициентами; для экспоненциальной оценки на полуоси решения новых классов линейных ДУ и вольтеррова типа ИДУ второго порядка с переменными коэффициентами с помощью полученной новой формулы их решения;

– получение новой формулы решения и установление достаточных условий ограниченности на полуоси решения одного нового класса линейных ДУ третьего порядка с переменными коэффициентами на основе разложения линейных дифференциальных операторов третьего порядка.

Установление достаточных условий:

– для оценки, ограниченности, степенной абсолютной интегрируемости на полуоси, стремления к нулю, в том числе по экспоненциальному и степенному закону, при неограниченном возрастании независимой переменной решений слабо нелинейного ИДУ первого порядка типа Вольтерра в случае, когда решения соответствующего слабо нелинейного ДУ первого порядка могут не обладать соответствующими асимптотическими свойствами;
– для оценки, ограниченности, степенной абсолютной интегрируемости на полуоси, стремления к нулю, в том числе по экспоненциальному и степенному закону, при неограниченном возрастании независимой переменной всех решений и их первых производных линейного вольтеррова ИДУ второго порядка;
– специфической асимптотической устойчивости, т.е. асимптотической устойчивости решений линейного однородного ИДУ третьего порядка в случае, когда решения соответствующего линейного однородного ДУ третьего порядка не могут быть асимптотически устойчивыми;

асимптотической устойчивости на полуоси решений линейного ИДУ третьего порядка типа Вольтерра в случае, когда коэффициенты и срезанное ядро этого ИДУ могут быть недифференцируемыми в некоторых точках полуоси.

Личный вклад соискателя. Задачи исследования по теме диссертации поставлены научным руководителем С. Искандаровым. Все материалы, включенные в диссертацию, принадлежат автору.

Апробация результатов диссертации.

Результаты настоящей работы доложены и обсуждены на:

– X Международной Азиатской школе-семинаре «Проблемы оптимизации сложных систем»,(25 июля - 5 августа 2014 г., с. Булан - Соготту, Иссык-Кульская обл.);
– XI Международной Азиатской школе-семинаре «Проблемы оптимизации сложных систем» (27 июля – 7 августа 2015 г., г. Чолпон-Ата, Иссык-Кульская обл.);
– Международной научной конференции "Актуальные проблемы математики и информатики", посвященной памяти академика НАН РК Касымова Кулжабая Абдыкалыковича (22 дек. 2015 г., г. Алматы, КазНУ им. аль-Фараби, Казахстан);

V Международной научной конференции "Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике", посвященной 85-летию академика НАН

КР и члена-корреспондента РАН М.И. Иманалиева (13 сент. 2016 г., г. Бишкек).

Публикации по теме диссертации.

Основное содержание диссертации опубликовано в 10 работах [36, 5, 20, 9, 8, 21, 59, 6, 7, 37], из них: 8 статьи [36, 5, 8, 21, 59, 6, 7, 37], 2 доклада в материалах конференции [20, 9] . В совместных работах [36, 20, 9, 8, 21, 59, 37] постановка задачи принадлежит научному руководителю С. Искандарову, обсуждение результатов – соавторам, доказательство теорем, следствий и построение иллюстративных примеров – автору.

Структура и объем диссертации.

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, содержащих 14 разделов, выводов и списка использованной литературы из 63 наименования, 84 стр. компьютерного текста.

В диссертации принята тройная нумерация внутри каждого раздела главы. Например, теорема 2.1.1 означает первую теорему раздела 1 главы 2; (3.2.5) - пятая формула раздела 2 главы 3.

В автореферате сохранена нумерация, принятая в диссертации. Ниже в настоящей работе: $J=[t_0,\infty), t_0\in R, t\ge t_0 \Leftrightarrow t\in J$.

Краткое содержание диссертации.

В главе 1, состоящей из трех разделов, приводятся обзор близких работ других авторов к теме диссертации, леммы о формуле решения линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, о частичном срезывании и об интегральном неравенстве, и заключения.

Глава 2, состоящая из шести разделов, посвящена вопросам оценки и ограниченности решений линейных дифференциальных и вольтеррова типа интегро-дифференциальных уравнений на полуоси

В разделе 2.1 установлены достаточные условия экспоненциальной оценки на полуинтервале J решенийлинейного ДУ второго порядка

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t), \qquad t \ge t_0 \tag{2.1.1}$$

с начальными условиями

$$y(t_0) = m, \qquad y'(t_0) = n, m, n \in R. \tag{2.1.2}$$

с помощью доказанной новой формулы решения задачи (2.1.1), (2.1.2).

Приведем основные результаты этого раздела.

Предположим выполнения следующих условий:

а) $$q(t) = q_0(t) + q_1(t), t \ge t_0, \tag{2.1.3}$$

$$q_0(t) = K^2(t) + \beta^2(t) + K'(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}K(t), \qquad t \ge t_0, \tag{2.1.4}$$

$$K(t) = \frac{1}{2}\left[p(t) + \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\right], \tag{2.1.5}$$

где $q_0(t), q_1(t), K(t), p(t), f(t), \beta(t), K'(t), \beta'(t)$ - известные функции, причем $\beta(t) > 0$ и $K(t) \ge 0$;

б) $exp\left\{\int_{t_0}^{t} K(\tau)d\tau\right\}\frac{f(t)}{\beta(t)},\ \frac{q_1(t)}{\beta(t)} \in L^1\big(J,R\big)$.

ТЕОРЕМА 2.1.1.Пусть выполняются условия а) и б). Тогда решение $y(t)$ задачи Коши (2.1.1)-(2.1.2) удовлетворяет следующей оценке:

$$|y(t)| \le c_2 exp\left\{-\int_{t_0}^{t} K(s)ds\right\}, t \ge t_0\,, \tag{2.1.15}$$

где

$$c_2 = c_1 exp\left\{\int_{t_0}^{t} \left|\frac{q_1(s)}{\beta(s)}\right| |y(s)|ds\right\},$$

$$c_1 = |m| + \frac{1}{\beta(t_0)}|K(t_0)m + n| + \int_{t_0}^{t} exp\left\{\int_{t_0}^{s} K(\tau)d\tau\right\}\left|\frac{f(s)}{\beta(s)}\right| ds. \tag{2.1.16}$$

Из этой теоремы вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.1.1.Пусть выполняются условия а), б) и $K(t) \ge \propto\, > 0$, $\propto$ - постоянная. Тогда для решения задача Коши (2.1.1) - (2.1.2) справедлива следующая оценка:

$|y(t)| \le c_2 exp\{-\propto (t - t_0)\},\ t \ge t_0$.

В разделе 2.2 установлены достаточные условия ограниченности на J задачи (2.1.1), (2.1.2) на основе формулы решения этой задачи из раздела 2.1.

Пусть выполняются следующие условия:

а) $$q(t) = q_0(t) + q_1(t), t \ge t_0, \tag{2.2.3}$$

$$q_0(t) = K^2(t) + \beta^2(t) + K'(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}K(t), t \ge t_0, \tag{2.2.4}$$

$$K(t) = \frac{1}{2}\left[p(t) + \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\right], \tag{2.2.5}$$

где $q_0(t), q_1(t), K(t), p(t), f(t), \beta(t), K'(t),\ \beta'(t)$ - известные функции, $\beta(t) > 0$; б) $\frac{f(t)}{\beta(t)},\ \frac{q_1(t)}{\beta(t)} \in L^1\big(J,R\big)$.

ТЕОРЕМА 2.2.1.Пусть выполняются условия а) , б) и $K(t) \ge 0$. Тогда решение $y(t)$задачи Коши (2.2.1)-(2.2.2) ограничено на полуинтервале J и справедлива оценка:

$$|y(t)| \le c_1 exp\left\{\int_{t_0}^{t} \left|\frac{q_1(s)}{\beta(s)}\right| ds\right\}, \qquad t \ge t_0, \tag{2.2.14}$$

где

$$c_1 = |m| + \frac{1}{\beta(t_0)}|K(t_0)m + n| + \int_{t_0}^{\infty} \left|\frac{f(s)}{\beta(s)}\right| ds. \tag{2.2.15}$$

В разделе 2.3 установлены достаточные условия экспоненциальной оценки на полуинтервале J решений линейного ИДУ второго порядка

$$y'' + p(t)y' + q(t)y + \int_{t_0}^{t} Q(t,s)y(s)ds = f(t), \qquad t \geq t_0 \tag{2.3.1}$$

с начальными условиями

$$y(t_0) = m, \qquad y'(t_0) = n, m, n \in R, \tag{2.3.2}$$

где *p(t), q(t), f(t), Q(t,s)* - известные функции, исходя из доказанной, аналогичной к разделу 2.1, формулы решения для задачи (2.3.1), (2.3.2).

Предположим, что справедливы условия:

а) $q(t) = q_0(t) + q_1(t), t \geq t_0,$ (2.3.3)

$$q_0(t) = K^2(t) + \beta^2(t) + K'(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}K(t), t \geq t_0, \tag{2.3.4}$$

$$K(t) = \frac{1}{2}\left[p(t) + \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\right], \tag{2.3.5}$$

где $q_0(t), q_1(t), K(t), p(t), f(t), \beta(t)$ - известные функции, $\beta(t) > 0$ и $K(t) \geq 0, K'(t)$ и $\beta'(t)$ - производные функции соответственно $K(t)$ и $\beta(t)$.

б) $exp\left\{\int_{t_0}^{t} K(\tau)d\tau\right\}\frac{f(t)}{\beta(t)}, \ \frac{q_1(t)}{\beta(t)} \in L^1(J, R),$

$$\int_{s}^{\infty} \frac{|Q(\tau,s)|}{\beta(\tau)} \exp\left\{-\int_{\tau}^{s} K(\tau)d\tau\right\}d\tau \leq M(s), \qquad M(s) \in L^1(J, R_+).$$

ТЕОРЕМА 2.3.1.Пусть выполняются условия а) и б). Тогда решение $y(t)$ задачи Коши (2.3,1)-(2.3.2) удовлетворяет следующей оценке:

$$|y(t)| \leq c_2 exp\left\{-\int_{t_0}^{t} K(s)ds\right\}, t \geq t_0, \tag{2.3.15}$$

где

$$c_2 = c_1 exp\left\{\int_{t_0}^{\infty}\left[\left|\frac{q_1(s)}{\beta(s)}\right| + M(s)\right]ds\right\},$$

$$c_1 = |m| + \frac{1}{\beta(t_0)}|K(t_0)m + n| + \int_{t_0}^{t} exp\left\{\int_{t_0}^{s} K(\tau)d\tau\right\}\left|\frac{f(s)}{\beta(s)}\right|ds. \tag{2.3.16}$$

СЛЕДСТВИЕ 2.3.1.Пусть выполняются условия а), б) и $K(t) \geq \propto > 0, \propto$ - постоянная. Тогда для решения задача Коши (2.3.1)-(2.3.2) справедлива следующая оценка

$$|y(t)| \leq c_2 exp\{-\propto (t - t_0)\}, \qquad t \geq t_0.$$

В разделе 2.4 установлена новая формула для решения следующего линейного ДУ третьего порядка:

$$y''' + a_1(t)y'' + a_2(t)y' + a_3(t)y = f(t), \tag{2.4.1}$$

где $t \in G, G = [t_1, t_2)$ или $G = (t_1, t_2)$, $t_1 < t_2$, $a_1(t), a_2(t), a_3(t)$ и $f(t)$- известные непрерывные функции на G.

В этом разделе доказаны 2 теоремы о формуле решений ДУ (2.4.1). Приведем одну из них.

ТЕОРЕМА 2.4.1. Пусть $t_0 \epsilon G$ функции $a_1(t), a_2(t)$ и $a_3(t)$ представимы в виде

$$a_1(t) = \propto(t) + 2K(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)},$$

$$a_2(t) = 3K'(t) - \beta''(t)\beta^{-1}(t) + (\beta'(t))^2\beta^{-2}(t) + \propto(t)\left[2K(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\right] +$$

$$+K^2(t) + \beta^2(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}K(t),$$

$$a_3(t) = 2K(t)K'(t) + 2\beta(t)\beta'(t) + K''(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}K'(t) - \frac{\beta''(t)}{\beta(t)}K(t) +$$

$$+\left(\beta'(t)\right)^2\beta^{-2}(t)K(t) + \propto(t)\left[K^2(t) + \beta^2(t) + K'(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}K(t)\right],$$

где $t \epsilon G$ и $f(t), K''(t), \beta''(t), \propto(t) \epsilon C(G), \beta(t) \neq 0$ при всех $t \epsilon G$.Тогда общее решение дифференциального уравнения (2.4.1) записывается в виде

$$y(t) = y_0(t) + \sum_{i=1}^{3} c_i y_i(t), t \epsilon G, \qquad (2.4.2)$$

где c_1, c_2 и c_3 - произвольные постоянные,

$$y_0(t) = \int_{t_0}^{t} exp\left\{-\int_{s}^{t} K(\tau)d\tau\right\}\frac{1}{\beta(s)}\left\{\int_{t_0}^{s} e^{-\int_{\tau}^{s}\propto(\tau)d\tau} f(\tau)d\tau\right\}\sin\left[\int_{s}^{t}\beta(\tau)d\tau\right]ds,$$

$$y_1(t) = exp\left\{-\int_{t_0}^{t} K(s)ds\right\}cos\left[\int_{t_0}^{t}\beta(s)ds\right],$$

$$y_2(t) = exp\left\{-\int_{t_0}^{t} K(s)ds\right\}sin\left[\int_{t_0}^{t}\beta(s)ds\right],$$

$$y_3(t) = \int_{t_0}^{t}\frac{1}{\beta(s)}exp\left\{-\int_{s}^{t} K(\tau)d\tau - \int_{t_0}^{s}\propto(\tau)d\tau\right\}\sin\left[\int_{s}^{t}\beta(\tau)d\tau\right]ds,$$

Раздел 2.5 посвящен установлению достаточных условий ограниченности на полуинтервале $J = [t_0, \infty)$ решений линейного ДУ (2.4.1) с помощью новой формулы решения, доказанной в разделе 2.4.

Раздел 2.6 содержит анализ результатов главы 2. Отметим, что в главе 2 с помощью сравнительного анализа с результатами других авторов из справочника по обыкновенным ДУ В.Ф. Зайцева, А.Д. Полянина (2001) показывается новизна полученных результатов.

В главе 3, состоящей из пяти разделов, развивается метод частичного срезывания в сочетании с другими методами для оценки и асимптотических свойств решений интегро-дифференциальных уравнений первого, второго, третьего порядков типа Вольтерра на полуоси.

В разделе 3.1 методом, основанным на развитии метода преобразования уравнений В. Вольтерра, метода весовых функций Ю.А. Ведь, З. Пахырова, С. Искандарова (1973, 1980), метода частичного срезывания С.Искандарова, Д.Н. Шабданова (2004) и метода интегральных неравенств Ю.А. Ведь, З.Пахырова(1973) установлены достаточные условия для оценки, ограниченности на J, степенной абсолютной интегрируемости на полуоси, стремления к нулю, в томчисле по экспоненциальному и степенному закону, при $t \to \infty$, принадлежности пространству $L^P(J,R)$ $(p>0)$ решений слабо нелинейного ИДУ первого порядка типа Вольтерра

$$x'(t)+a(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t)+$$

$$+F(t,x(t),\int_{t_0}^{t}H(t,\tau,x(\tau))d\tau),\ \ t\ge t_0 \qquad (3.1.1)$$

в случае, когда решения соответствующего слабо нелинейного ДУ первого порядка:

$$x'(t)+a(t)x(t)=f(t)+F(t,x(t),0),\ \ t\ge t_0 \qquad (3.1.1_0)$$

могут не обладать соответствующими асимптотическими свойствами, при этом на функции $F(t,x,y),\ H(t,\tau,y)$ налагаются условия «слабой нелинейности»:

$$|F(t,x,y)|\le g(t)|x|+g_1(t)|y|,\ |H(t,\tau,y)|\le h(t,\tau)|y| \qquad (F,H)$$

с неотрицательными коэффициентами $g(t),\ g_1(t),\ h(t,\tau)$.

Речь идет о решениях $x(t)\in C^1(J,R)$ ИДУ (1) с любым начальным значением $x(t_0)$. В силу условий (F,H) такие решения ИДУ (3.1.1) существуют.

Аналогично в работам С. Искандарова (2002), С. Искандарова, Д.Н. Шабданова (2004), введем следующие предположения и обозначения: $0<\varphi(t)$ – -некоторая весовая функция; $\Delta(t)\equiv 2a(t)\varphi(t)-\varphi'(t)$;

$$K(t,\tau)=\sum_{i=1}^{n}K_i(t,\tau), \qquad (K)$$

$$f(t)=\sum_{i=0}^{n}f_i(t), \qquad (F)$$

$\psi_i(t)$ $(i=1..n)$ - некоторые срезывающие функции,

$P_i(t)\equiv\varphi(t)K_i(t,t)(\psi_i(t))^{-2},\ \ Q_i(t,\tau)\equiv\varphi(t)K_i(t,\tau)(\psi_i(\tau))^{-1},\ \ \ E_i(t)\equiv\varphi(t)f_i(t)(\psi_i(t))^{-1},$

$$P_i(t)=A_i(t)+B_i(t)\ \ \ (i=1..n), \qquad (P)$$

$c_i(t)(i=1..n)$ - некоторые функции.

ТЕОРЕМА 3.1.1. Пусть 1) $\varphi(t)>0$, выполняются условия (F,H), *(K), (f),* (P); 2) $\Delta(t)\ge 0$; 3) $A_i(t)>0,$ существует функция $A^*(t)\in L^1(J,R_+)$ такие, что $A_i'(t)\le A_i^*(t)A_i(t)\ (i=1...n)$; 4) $B_i(t)\ge 0,\ B_i'(t)\le 0$, существуют функции $c_i(t)$ такие, что $(E_i^{(k)}(t))^2\le B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t)$ $(i=1...n;\ k=0,1)$;

5) $(\varphi(t))^{\frac{1}{2}}[f_0(t)+\int\limits_{t_0}^{t} G(t,\tau)(\varphi(\tau))^{-\frac{1}{2}}d\tau]+g(t)+$

$+(\varphi(t))^{-\frac{1}{2}}\int\limits_{t_0}^{t}\left|Q'_{i\tau}(t,\tau)\right|(A_i(\tau))^{-\frac{1}{2}}d\tau \in L^1(J,R_+)\quad (i=1...n),$

где $G(t,\tau)\equiv g_1(t)h(t,\tau)$.

Тогда для любого решения $x(t)$ ИДУ (3.1.1) справедливы следующие оценка:

$$x(t)=(\varphi(t))^{-\frac{1}{2}}O(1) \tag{3.1.3}$$

и утверждения:

$$\int\limits_{t_0}^{t}\Delta(s)(x(s))^2ds=O(1), \tag{3.1.4}$$

$$A_i(t)(X_i(t,t_0))^2=O(1)\ \ (i=1..n). \tag{3.1.5}$$

СЛЕДСТВИЕ 3.1.1. Если выполняются все условия теоремы 3.1.1 и

$a)\ \varphi(t)\ge\varphi_0>0;\quad b)\ \varphi(t)\to\infty,\ t\to\infty;\ c)\ (\varphi(t))^{-\frac{1}{2}}=e^{-\lambda t}O(1)$

$(\lambda-const>0);\ d)\ t_0=0,\ (\varphi(t))^{-\frac{1}{2}}=(t+\delta)^{-\gamma}O(1)\ (\delta,\lambda-const>0);$

$e)\ (\varphi(t))^{-\frac{1}{2}}\in L^P(J,R_+\setminus\{0\})\ (p>0)$, то для любого решения $x(t)$ ИДУ (3.1.1) справедливы утверждения:

$a)\ x(t)=O(1);\quad b)\ x(t)\to 0,\ t\to\infty;\ c)\ x(t)=e^{-\lambda t}O(1)\ (\lambda-const>0);$

$d)\ x(t)=(t+\delta)^{-\gamma}O(1)\ (t_0=0,\ \delta,\lambda-const>0);\ \ e)\ x(t)\in L^P(J,R)\ (p>0)$

Исходя из утверждения (3.1.4), аналогично следствию 3.5 [27, с. 117], устанавливается

СЛЕДСТВИЕ 3.1.2. Если выполняются все условия теоремы 3.1.1 и $\Delta(t)\ge\Delta_0>0$ (соответственно $\Delta(t)>0,\ (\Delta(t))^{-1}\in L^1(J,R_+\setminus\{0\})$), то любое решение ИДУ (1) $x(t)\in L^2(J,R)$ (соответственно $x(t)\in L^1(J,R)$).

ПРИМЕР 3.1.1. Для ИДУ первого порядка

$$x'(t)+x(t)+\int\limits_0^t e^{t+2\tau}(e^{-4t-2\tau}-e^{-6t}+1)^{\frac{1}{2}}x(\tau)d\tau=2e^t-\sin e^{-t}+\frac{xe^{-t}}{t^2+1}\sin[x-e^t]-$$

$$-\int\limits_0^t\frac{\sin e^{-t}\cdot(\cos t)^{\frac{1}{3}}\left|x(\tau)\right|}{(t+\tau+2)^3}d\tau,\quad t\ge 0$$

выполняются все условия теоремы 3.1.1, пункта с) следствия 3.1.1, следствия 3.1.2 при $\varphi(t)\equiv e^t$, здесь $t_0=0,\ \Delta(t)\equiv 2e^t-e^t=e^t,\ n=1,\ \ \psi_1(t)\equiv e^{2t},\ \ P_1(t)\equiv 1,$

$Q_1(t,\tau)\equiv(-e^{-6t}+e^{-4t-2\tau}+1)^{\frac{1}{2}}e^{2t},\ \ A_1(t)\equiv 0,\ \ B_1(t)\equiv 1,\ \ f_0(t)\equiv-\sin e^{-t},\ \ f_1(t)\equiv 2e^t,$

$E_1(t)\equiv 2,\ \ c_1(t)\equiv 4,\ \ g(t)\equiv\dfrac{1}{t^2+1},\ \ g_1(t)\equiv 1,\ \ h(t,\tau)\equiv\dfrac{1}{(t+\tau+1)^4}.$

Значит, для любого решения $x(t)$ этого ИДУ справедливы утверждения:

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2}}O(1), \quad \int_0^t e^s(x(s))^2 ds = O(1).$$

Однако, соответствующее слабо нелинейное ДУ:

$$x'(t) + x(t) = 2e^t + \frac{xe^{-t}}{t^2+1}\sin[x - e^t], \quad t \ge 0$$

имеет решение $x(t) = e^t$, неограниченное на полуоси $R_+ = [0,\infty)$.

Таким образом, нам удалось обнаружить влияние интегральных возмущений типа Вольтерра на асимптотические свойства решений слабо нелинейного ДУ первого порядка (3.1.1$_0$).

В разделе 3.2 развитием метода раздела 3.1 установлены достаточные условия для оценки, ограниченности на J, степенной абсолютной интегрируемости на полуоси, стремления к нулю, в том числе по экспоненциальному и степенному закону, при $t \to \infty$, принадлежности пространству $L^{p_k}(J,R)$ $(p_k > 0,\ k = 0,1)$ всех решений и их первых производных линейного ИДУ второго порядка типа Вольтерра

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \int_{t_0}^t [Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau)]d\tau = f(t),\ t \ge t_0. \tag{3.2.1}$$

В разделе 3.3 методом, основанным на применении и развитии нестандартного метода сведения к системе С. Искандарова (2007), метода возведения уравнений в квадрат С. Искандарова(1981), метода частичного срезывания С. Искандарова, Д.Н. Шабданова (2004), методов преобразований из монографии С. Искандарова(2002, с. 149-151), метода интегральных неравенств Ю.А. Ведь, З. Пахырова (1973) и применением леммы Люстерника-Соболева (1965, 2012),установлены достаточные условия асимптотической устойчивости решений линейного однородного ИДУ третьего порядка вида

$$x'''(t) - a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \\ + \int_{t_0}^t \left[Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau) + Q_2(t,\tau)x''(\tau)\right]d\tau = 0,\ t \ge t_0 \tag{3.3.1}$$

при условии:

$a_2(t) \ge 0,$ (a$_2$)

т.е. в случае, когда решения соответствующего линейного однородного ДУ третьего порядка:

$x'''(t) - a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = 0,\ t \ge t_0$ (3.3.1$_0$)

не могут быть асимптотически устойчивыми, что подтверждается формулой Остроградского - Лиувилля.

Приведем основной результат этого раздела. Сначала аналогично работе С. Искандарова (2007)в ИДУ (3.3.1) делается замена:

$$x''(t) + px'(t) + qx(t) = W(t)y(t), \tag{3.3.2}$$

где p,q - некоторые вспомогательные параметры, причем $p > 0,\ q > 0,\ 0 < W(t)$ -

некоторая вспомогательная весовая функция, $y(t)$ - новая неизвестная функция.Тогда ИДУ третьего порядка (3.3.1) сводится к следующей эквивалентной системе:

$$\begin{cases} x''(t)+px'(t)+qx(t)=W(t)y(t), \\ y'(t)-b_2(t)y(t)+b_1(t)x'(t)+b_0(t)x(t)+\int\limits_{t_0}^{t}[P_0(t,\tau)x(\tau)+ \\ +P_1(t,\tau)x'(\tau)+K(t,\tau)y(\tau)]d\tau=0,\ t\ge t_0, \end{cases} \qquad (3.3.3)$$

где $b_2(t)\equiv a_2(t)+p-W'(t)(W(t))^{-1}$, $\quad b_1(t)\equiv (W(t))^{-1}[a_1(t)+pa_2(t)+p^2-q]$,

$b_0(t)\equiv (W(t))^{-1}[a_0(t)+qa_2(t)+pq]$, $\quad P_0(t,\tau)\equiv (W(t))^{-1}[Q_0(t,\tau)-qQ_2(t,\tau)]$,

$P_1(t,\tau)\equiv (W(t))^{-1}[Q_1(t,\tau)-pQ_2(t,\tau)]$, $K(t,\tau)\equiv (W(t))^{-1}Q_2(t,\tau)W(\tau)$.

Пусть: $\psi(t)$ - некоторая срезывающая функция,

$M(t)\equiv K(t,t)(\psi(t))^{-2}$, $T(t,\tau)\equiv K(t,\tau)(\psi(\tau))^{-1}$,

$$W'(t)\le 0, \qquad (W)$$

$\alpha(t)\equiv b_2(t)\left(\psi(t)\right)^{-1}, \beta(t)\equiv[\alpha'(t)+b_2(t)\alpha(t)](\psi(t))^{-1},\ A(t)\equiv M(t)+\beta(t),$

$B(t)\equiv M'(t)+\beta'(t)+2b_2(t)M(t)$.

ТЕОРЕМА 3.3.1. Пусть 1) выполняется условие (a_2); 2) $p>0, q>0$, $W(t)>0,$ выполняется условие (W) ; $A(t)=A_1(t)+A_2(t),\ A_1(t)>0,\ A_2(t)\ge 0$;

3) $p^2-q>0$; 4) существует число $\varepsilon\in(0,1)$ такое, что $\left(\alpha(t)\right)^2\le(1-\varepsilon)A_2(t)$;

5) существует функция $B^*(t)\in L^1(J,R_+)$ такая, что $B(t)\le B^*(t)A_1(t)$;

6) $$\left(W(t)\right)^2+[1+|\alpha(t)|\left(A_1(t)\right)^{-\frac12}]\{\int\limits_{t_0}^{t}|T'_\tau(t,\tau)|\left(A_1(\tau)\right)^{-\frac12}d\tau+$$

$$+[1+\left(\alpha(t)\right)^2\left(A_1(t)\right)^{-1}]\left(b_k(t)\right)^2+[\int\limits_{t_0}^{t}\left(P_k(t,\tau)\right)^2d\tau]^{\frac12}\}\in L^1(J,R_+\setminus\{0\})\ \ (k=0,1).$$

Тогда для любого решения $\left(x(t), y(t)\right)$ системы (3.3.3) справедливы утверждения

$$x^{(k)}(t)\in L^2(J,R)\ \ (k=0,1,2),\quad y(t)=O(1), \qquad (3.3.15)$$

и для любого решения $x(t)$ ИДУ третьего порядка (3.3.1)

$x^{(k)}(t)\to 0\ \ (k=0,1,2)$ при $t\to\infty$, т.е. любое решение ИДУ (3.3.1) асимптотически устойчиво.

ПРИМЕР 3.3.1. ИДУ с $t_0=0$, $\quad a_2(t)\equiv 1$: $x'''(t)-x''(t)-(\dfrac{5}{64}-e^{-6t}\sin t)x'(t)-$

$$-(\frac{9}{128}+e^{-7t}\cos t)x(t)+\int\limits_0^t[(\frac{1}{16}Q_2(t,\tau)+e^{-t}(t+\tau+1)^{-1}\sin(t\tau))x(\tau)+$$

$$+(\frac{1}{8}Q_2(t,\tau)-e^{-\frac{t}{8}}(t+\tau+4)^{-3}\sin(t\tau))x'(\tau)+Q_2(t,\tau)x''(\tau)]d\tau=0,\quad t\ge 0,$$

где $Q_2(t,\tau)\equiv 25e^{\frac{1}{8}(79t+81\tau)}[3+\cos(\tau e^{-18t})]$, удовлетворяет всем условиям теоремы 3.3.1 при $p=\dfrac{1}{8},\ q=\dfrac{1}{16},\ W(t)\equiv e^{-\frac{t}{8}},\ \psi(t)\equiv e^{10t},\ \ \varepsilon=\dfrac{1}{2}$; здесь

$b_2(t)\equiv\dfrac{5}{4},\ b_1(t)\equiv e^{-\frac{47t}{8}}\sin t,\ b_0(t)\equiv -e^{-\frac{55t}{8}}\cos t,\ P_0(t,\tau)\equiv e^{-\frac{7t}{8}}(t+\tau+1)^{-1}\sin(t\tau),$

$P_1(t,\tau)\equiv -(t+\tau+4)^{-3},\ K(t,\tau)\equiv 25e^{10(t+\tau)}[3+\cos(te^{-18t})],$

$T(t,\tau)\equiv 25e^{10t}[3+\cos(te^{-18t})],\ M(t)\equiv 25e^{-10t}[3+\cos(te^{-18t})],$

$\alpha(t)\equiv\dfrac{5}{4}e^{-10t},\ \beta(t)\equiv -\dfrac{175}{16}e^{-10t},\ A(t)\equiv 25e^{-10t}[3+\cos(te^{-18t})]-$

$-\dfrac{175}{16}e^{-20t},\ \ A_1(t)\equiv e^{-10t},\ \ A_2(t)\equiv 74e^{-10t}+25e^{-10t}\cos(te^{-18t})-$

$-\dfrac{175}{16}e^{-20t},\ B(t)\le 450(t+1)e^{-18t},\ B^*(t)\equiv 450(t+1)e^{-8t}.$

Сравнение результатов показывает, что нам удалось снять условие $W(t)\to 0,\quad t\to\infty$ статьи З.А. Жапаровой (2012), а именно показать, что это условие вытекает из наложенных условий *(W)* и $(W(t))^2\in L^1(J,R_+)$, которые также содержатся в той статье З.А. Жапаровой.

В разделе 3.4 развитием нестандартного метода сведения к системе С. Искандарова (2007), метода возведения уравнений в квадрат С. Искандарова (1981), метода частичного срезывания С. Искандарова, Д.Н. Шабданова (2004), метода интегральных неравенств Ю.А. Ведь, З. Пахырова (1973) и применением леммы Люстерника-Соболева (1965, 2012),установлены достаточные условия асимптотической устойчивости решений линейного ИДУ третьего порядка типа Вольтерра вида

$$x'''(t)+a_2(t)x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+$$
$$+\int_{t_0}^{t}[Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)+Q_2(t,\tau)x''(\tau)]d\tau=f(t),\ t\ge t_0. \qquad (3.4.1)$$

Речь идет о решениях $x(t)\in C^3(J,R)$ ИДУ (3.4.1) с любыми начальными данными $x^{(k)}(t_0)\ (k=0,1,2)$. Каждое такое решение существует и оно единственно.

В разделе 3.5 приведен анализ результатам главы 3.

На все теоремы и на некоторые следствия глав 2, 3 построены иллюстративные примеры, показывающие выполнимость полученных условий.

Опубликованные работы по теме диссертации:

1. Асанова К. А. Метод частичного срезывания, оценка и асимптотические свойства решений слабо нелинейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка [Текст] / С. Искандаров,

К.А. Асанова // Исслед. по интегро-диффренц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2014. – Вып.46. – С. 49-53.
2. Асанова К. А. Асимптотическая устойчивость решений одного класса линейных дифференциальных уравнений второго порядка на полуоси [Текст] / К.А. Асанова // Исслед. по интегро-диффренц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2014. – Вып.46. – С. 98-102.
3. Асанова К. А. Об ограниченности решений одного класса линейных дифференциальных уравнений второго порядка на полуоси [Текст] / М.И. Иманалиев, А. Асанов, К.А. Асанова // Тр. X Международной Азиатской школы-семинара «Проблемы оптимизации сложных систем», 25 июля -5 августа 2014 г. –Булан-Соготту (Иссык-Куль), 2014. – Ч. I. – С.306-310.
4. Асанова К.А. Об оценке решений и их первых производных линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка [Текст] / К.А. Асанова, С. Искандаров // Тр. XI Международной Азиатской школы-семинара «Проблемы оптимизации сложных систем», 27 июля – 7 авг. 2015 г. – Чолпон-Ата, 2015. – Ч. I. – С. 86-91.
5. Асанова К. А. Формулы для решения одного класса линейных дифференциальных уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами [Текст] / К. А. Асанова, Р.А. Асанов // Символ науки. – 2016. – №1, Ч.1. – С.20-25. (статья, РИНЦ РФ).
6. Асанова К. А. Лемма Люстерника-Соболева и специфическая асимтотическая устойчивость решений линейного однородного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка типа Вольтерры [Текст] / М.И. Иманалиев, К.А. Асанова, С. Искандаров // Докл. Российск. Акад. наук. – 2016. – Т. 469, №4. – С. 397 - 401.
7. Asanova K.A. The Lyusternik-Sobolev Lemma and the Specific Asymptotic Stability of Solutions of Linear Homogeneous Volterra type Integro-Differential Equations of Order 3 [Текст] / M.Imanaliev, K.A. Asanova, S. Iskandarov // Doklady Mathematics. – 2016. – Vol. 94, № 1. – P. 418-422. (статья, Web of Science).
8. Асанова К.А. Устойчивость решений одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка на полуоси [Текст] / К.А. Асанова // Символ науки. – 2016. – № 6, Ч.1. – С.10-13. (статья, РИНЦ РФ).
9. Асанова К.А. Ограниченность решения одного класса линейных дифференциальных уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами на полуоси [Текст] / К.А. Асанова //Жалал-Абад мамлекеттик университетинин жарчысы. – 2016. – №1(32). – С.20-24.
10. Асанова К.А. Об асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка [Текст] / С. Искандаров, К.А. Асанова // Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета. – 2016. – Том 16,№ 9. – С. 12-15. (статья, РИНЦ).