НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Ж.БАЛАСАГЫНА

Диссертационный совет Д 01.17.560

На правах рукописи
УДК 517.928

Алымбаев Асангул Темиркулович

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ, ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Специальность 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Бишкек – 2018

Работа выполнена в лаборатории прикладной математики и информатики Института математики НАН КР

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор **Байзаков А.Б.**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор **Алыбаев К.С.**
доктор физико-математических наук, профессор **Асанов А.**
доктор физико-математических наук, профессор **Иманалиев Т.М.**

Ведущая организация: Казахский Национальный университет им. Аль–Фараби
Адрес: Казахстан, Алматы, просп. Аль-Фараби 71

Защита диссертации состоится 13 апреля 2018 г. в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.17.560 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико–математических наук при Институте математики НАН Кыргызской Республики и Кыргызском Национальном университете им. Ж. Баласагына по адресу: Кыргызстан, 720054, г. Бишкек, ул. Абдымомунова 328, лабораторный корпус № 6 КНУ, аудитория 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке и на сайте ИМ НАН КР www.math.aknet.kg, Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а.

Автореферат опубликован 12 марта 2018 г.

И.о. ученого секретаря диссертационного
совета, д.ф.-м.н., профессор Искандаров С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы: Мы будем пользоваться следующими обозначениями: СДУ – системы дифференциальных уравнений, СИДУ – системы интегро-дифференциальных уравнений, СИУ–системы интегральных уравнений, ДО – дифференциальный оператор, ИУ–интегральное уравнение, ИДУ – интегро-дифференциальное уравнение.

Математическое моделирование многих физических задач сводятся к краевым задачам для СДУ и СИДУ.

Для изучения решений краевых задач, имеются асимптотические, аналитические и качественные методы, созданные А.Н.Ляпуновым, А.Пуанкаре, Н.М.Крыловым, Н.Н.Боголюбовым, Ю.А.Митропольским и другими авторами. Эти методы успешно применяются в исследовании слаболинейных систем, в которых эффект от нелинейности проявляется медленно и может быть обнаружен из рассмотрения асимптотических разложений. Однако при исследовании нелинейных СДУ и СИДУ общего вида их применимость ограничивается узкими классами уравнений.

Одним из эффективных приближенных методов исследования решений краевых задач общего вида является численно-аналитический метод Самойленко А.М. Численно-аналитический метод, являющийся методом последовательных приближений, впервые предложен и обоснован А.М. Самойленко для исследования периодических решений системы неавтономных ДУ. В дальнейшем метод был развит в работах Д.И. Мартыныка, Н.А. Перестюка, Н.Х. Ронто, О. Нуржанова, Л.Л. Тая, Г. Вахабова, А.Д. Байнова, К. Ильясова, В. А. Данканыча, А.Я. Гадионенко и других авторов.

В работах этих авторов были исследованы вопросы существования и построения периодических решений СДУ с запаздывающим аргументом с периодической правой частью, СДУ с импульсным воздействием, СИДУ, автономных СДУ с запаздыванием, автономных СДУ второго порядка.

Численно-аналитический метод применительно двухточечным краевым задачам посвящены работы А.М. Самойленко и Н.Х. Ронто. В работах этих авторов исследованы вопросы существования и построения решения краевых задач для ДУ с линейными не разделяющимися граничными условиями и ДУ с запаздывающим аргументом.

В данной работе предлагаются новые методы приближенных решений краевых задач СДУ.

Цели исследования:

– исследование вопроса существования и построения периодических решений квазилинейных СИДУ с конечным последействием и СИДУ общего вида бесконечным последействием, обладающий свойством автономности;

– изучение задачи разрешимости СИУ смешанного типа и построения приближенных решений;

– изучение вопроса построения решения краевых задач для СДУ с линейными не разделяющимися граничными условиями;

– построение асимптотического разложения по степеням малого параметра решения краевых задач для СДУ с регулярным и сингулярным возмущением;

– разработка модификации численного метода Рунге-Кутта для построения численных решений краевых задач системы ДУ.

Методы исследования: Для достижения цели и решения задач диссертации, главным образом применяются аппараты численно-аналитического метода, предложенные Самойленко А.М., теория интегро-дифференциальных уравнений, разработанная Быковым Я.В., теория метода малого параметра, теория метода пограничных функций и аппарат метода Ньютона-Канторовича, обеспечивающий ускоренную сходимость приближенного решения к точному решению краевой задачи.

Научная новизна:

– Впервые численно-аналитический метод А.М. Самойленко применен и обоснован для исследования периодических решений автономных СИДУ с конечным и бесконечным последействием;

– Разработан и математически обоснован метод последовательных приближений, обеспечивающий ускоренной сходимостью приближенных решений краевых задач к точному решению СДУ;

– Изучены вопросы существования и единственности решения СИУ именуемое как СИУ в численно-аналитическом методе;

– Методом сведения краевой задачи для СДУ с регулярным и сингулярным возмущением относительно малого параметра, к задаче Коши для СИДУ построено асимптотическое решение краевой задачи;

– Изучены вопросы существования и построение краевых задач линейных и квазилинейных СДУ;

– Разработана модификация численного метода Рунге-Кутта для построения численных решений краевых задач СДУ.

Практическая и теоритическая ценность: Результаты диссертации дают возможность исследовать многоточечные краевые задачи системы дифференциальных уравнений. Разработанными в диссертации алгоритмами и методами можно решить конкретные прикладные модельные уравнения. Результаты диссертации носят теоретический характер.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Обоснование численно-аналитического метода академика Самойленко А.М., для изучения периодических решений автономных СИДУ с конечными и бесконечными последействиями.
2. Изучение разрешимости СИУ смешанного типа именуемое, как интегральное уравнение в численно-аналитическом методе.
3. Разработка численно-аналитического метода с ускоренной сходимостью, построение и установление существования решений двухточечной краевой задачи СДУ.
4. Разработка модификации численного метода Рунге-Кутта для построения численных решений краевых задач СДУ.

5. Разработка и обоснование метода ИДУ для построения асимптотических решений краевых задач, СДУ с регулярными и сингулярными возмущениями.
6. Изучение вопроса существования и построения краевых задач линейных и квазилинейных СДУ.

Связь работы с научно-исследовательскими проектами. Работа выполнена в рамках проектов НИР Института теоретической и прикладной математики НАН КР: «Развитие и приложения компьютерного моделирования, асимптотических и аналитических методов в теории динамических систем, обратных и оптимизационных экономических задач в анализе геофизических данных для оперативного прогноза землетрясений» (2012-2014), номер гос. регистрации № 0005756, «Развитие и приложения компьютерного моделирования, асимптотических, топологических и аналитических методов в теории устойчивости динамических систем, разрешимости обратных задач, экономических и геофизических процессов» (2015-2017), номер гос. регистрации № 0007125 и включены в отчеты по этим проектам.

Апробация работы. Результаты исследований докладывались:

- на научно-теоретической конференции, посвященной 40-летию Иссык-Кульского государственного университета им. К.Тыныстанова (Каракол, 1993);

- на IV Республиканской научно-методической конференции «Компьютеры в учебном процессе и современные проблемы математики» (Бишкек, 1996);

- на IV Республиканской научно-методической конференции «Компьютеры в учебном процессе и современные проблемы математики» (Бишкек, 1996);

- на II международной научно-практической конференции «Теоретические аспекты развития современной науки» (Бишкек, 2013);

- на третьей республиканской научной конференции, посвященной памяти профессора Р. Усубакунова (Бишкек, 2014);

- на семинаре по математике отделений прикладной и теоретической математики, факультета естественных наук Кыргызско-Турецкого университета «Манас» (Бишкек, 2016);

- на международной научно-практической конференции, приуроченной году нравственности, воспитания и культуры, «Наука и образование: современные проблемы и перспективные направления инновационного развития» (Каракол, 2017);

- на III международной конференции, приуроченной к 70-летию профессора А.Керимбекова «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных управлений» (Бишкек, 2017);

- на семинаре академика Борубаева А.А.(Бишкек 2018).

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в монографии и в 26 научных статьях.

В совместных работах [2, 18, 23, 24] А.Б. Байзакову принадлежит постановка проблем, а соискателю их решения. Основные результаты диссертации получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из оглавления, списка условных обозначений использованных кратких математических записей, сокращений, введения и 6 глав, которые разбиты на параграфы, выводов, списка использованных источников из 116 наименований и приложения текста программы на Excel и результатов расчета числовых примеров. Общий объем диссертации 164 страницы. Всего в работе 3 рисунка и 7 таблиц. Нумерация глав сквозная, а номер параграфа состоит из двух цифр, отделенных точкой. Первая цифра означает номер главы, а вторая номер параграфа.

Нумерация теорем, лемм и формул тройная. Первая цифра означает номер главы, вторая- номер параграфа, а третья- номер теоремы, леммы, формулы.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному консультанту д.ф.-м. н., профессору Байзакову А.Б. за постоянное внимание к работе.

Основное содержание диссертации

Во введении излагаются цель и задачи исследования, обосновывается актуальность темы, научная новизна, практическая и теоретическая ценность диссертации.

В первой главе дается обзор литературы и краткое содержание результатов диссертации.

Вторая глава посвящена обоснованию численно-аналитического метода Самойленко А.М. для исследования периодических решений СИДУ

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + f\left(x(t), \int_t^{t+\tau} \varphi(t-s, x(s))ds \right) \qquad (1)$$

и вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(x(t), \int_{-\infty}^{t} \varphi(t-s, x(s))ds \right), \qquad (2)$$

обладающие свойством автономности.

Изучаются периодические решения ИУ

$$x(t) = \int_{t-\tau}^{t} K(t,s)x(s)ds + f(t) \qquad (3)$$

и ИДУ вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t), \int_{t-\tau}^{t} K(t,s)x(s)ds \right). \qquad (4)$$

Рассмотрим преобразование

$$\overline{x} = e^{A\omega t}\overline{y}, \quad \overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}}, \quad \theta = \omega t,$$

где $\bar{x}$ и $\bar{y}$ – m -мерные вектор – функции, имеющие, соответственно компоненты $x_i,\ y_i\ (i=1,2,...,m,\ i\le m\le n),\ \bar{\bar{x}},\ \bar{\bar{y}}-(n-m)$-мерные вектор – функции, имеющие, соответственно, компоненты $x_j,\ y_j\ (j=m,...,n)$. Тогда относительно новых переменных СИДУ (1) имеет вид

$$\frac{dy(\theta)}{d\theta}=\frac{1}{\omega}Y\left(y(\theta),\frac{1}{\omega}\int_{\theta}^{\theta+\omega\tau}\psi\left(\theta,\ v,y(v)\right)dv\right). \qquad (5)$$

Пусть вектор-функция $Y(\theta,y,u),\ \psi(\theta,y,v)$ являются непрерывными, ограниченными и 2π периодическими по θ и удовлетворяет условие Липшица

$$\left|Y(\theta,y,u)\right|=M,\ \left|\psi(\theta,y,v)\right|\le N, \qquad (6)$$

$$\begin{gathered}\left|Y(\theta,y',u')-Y(\theta,y'',u'')\right|\le K_1\left|y'-y''\right|+K_2\left|u'-u''\right|,\\ \left|\psi(\theta,v,y')-\psi(\theta,v,y'')\right|\le K_3\left|y'-y''\right|,\end{gathered} \qquad (7)$$

где $M,\ N,\ K_1,K_2,K_3$ - постоянные числа.

число $Q=\frac{2\pi}{3\omega}\left[K_1+\frac{3\tau}{2}K_2K_3\right]$ меньше единицы

$$Q<1. \qquad (8)$$

В §2.3 доказано утверждение об общей схеме отыскания 2π – периодическое решение системы (5).

Теорема 2.3.1. Пусть СИДУ (5) удовлетворяет неравенствам(6), (7), (8). Тогда, если эта система (5) имеет 2π -периодическое решение $y=y(\theta),y(0)=y_0$, то $y(\theta)=y_\infty(\theta,y_0,\omega)$ в области $\omega\in I_\omega=\{\omega:\ \omega\ge\Omega\}$,

где $y_\infty(\theta,y_0,\omega)$ – предельная функция последовательности

$$\begin{gathered}y_m(\theta,y_0,\omega)=y_0+\frac{1}{\omega}\int_0^{\theta}\left[Y\left(\theta,y_{m-1}(\theta,y_0,\omega),\frac{1}{\omega}\int_{\theta}^{\theta+\omega\tau}\psi(\theta,\ v,y_{m-1}(\theta,y_0,\omega))dv\right)-\right.\\ \left.-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Y\left(\theta,y_{m-1}(\theta,y_0,\omega)),\frac{1}{\omega}\int_{\theta}^{\theta+\omega\tau}\psi(\theta,\ v,y_{m-1}(v,y_0,\omega))dv\right)d\theta\right]d\theta,\quad m=1,2,....\end{gathered} \qquad (9)$$

$$\Delta(y_0,\omega)=\frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi}Y\left(\theta,y^0(\theta,y_0,\omega),\frac{1}{\omega}\int_{\theta}^{\theta+\omega\tau}\psi(\theta,\ v,y^0(v,y_0,\omega))dv\right)d\theta,$$

где $y^0(\theta,y_0,\omega)$ – предел последовательности (9).

Таким образом точки (y_0^*,ω), для которых $\Delta(y_0^*,\omega)=0$ являются особыми точками отображения

$$\Delta:\ R^{n-1}\times I_\omega\to R^n,$$

$$\Delta(y_0^*,\omega)=\frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi}Y\left(\theta,y^0(\theta,y_0,\omega),\frac{1}{\omega}\int_{\theta}^{\theta+\omega\tau}\psi(\theta,\ v,y^0(v,y_0,\omega))dv\right)d\theta. \qquad (10)$$

Так как отображение (10) находится лишь приближенно, исходя из последовательности функций

$$\Delta_m(y_0^*,\omega)=\frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} Y\left(\theta, y_m(\theta,y_0,\omega),\frac{1}{\omega}\int_{\theta}^{\theta+\omega\tau}\psi(\theta,\, v, y_m(v,y_0,\omega))dv\right)d\theta, \tag{11}$$

где $y_m(\theta,y_0,\omega)$ – функции последовательности (11), то возникает задача, как по нулям функции $\Delta_m(y_0^*,\omega)$ заключить о нулях $\Delta(y_0^*,\omega),$ а следовательно, о существовании периодических решений системы (5).

Доказательство этой задачи дано в §2.5 и оформлено в виде следующего утверждения.

Теорема 2. Пусть для системы (5), выполняются условия:

1) отображение $\Delta_m(y_0^*,\omega)$ для некоторого целого m имеет изолированную особую точку $\Delta_m(\bar{y}_0^*,\bar{\omega})=0$;
2) индекс этой особой точки отличается от нуля;
3) существует замкнутая выпуклая область $D_\omega = D\times I_\omega \subset R^{n-1}\times I_\omega$, и содержащая единственную особую точку $(\bar{y}_0^*,\bar{\omega})$ функции Δ_m, что на ее границе $\Gamma(D_\omega)$ выполняются неравенства

$$\inf \Delta_m(y_0^*,\omega)\ge \frac{1}{\omega}Q^{m+1}(1-Q)^{-1}M.$$

Тогда система (5) будет иметь 2π -периодическое решение. Теперь возникает вопрос о том, как определить область переменных (y_0,ω), в которой находятся начальное значение $\bar{y}_0$ и частота $\bar{\omega}$ точного периодического решения. На этот вопрос отвечает доказанное в §2.6 утверждение.

Теорема 3. Пусть задана система (5) и $\{y_n=y_{0n}\}\in D_\omega$. Тогда для того, чтобы в этой области нашлась точка $(\bar{y}_0,\bar{\omega})$, в которой $\Delta(\bar{y}_0,\bar{\omega})=0$, необходимо, чтобы для всех целых m и любого $(y_0',\omega')\in D_\omega$ (искомая область) выполнялось неравенство

$$\left|\Delta_m(y_0',\omega')\right|\le \sup\left\{\frac{K_1+K_2K_3\tau}{\omega'}[1+Q'(1+Q'(1-Q')^{-1})]\left|\bar{y}_0'-y_0'\right|+\right.$$

$$\left.+\frac{M+2NK_2\tau}{\omega'\omega''}[1+Q'(1+Q'(1-Q')^{-1})]\left|\omega'-\bar{\omega}\right|+\frac{1}{\omega}Q'^{m+1}(1-Q')^{-1}M : (y_0,\omega)\in D_\omega\right\},$$

где $Q'=\dfrac{2\pi}{3\omega'}\left(K_1+\dfrac{3\tau}{2}K_2K_3\right).$

Обозначим через $\|K_\tau\|$ функцию:

$$\|K_\tau\|=\sup_{\|x\|=1}\left|\int_{t-\tau}^{t}K(t,s)ds\right|=\max_{t\in[0,\omega]}\left|\int_{t-\tau}^{t}K(t,s)ds\right| \tag{12}$$

В §2.7 рассмотрим ИДУ вида

$$\frac{dx(t)}{dt}=f\left(t,x(t),\int\limits_{t-\tau}^{t}K(t,s)x(s)ds\right), \tag{13}$$

где f и K – ω-периодические по t, s функции. Доказано существование и отыскание периодического решения ИДУ (13).

В §§2.8-2.10 рассматриваются вопросы построения и существования периодических решений, СИДУ с бесконечными последействиями вида

$$\frac{dx(t)}{dt}=f\left(x(t),\int\limits_{-\infty}^{t}\varphi(t-s,x(s))ds\right), \tag{14}$$

где x, $f-n$-мерные вектор-функции, φ $-m$-мерный вектор-функция.

Пусть теперь функции $f(x,u)$ и $\varphi(t-s,x)$ удовлетворяют по x и u условию Липшица. Далее, пусть A – заданная $m\times m$-мерная постоянная матрица, такая, что все решения уравнения $\frac{d\overline{x}}{dt}=A\overline{x}$ 2π периодические функции.

Преобразованием вида

$$\overline{x}=e^{A\omega t}\overline{y},\quad \overline{\overline{x}}=\overline{\overline{y}},\quad \theta=\omega t, \tag{15}$$

где $\overline{x}$ и $\overline{y}$ m-мерные векторы-функции, $\overline{\overline{x}}$, $\overline{\overline{y}}-(n-m)$-мерные векторы-функции, система (14) сводится к системе

$$\frac{dy(\theta)}{d\theta}=\frac{1}{\omega}Y\left(\theta,y(\theta),\frac{1}{\omega}\int\limits_{-\infty}^{\theta}\psi(\theta,v,y(v))dv\right). \tag{16}$$

Предположим, что функции $Y(\theta,y,\vartheta),\psi(\theta,y,v)$ являются непрерывными, ограниченными и 2π периодическими по θ, v и удовлетворяют условиям

$$\left|Y(\theta,y,\vartheta)\right|\le M,\quad \int\limits_{-\infty}^{\theta}\left|\psi(\theta,v,y(v))\right|dv\le N, \tag{17}$$

$$\begin{gathered}\left|Y(\theta,y',\vartheta')-Y(\theta,y'',\upsilon'')\right|\le K_1\left|y'-y''\right|+K_2\left|\vartheta'-\upsilon''\right|,\\ \left|\psi(\theta,v,y')-\psi(\theta,v,y'')\right|\le K_3(\theta-v)\left|y'-y''\right|,\end{gathered} \tag{18}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\theta}K_3(\theta-v)dv<K<\infty, \tag{19}$$

где M, N, K, K_1, K_2 положительные постоянные числа.

Предположим, число $Q=\frac{\pi}{\omega}\left(K_1+\frac{K_2K}{\omega}\right)$ не превышает единицу, т.е.

$$Q<1 \tag{20}$$

При выполнении условий (17)–(20) в §2.8-2.10 доказаны аналогичные теоремам 1, 2, 3.

В §2.11 рассматривается модельная система интегро-дифференциальных уравнений, описывающая контакты между хищником (x) и жертвой (y) в прошлые времена, влияющие на скорость роста обоих видов

$$\frac{dx}{dt} = i\omega x - i\omega c_{11}x - i\omega c_{12}x\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)}y(s)ds,$$
$$\frac{dy}{dt} = i\omega y + i\omega c_{21}y\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)}x(s)ds. \qquad (21)$$

Заменой переменных

$$x = e^{i\omega t}x_1, \quad y = e^{i\omega t}y_1, \omega t = \theta, s = \frac{z}{\omega},$$

система (21) сводится к системе

$$\frac{dx_1}{dt} = -ic_{11}e^{i\theta}x_1^2 - \frac{i}{\omega}c_{12}x_1\int_{-\infty}^{\theta} e^{-\frac{\theta-z}{\omega}}e^{-iz}y_1\left(\frac{z}{\omega}\right)dz,$$
$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{i}{\omega}c_{21}y_1\int_{-\infty}^{\theta} e^{-\frac{\theta-z}{\omega}}e^{iz}x_1\left(\frac{z}{\omega}\right)dz.$$

Найдено первое приближение 2π-периодическому решению.

В главе 3 изучается СИУ смешанного типа, которое играет важную роль при исследовании решений периодических и краевых задач.

В §§3.1-3.3 рассмотрены СИУ вида

$$x(t) = \mu\int_0^t\left[K(t,s)x(s) - \frac{1}{T}\int_0^T K(t,s)x(s)ds\right]ds + f(t), \qquad (22)$$

и вида

$$x(t) = \mu\int_0^t\left[K(t,s)x(s) - \frac{1}{T}\int_0^T K(t,s)x(s)ds\right]ds + f(t,x(t)), \qquad (23)$$

где $x,\ f - n$-мерные векторы-функции; $K(t,s) - n\times n$-мерная матрица-функция; μ-параметр. Представим (22) в операторном виде

$$x(t) = \mu(Kx)(t) + f(t)$$

и решаем (22) методом последовательных приближений, взяв в качестве первого приближения $x_1(t) = f(t)$, согласно схеме

$$x_n(t) = \mu(K_{n-1}x)(t) + f(t) = \sum_{k=1}^{n}\mu^{n-k}(K^{n-k}f)(t), \quad n = 1,2,...$$

где $(Kx)(t) = \mu\int_0^t\left[K(t,s)x(s) - \frac{1}{T}\int_0^T K(t,s)x(s)ds\right]ds.$

Теорема 4. СИУ (22) имеет, и при том единственное решение при $|\mu| < \frac{1}{\rho}$, где $L = \|K\|$ и $\|x(t)\| \le (1-\rho)^{-1}\|f\|$, $\rho = \frac{T}{2}L$.

Такое утверждение доказано в §3.2.

Теорема 5. Если удовлетворяет условию Липшица

$$K(t,s),\ f(t,x)\ \left|f(t,x') - f(t,x'')\right| \le L_1\left|x' - x''\right| \text{, и } \overline{\rho} = |\mu|\rho + L_1 < 1,$$

то СИУ (23) имеет при этом единственное решение $x = x^0(t)$ и это решение можно найти методом последовательных приближений согласно схеме

$$x_n(t) = \mu(Kx_n)(t) + f(t, x_{n-1}(t)).$$

В §3.4 предлагается численная схема решения (метод трапеции) СИУ (22).

В главе 4 рассматривается проблема математического обоснования схемы численно-аналитического метода с ускоренной сходимостью двухточечной краевой задачи для системы ОДУ.

В §§4.1-4.3 изложены постановка краевой задачи, задачи линеаризации и алгоритм приближенного решения краевой задачи вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,\ x(t)), \tag{24}$$

$$Ax(0) + Bx(T) = d, 0 \le t \le T, \tag{25}$$

где $d \in R^{nu}, x \in C^1([0,T] \to R^n, A, B \in R^{n \times n}, \det B \ne 0.$

Приближенные решения задачи (24), (25) определяем согласно алгоритму

$$\begin{gathered} x_{n+1}(t,x_0) = \int_0^t \left[f_x(t,x_n(t,x_0))x_{n+1}(t,x_0) - \frac{1}{T}\int_0^T f_x(t,x_n(t,x_0))x_{n+1}(t,x_0)dt \right] dt + \\ +x_0 + \int_0^t \left[f(t,x_n(t,x_0)) - f_x(t,x_n(t,x_0))x_n(t,x_0) - \frac{1}{T}\int_0^T \left(f(t,x_n(t,x_0)) - \right.\right. \\ \left.\left. - f_x(t,x_n(t,x_0))x_n(t,x_0) \right) dt \right] dt + \frac{t}{T}\left[B^{-1}d - (B^{-1}A + E)x_0 \right], \end{gathered} \tag{26}$$

В §4.4 рассматривается задача исследования сходимости алгоритма (26).

Пусть n–мерная вектор-функция $f(t,x)$ определенная в области

$$(t,x) \in [0,T] \times S_\omega, \omega > 0, S_\omega \subset R^n. \tag{27}$$

где D – ограниченная, замкнутая область евклидового пространства E_n, и удовлетворяет условиям:

$$\begin{gathered} |f(t,x)| \le M,\ \ |f_x(t,x)| \le K, \\ |f(t,x') - f(t,x'') - f_x(t,x')(x'-x'')| \le K_1 |x'-x''|^2. \end{gathered} \tag{28}$$

Лемма 1. Если $2TK < \frac{1}{2}$, $2TM + \beta < \omega / 4$, $x_0 \in D_f$, то $x_n(t,x_0) \in D_f$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Теорема 6. Пусть $x = x^0(t,x_0)$ решение краевой задачи (24), (25), удовлетворяющей условиям леммы 1. и $\rho_1 = \frac{TK_1}{2}$, $\gamma = \frac{TM}{2} + \beta$, $\rho_1\gamma < (1 - -\rho)(1-2\rho)$, то $x^0(t,x_0) = \lim_{n\to\infty} x_n(t,x_0)$, и

$$\left| x^0(t,x_0) - x_n(t,x_0) \right| \le \frac{1-\rho}{\rho_1}\left(\frac{\rho_1\gamma}{(1-\rho)(1-2\rho)} \right)^{2^n} \frac{(1-\rho)^2(1-2\rho)^2}{(1-\rho)^2(1-2\rho)^2\rho_1^2\gamma^2},$$

для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$, где $x_n(t,x_0)$ определяется согласно (26).

Положим

$$\Delta(x_0) = \frac{1}{T}\left[B^{-1}d - (B^{-1}A + E)x_0 \right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(t, x_\infty(t,x_0))dt, \tag{29}$$

где $x_\infty(t,x_0)$ предел последовательности функции (26). Так как $x_\infty(t,x_0)$ - решение уравнения

$$x_\infty(t,x_0)=x_0+\int_0^t\left[f(t,x_\infty(t,x_0))-\frac{1}{T}\int_0^T f(t,x_\infty(t,x_0))dt\right]dt+\frac{1}{T}\left[B^{-1}d-(B^{-1}A+E)x_0\right],$$

то при $\Delta(x_0)=0$ функция $x_\infty(t,x_0)$ является решением краевой задачи (24), (25) и вопрос существования решении краевой задачи связан с вопросом существования нулей функции (29). Точки x_0, для которых $\Delta(x_0)=0$, являются особыми точками отображения

$$\Delta:\ D_+\to E_n,\ \Delta(x_0)=\frac{1}{T}\left[B^{-1}d-(B^{-1}A+E)x_0\right]-\frac{1}{T}\int_0^T f(t,x^0(t,x_0))dt. \tag{30}$$

Найти отображение (30) можно лишь приближенно, вычисляя, функции

$$\Delta_n(x_0)=\frac{1}{T}\left[B^{-1}d-(B^{-1}A+E)x_0\right]-\frac{1}{T}\int_0^T\left[f(t,x_n(t,x_0))-f_x(t,x_n(t,x_0))\delta x_n(t,x_0)\right]dt. \tag{31}$$

Поэтому возникает следующая задача: исходя из отображения (31) решить вопрос о нулях (30) и, следовательно, о решении краевой задачи (24), (25). Решение этой задачи дает теорема, доказанная в §4.5.

Теорема 7. Пусть для краевой задачи (32), (33) заданной в области (35) и удовлетворяющей условиям (36)-(38), также выполняются следующие условия:

а) для некоторого целого n функция $\Delta_n(x_0)$ имеет изолированную особую точку $\Delta_n(x_0^0)=0$;

б) индекс этой точки отличен от нуля;

в) существует замкнутая выпуклая область D_1, принадлежащая D_f и имеющая единственную особую точку x_0^0, такую, что на ее границе Γ_{D_1}, справедливо неравенство

$$\inf_{x\in D_1}\left|\Delta_n(x)\right|\ge K\frac{1-\rho}{\rho_1}\left(\frac{\rho_1\gamma}{(1-\rho)(1-2\rho)}\right)^{2^n}\left(\frac{\rho_1\gamma}{(1-\rho)(1-2\rho)}\frac{(1-\rho)^2(1-2\rho)^2}{(1-\rho)^2(1-2\rho)^2-\gamma^2\rho_1^2}+1\right).$$

Тогда краевая задача (24), (25) имеет решение $x(t)$, для которого $x(0)\in D_f$.

В §4.6 рассматриваются свойства определяющей функции.

В §4.7 рассматривается задача о выборе области начальных значений, которые порождают решения краевой задачи (24), (25).

Глава 5 посвящена вопросу обоснования метода Рунге-Кутта для краевых задач.

В §§5.1-5.2 даются постановка краевой задачи, общая схема численного решения и формулировка методов Рунге-Кутта для краевой задачи

$$\frac{dx(t)}{dt}=f(t,\ x(t)),0\le t\le T, \tag{32}$$

$$Ax(0)+Bx(T)=d, \tag{33}$$

и его математическое обоснование.

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,\ x(t)), 0 \le t \le T, \tag{34}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{35}$$

Определение 1. Пусть s - целое положительное число $a_{21}, a_{31}, a_{32}, ..., a_{s1}, a_{s2}, ..., a_{s,s-1}, b_1, b_2, ..., b_s, c_1, c_2, ..., c_s$ - вещественные коэффициенты. Тогда метод

$$K_{1i}(h) = f(t_i, x_i),$$

$$K_{2i}(h) = f(t_i + c_2 h, x_i + a_{21} K_{1i}),$$

$$K_{3i}(h) = f(t_i + c_3 h, x_i + h(a_{31} K_{1i} + a_{32} K_{2i})),$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$K_{si}(h) = f(t_i + c_s h, x_i + h(a_{s1} K_{1i} + ... + a_{s,s-1} K_{s-1,i})),$$

$$x_i = x_0 + h \sum_{\alpha=1}^{i-1} \sum_{j=1}^{s} b_j K_{j\alpha}(h) \tag{36}$$

называется s - стадийным методом Рунге-Кутты для задачи Коши (34), (35).

Определение 2. Пусть s - целое положительное число и $a_{21}, a_{31}, ..., a_{s1}, a_{s2}, ..., a_{s,s-1}, b_1, b_2, ..., b_s, c_2, ..., c_s$ - вещественные коэффициенты из определения 1. Тогда метод

$$K_{1i}(h) = f(t_i, x_i),$$

$$K_{2i}(h) = f(t_i + c_2 h, x_i + a_{21} K_{1i}),$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$K_{si}(h) = f(t_i + c_s h, x_i + h(a_{s1} K_{1i} + ... + a_{s,s-1} K_{s-1,i})),$$

$$x_i = x_0 + h \sum_{\alpha=0}^{i-1} \left[\sum_{j=1}^{s} b_j K_{j\alpha}(h) - \frac{h}{T} \sum_{\beta=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{s} b_j K_{j\beta}(h) \right] + \frac{t_i}{T} [B^{-1} d - (B^{-1} A + E) x_0] \tag{37}$$

называется s - стадийным явным методом Рунге-Кутты для краевой задачи (32), (33). Согласно этому определению некоторые методы Рунге-Кутты низших порядков записываются:

Метод Эйлера

$$x_i = x_0 + h \sum_{\alpha=0}^{i-1} \left(f(t_\alpha, x_\alpha) - \frac{h}{T} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k, x_k) \right) + \frac{t_i}{T} [B^{-1} d - (B^{-1} A + E) x_0]$$

Метод Хойна

$$K_{1\alpha}(h) = f(t_\alpha, x_\alpha),\ K_{2\alpha}(h) = f\left(t_\alpha + \frac{1}{3} h, x_\alpha + \frac{1}{3} h K_{1\alpha}(h) \right),$$

$$K_{3\alpha}(h) = f\left(t_\alpha + \frac{2}{3} h, x_\alpha + \frac{1}{3} h K_{2\alpha}(h) \right),$$

$$x_i = x_0 + h \sum_{\alpha=0}^{i-1} \left[\frac{1}{4} K_{1\alpha}(h) + \frac{3}{4} K_{3\alpha}(h) - \frac{h}{T} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{4} K_{1k}(h) + \frac{3}{4} K_{3k}(h) \right) \right] +$$

$$+ \frac{t_i}{T} [B^{-1} d - (B^{-1} A + E) x_0].$$

Теорема 8. Если метод Рунге-Кутты для краевой задачи (32), (33) имеет порядок p и если все частные производные $f(t,x)$ до порядка p включительно существуют и непрерывны, то погрешность метода допускает оценку $\left|x(t_i)-x_i\right| \le \dfrac{N}{2p!}\left(\max_\theta\left|\dfrac{F^{(p+1)}(\theta h)}{p+1}\right| + \max_\theta \sum_{j=1}^{s} b_j \left|K_{j\alpha}^{(p)}(\theta h)\right|\right)h^{p+1}.$

Введенный в определении 2 метод Рунге-Кутты (37) можно интерпретировать как дискретный аналог СИУ вида

$$x(t,x_0)=x_0+\int_0^t\left[f(t,x(t,x_0))-\frac{1}{T}\int_0^T f(t,x(t,x_0))dt\right]dt+\frac{t}{T}\left[B^{-1}d-(B^{-1}A+E)x_0\right]. \qquad (38)$$

Вследствие этого вопрос существования и отыскания решения краевой задачи (32), (33) сводится к вопросу существования и отыскания решений конечно-разностных уравнений (37). В §5.3 дается решение этого вопроса.

Рассмотрим краевую задачу

$$x_{n+1}=x_n+f_n(x_n), \qquad (39)$$

$$Ax_0+Bx_N=d, \qquad (40)$$

где $x_n=(x_n^{(1)},x_n^{(2)},...,x_n^{(p)})$, $f_n=(f_n^{(1)},f_n^{(2)},...,f_n^{(n)})$, A,B - постоянные матрицы разности $p\times p$, причем $\det B\ne 0$. Предположим, что функция $f_n(x)$ определена в области $(n,x)\in[0,N]\times S_\omega$ и удовлетворяет неравенствам

$$\left|f_n(x)\right|\le M, \qquad (41)$$

$$\left|f_n'(x)-f_n''(x)\right|\le K\left|x'-x''\right|, \qquad (42)$$

где *M, K* – положительные числа.

В дальнейшем будем рассматривать такие системы, для которых выполняются условия:

1) $\left(\dfrac{MN}{2}+\beta\right)<\omega,\ \ \beta=B^{-1}d-(B^{-1}A+1)x_0$;

2) $Q=\dfrac{NK}{2}<1$.

Предположим, что задача (39), (40) имеет решение и известна точка x_0, через которую это решение проходит при $n=n_0=0$. Тогда справедлива

Теорема 9. Пусть φ_n - решение краевой задачи (39), (40) проходящее через точку.

Тогда $\varphi_n=\lim\limits_{k\to\infty}x_n^{(k)}(x_0)$,

равномер $x_0\in S_{\omega-(\frac{MN}{2}+\beta)}$ но относительно n, x_0 и выполняется оценка

$$\left|\varphi_n-x_n^{(k)}(x_0)\right|\le Q^k(1-Q)^{-1}\frac{MN}{2},$$

где $x_n^{(k)}(x_0)$ - определяется согласно

$$x_n^{(k)}(x_0)=x_0+\sum_{i=0}^{n-1}\left[f_i(x_i^{(k-1)}(x_0))-\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}f_j(x_j^{(k-1)}(x_0))\right]+\frac{n-1}{N}(B^{-1}d-(B^{-1}A+E)x_0),$$

$$x_i^{(0)}(x_0)=x_0,\ \ i=0,1,...,N,\ \ k=1,2,3,....$$

Пусть вектор-функция определена в области $[0,T]\times D$ $(D\in E_n)$ и удовлетворяет неравенству

$$\left|f(t,x)\right| \le M\ , \tag{43}$$

и условию Липшица

$$\left|f(t,x') - f(t,x'')\right| \le K\left|x' - x''\right|, \tag{44}$$

для всех $0 \le t \le T,\ \ x,\ x',\ x'' \in D$. Тогда для функции

$$\Phi(x_\alpha, h) = \sum_{j=1}^{s} b_j K_{j\alpha}(h) \tag{45}$$

справедлива

Лемма 2. Если функция $f(t,x)$ удовлетворяет условиям (43), (44). Тогда постоянная Липшица для функции (45) определяется согласно

$$L(h) = K\left(\sum_{\alpha=1}^{s}\left|b_\alpha\right| + hK\sum_{\alpha,i=1}^{s}\left|b_\alpha a_{\alpha i}\right| + h^2K^2\sum_{\alpha,i,j=1}^{s}\left|b_\alpha a_{\alpha i} a_{ij}\right| + \ldots\right).$$

Условиями обеспечивающими существование решения краевой задачи (32), (33) являются условия 1), 2). Эти условия будем называть основными. Так как $\sum_{j=1}^{s} b_j = 1$ и $\left|K_{i\alpha}(h)\right| \le M$, то $\left|\sum_{j=1}^{s} b_j K_{i\alpha}(h)\right| \le M$. Поэтому в случае уравнения (37) основные условия имеют вид:

а) $\omega - \left(\dfrac{hMN}{2} + \beta\right) > 0$;

б) $Q(h) = \dfrac{hL(h)N}{2} < 1$.

В случае выполнения условий а) и б), согласно теореме 9 краевая задача (32), (33) задача имеет единственное решение $\varphi_n(x_0,h) = \lim\limits_{k\to\infty} x_n^{(k)}(x_0,h)$ и

$$\left|\varphi_n - x_n^{(k)}(x_0)\right| \le Q^k(h)(1 - Q(h))^{-1}\frac{MN}{2}\ ,$$

где $x_n^{(k)}(x_0,h)$ определяется согласно

$$x_n^{(k)}(x_0,h) = x_0 + h\sum_{i=0}^{n-1}\left[\Phi_i(x_i^{(k-1)}(x_0,h),h) - \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\Phi_i(x_i^{(k-1)}(x_0,h),h)\right] +$$

$$+\frac{n}{N}(B^{-1}d - (B^{-1}A + E)x_0),\ \ x_n^0(x_0) = x_0,\ \ n = 0,1,2,\ldots,N,\ \ k = 1,2,3,\ldots.$$

Учитывая, что $h = \dfrac{T}{N}$ из условий а), б) получаем при $N \to \infty$ условии:

а) $\omega - \left(\dfrac{hMN}{2} + \beta\right) > 0$;

б) $Q = \dfrac{TK}{2} < 1$. (38).

Обозначим через $\Delta(x_0,h)$ и $S(x_0,h)$ выражении

$$\Delta(x_0,h) = \frac{1}{T}[B^{-1}d - (B^{-1}A + E)x_0] - \frac{1}{T}\int_{t_k}^{t_k+h} f(s, x^0(s,x_0))ds, \tag{46}$$

$$S(x_0,h)=\frac{1}{T}[B^{-1}d-(B^{-1}A+E)x_0]-\frac{h}{T}\sum_{\beta=1}^{N-1}\Phi_\beta(x_\beta,h). \tag{47}$$

В §5.4 дана оценка точности корней определяющих уравнений (46), (47).

Теорема 10. Если $x=x_0,\ x=\overline{x}_0$ корни определяющих уравнений $\Delta(x_0,h)=0,\ S^{(k)}(x_0,h)=0$ и матрицы $\Delta_x^{-1}(x_0,h)$ $\left[1-\left|B^{-1}A+1\right|-2Q(h)(1-Q(h))^{-1}\right]^{-1}$ невырожденные, то справедлива оценка

$$\left|\overline{x}_0-x_0\right|\le L(h)Q^k(h)(1-Q(h))^{-1}\frac{MN}{2r_1(h)}+$$

$$+\frac{2}{rr_1(h)p!T}\left(\max_\theta\left|\frac{F^{(p+1)}(\theta h)}{p+1}\right|+\max_\theta\sum_{j=1}^{s}b_j\left|K_{j\alpha}^{(p)}(\theta h)\right|\right)h^{p+1},$$

где $\left|[\Delta_x']^{-1}\right|\le\frac{1}{r},\quad \left|\left[1-\left|B^{-1}A+1\right|-2Q(h)(1-Q(h))^{-1}\right]^{-1}\right|\le\frac{1}{r_1(h)}$.

В §5.5 рассматривается конкретная краевая задача и ее численное решение согласно алгоритму метода Эйлера.

Глава 6 посвящена исследованию краевых задач вида (§6.1)

$$\frac{dx(t)}{dt}=P(t)x(t)+f(t), \tag{48}$$

$$Ax(0)+Bx(T)=d,0\le t\le T, \tag{49}$$

$$\frac{dx(t)}{dt}=P(t)x(t)+f(t,x(t)), \tag{50}$$

$$Ax(0)+Bx(T)=d,0\le t\le T, \tag{51}$$

$$\frac{dx(t)}{dt}=f(t,x(t),\varepsilon), \tag{52}$$

$$Ax(0,\varepsilon)+Bx(T,\varepsilon)=d,0\le t\le T, \tag{53}$$

$$\varepsilon\frac{dx(t)}{dt}=f(t,x(t),\varepsilon), \tag{54}$$

$$Ax(0,\varepsilon)+Bx(T,\varepsilon)=d,0\le t\le T. \tag{55}$$

В §§6.2, 6.3 на основе аппарата численно-аналитического метода изучены вопросы существования и отыскания решений краевых задач (48), (49) и (50), (51).

Решение краевой задачи (48), (49) можно получить на основе формулы

$$\begin{aligned}x(t,c)=V(t)c+\int_0^t\left[V(t)V^{-1}(\tau)f(\tau)-\frac{1}{T}\int_0^T V(T)V^{-1}(s)f(s)ds\right]d\tau+\\+\frac{t}{T}[B^{-1}d-(B^{-1}A+V(T))c],\end{aligned} \tag{56}$$

где $V(t)$ - фундаментальная система решений системы $\frac{dx(t)}{dt}=P(t)x(t)$.

Выражение (56) образует семейство функций, зависящее от параметра *c*. Те значения параметра *c,* для которых справедливо равенство

$$\frac{t}{T}[B^{-1}d-(B^{-1}A+V(T))c]-\frac{1}{T}\int_0^T V(T)V^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau=0$$

является решением задачи (48), (49).

1) $\det(B^{-1}A+V(T))\neq 0$, то (невырожденный случай), то формулой

$$x(t)=V(t)(B^{-1}A+V(T))^{-1}B^{-1}d+\int_0^T G(t,\tau)f(\tau)d\tau$$

определяется решение краевой задачи (48), (49), где

$$G(t,\tau)=\begin{cases}V(t)[E-(B^{-1}A+V(T))^{-1}V(T)]V^{-1}(\tau), & \text{при} \quad 0\le\tau\le t\le T,\\ -V(t)(B^{-1}A+V(T))^{-1}V(T)V^{-1}(\tau), & \text{при} \quad 0\le\tau\le t\le T,\end{cases}$$

которое является функцией Грина краевой задачи

$$\frac{dx(t)}{dt}=P(t)x(t)+f(t)\,,\ Ax(0)+Bx(T)=0\,; \tag{57}$$

2) $\det(B^{-1}A+V(T))=0$ (вырожденный случай).

Теорема 11. Пусть краевая задача (57) допускает линейно независимые решения $\varphi_1(t),\varphi_2(t),...,\varphi_k(t)\ \ (1\le k\le n)$.

Тогда соответствующая ей неоднородная задача (48), (49) имеет решение тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\int_0^T <x^*(\tau),V(T)f(\tau)>d\tau=<x^*(0),B^{-1}d>,$$

где $x=x^*(t)\ \ (x^*(t)=(V^{-1}(t))^*x^*(0))$ - решение сопряженной краевой задачи $\dfrac{dx(t)}{dt}=-P^*(t)x(t),\ P^*x(0)+Qx^*(T)$, где матрицы A,B,P,Q связаны равенством $AP^*-BQ^*=0$.

Пусть n-мерная вектор-функция $f(t,x)$ определена в области

$$(t,x)\in[0,\,T]\times S_\omega,S_\omega\subset R^n, \tag{58}$$

где D - ограниченная, замкнутая область евклидового пространства E_n и удовлетворяет условиям:

$$|f(t,x)|\le M, \tag{59}$$

$$|f(t,x')-f(t,x'')|\le K|x'-x''|. \tag{60}$$

Обозначим $\gamma=C_2d_1+\left(\dfrac{T}{2}C_1C_3+C_4\right)M+\beta$. Пусть

$$\gamma<\omega. \tag{61}$$

Предположим также, что

$$Q=\left(\frac{T}{2}C_1C_3+C_4\right)K<1\,. \tag{62}$$

Теорема 12. Пусть $x=x^0(t,c)$ решение краевой задачи (50), (51), удовлетворяющее в области (58) условиям (59) – (62). Тогда $x^0(t,c)=\lim\limits_{m\to\infty}x_m(t,c)$, равномерно относительно $(t,c)\in[0,\,T]\times S_\omega$

$$\left|x^0(t,c)-x_m(t,c)\right|\le Q^m(1-Q)^{-1}\gamma,\quad (m=1,2,...),$$

где $x_m(t,c)$ определяется согласно алгоритму

$$x_0(t,c)=c\,,$$

$$x_{m+1}(t,c)=V(t)c+\int_0^t\left[V(t)V^{-1}(\tau)f(\tau,x_m(\tau,c))-\frac{1}{T}\int_0^T V(T)V^{-1}(\tau)f(\tau,x_m(\tau,c))d\tau\right]d\tau+$$

$$+\frac{t}{T}\int_0^T[V(t)-V(T)]f(\tau,x_m(\tau,c))d\tau+\frac{t}{T}[B^{-1}d-(B^{-1}A+V(T))c],\ m=0,1,...\,.$$

Построение асимптотических решений краевых задач (52), (53) и (54), (55) сводятся к задаче построения асимптотических решений задачи Коши

$$\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt}=f(t,x(t,\varepsilon),\varepsilon)-\frac{1}{T}\int_0^T f(t,x(t,\varepsilon),\varepsilon)dt+\frac{1}{T}[B^{-1}d-(B^{-1}A+E)x(0,\varepsilon)],\tag{63}$$

$$x(0,\varepsilon)=a_0+\varepsilon a_1+...+\varepsilon^n a_n+...\tag{64}$$

и задачи Коши

$$\varepsilon\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt}=f(t,x(t,\varepsilon),\varepsilon)-\frac{1}{T}\int_0^T f(t,x(t,\varepsilon),\varepsilon)dt+\frac{\varepsilon}{T}[B^{-1}d-(B^{-1}A+E)x(0,\varepsilon)],\tag{65}$$

$$x(0,\varepsilon)=a_0+\varepsilon a_1+...+\varepsilon^n a_n+...\tag{66}$$

В §§6.4, 6.5 рассматриваются вопросы построения асимптотических решений задачи Коши (63), (64) и краевой задачи (52), (53).

Решение задачи Коши (65), (66) ищем в виде

$$x(t,\varepsilon)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2 x_2(t)+...+\varepsilon^n x_n(t)+...,\tag{67}$$

Теорема 13. Пусть функция $f(t,x,\varepsilon)$ в области

$$(t,x,\varepsilon)\in[0,T]\times S_\omega\times[0,\varepsilon_0]\quad (S_\omega\subset E_n)\,,$$

удовлетворяет условиям:

1) Функция $f(t,x,\varepsilon)$ аналитична по переменным x,ε;

2) Существует фундаментальная система решений $V=V(t)$ системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy(t)}{dt}=A(t)y(t)\qquad (A(t)\equiv f'_x(t,x_0(t),0))\,,$$

где $x_0(t)$ - решение «вырожденной» системы, соответствующей системе (63);

3) Число 1 не лежит на спектре ядра

$K_1(t,s)=\int_s^T\left(-\frac{1}{T}f'_x(s_1,x_0(s_1),0)\right)V(s)V^{-1}(s_1)ds_1$ и $R(t,s)$ его резольвента;

4) $c_1\gamma<1$,

где $\gamma=\max_t\left|\int_0^t V(t)V^{-1}(s)\left(1+\int_0^T R(s,s_1)ds_1,\right)ds\right|$, c_1 - постоянная Липшица для функции

$$g(t,u,\varepsilon)=f(t,u+X_n,\varepsilon)-f_x'(t,x_0(t),0)u-$$
$$-\frac{1}{T}\int_0^T\left(f(t,u(t,\varepsilon)+X_n(t,\varepsilon),\varepsilon)-f_x'(t,x_0(t),0)u(t,\varepsilon)\right)dt+$$
$$+\frac{1}{T}[B^{-1}d-(B^{-1}A+E)(u(0,\varepsilon)+X_n(0,\varepsilon))]-\frac{dX_n}{dt}.$$

Тогда существуют такие постоянные $\overline{c}>0$, $\varepsilon_0>0$ и $\delta(\varepsilon)>0$, что для решения $x=x(t,x_0,\varepsilon)$ задачи (63), (64), и имеет место неравенство
$\left|x(t,x_0,\varepsilon)-X_n(t,x_0,\varepsilon)\right|\le\overline{c}\varepsilon^{n+1}$ при $0\le t\le T$.

Из асимптотического разложения (67) решения краевой задачи (63), (64) следует, что оно зависит от неизвестных параметров $a_0,a_1,a_{20},...,a_n,...$ т.е. $x=x(t,a_0,a_1,...,a_n,...,\varepsilon)$ (§6.5). Поэтому, если

$$\Delta(a_0,a_1,...,a_n,...,\varepsilon)=0,$$
$$\Delta(a_0,a_1,...,a_n,...,\varepsilon)=\frac{1}{T}[B^{-1}d-(B^{-1}A+E)(a_0+\varepsilon a_1+...)]-$$
$$-\frac{1}{T}\int_0^T f(t,x(t,a_0,...,a_n,...,\varepsilon),\varepsilon)dt,$$

то функция $x=x(t,a_0,a_1,...,a_n,...,\varepsilon)$ является решением краевой задачи (52), (53).

Теорема 14. Пусть выполнены условия теоремы 13. Если $\det(B^{-1}A+E)\ne 0$, то существует решение $x=x(t,\overline{a}_0,\overline{a}_1,...,\overline{a}_n,...,\varepsilon)$ краевой задачи (52), (53) и имеет место неравенство

$$\left|x(t,\overline{a}_0,\overline{a}_1,...,\overline{a}_n,...,\varepsilon)-X_n(t,\overline{a}_0,\overline{a}_1,...,\overline{a}_n,...,\varepsilon)\right|\le\overline{c}\varepsilon^{n+1}$$

при $0\le t\le T$.

Решение задачи Коши (65), (66) будем искать в виде (§6.6)

$$x(t,\varepsilon)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+...+\varepsilon^n x_n(t)+...+\pi_0 x(\tau)+\varepsilon\pi_1 x(\tau)+...+\varepsilon^n\pi_n x(\tau)+..., \qquad (68)$$

Теорема 15. Пусть $f(t,x,\varepsilon)$ в области $(t,x,\varepsilon)\in[0,T]\times G\times[0,\varepsilon_0]$ $(G\subset R^n)$ удовлетворяет условиям:

1) Функция $f(t,x,\varepsilon)$ аналитична по переменным x,ε;

2) $\det f_x(t,x_0(t),0)\ne 0,\ x_0(t)$ - решение вырожденной системы и 1 не лежит на спектре ядра
$K(t,s)=-\frac{1}{T}f_x^{-1}(t,x_0(t),0)f_x(s,x_0(s),0)$;

3) Существует фундаментальная система решений $W=W(t,s,\varepsilon)$ $(W(s,s,\varepsilon)=E)$ - фундаментальная система решений однородной системы
$\varepsilon\frac{dW}{dt}=A(t)W,\ A(t)=f_x(t,x_0(t),0)$
которая удовлетворяет оценке

$$\left|W(t,s,\varepsilon)\right|\le c\exp\left(-\frac{\delta}{\varepsilon}(t-s)\right)\text{ при } 0\le s\le t\le T;$$

4) $\frac{c_1c}{\delta}<1$.

Тогда существуют такие постоянные $\bar{c}, \varepsilon_0 > 0$ и $\delta(\varepsilon) > 0$ такие, что для решения $x = x(t, x_0, \varepsilon)$ задачи (65), (66), имеет место неравенство

$$\left|x(t, x_0, \varepsilon) - X_n(t, x_0, \varepsilon)\right| \le \bar{c}\varepsilon^{n+1} \text{ при } 0 \le t \le T .$$

Теорема 16. Пусть выполнены условия теоремы 15. Если $\det(B^{-1}A + E) \ne 0$, то для решения $x = x(t, a_0, a_1, ..., \varepsilon)$ краевой задачи (54), (55) имеет место неравенство

$$\left|x(t, a_0, a_1, ..., \varepsilon) - X_n(t, \bar{a}_0, \bar{a}_1, ..., \varepsilon)\right| \le \bar{c}\varepsilon^{n+1} \text{ при } 0 \le t \le T .$$

Основное содержание диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Алымбаев А.Т. Численные, численно-аналитические и асимптотические методы исследования краевых задач. [Текст] / А.Т. Алымбаев – Бишкек: Издательство КНУ, 2015, – 205 с.
2. Алымбаев А.Т. Численная реализация метода интегро-дифференциальных уравнений для построения решения краевой задачи системы дифференциальных уравнений с малым параметром. [Текст] / А.Т.Алымбаев, Назира Сагынтай кызы // Материалы международной научно-практической конференции, приуроченной году нравственности, воспитания и культуры «Наука и образование: современные проблемы и перспективные направления инновационного развития» // Вестник ИГУ. –Каракол: 2017.–№44. –С. 20-24.
3. Алымбаев А.Т. Об одном приближенном методе исследования линейной краевой задачи для системы квазилинейных дифференциальных уравнений. [Текст] / А.Т. Алымбаев // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. –Бишкек: 2017. –№5. – С. 63-69.
4. Алымбаев А.Т. Об одном численно-аналитическом методе исследования периодической краевой задачи с ускоренной сходимостью. [Текст] / А.Т.Алымбаев // Материалы третьей республиканской научной конференции, посвященной памяти профессора Р. Усубакунова. Вестник КГУ им. Арабаева. –2014. – №3. – С. 278-282.
5. Алымбаев А.Т. О нахождении периодических решений автономных систем интегро-дифференциальных уравнений. [Текст] / А.Т. Алымбаев // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1983. – Вып. 16. – С. 226-233.
6. Алымбаев А.Т. Двухточечная краевая задача с линейными граничными условиями [Текст] / А.Т.Алымбаев // Дифференциальные уравнения и их приложения. Тезисы докладов республиканской научной конференции. г. Ош, 1993.– С. 13.
7. Алымбаев А.Т. О периодических решениях нелинейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка. [Текст] / А.Т.Алымбаев // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1984. –Вып. 17. – С. 85-93.

8. Алымбаев А.Т. Периодические решения одного класса интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. [Текст] / А.Т.Алымбаев // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1985. – Вып. 18. – С. 219-226.
9. Алымбаев А.Т. Периодические решения системы автономных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. [Текст] / А.Т.Алымбаев // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1987. – Вып. 20. – С. 15-23.
10. Алымбаев А.Т. О периодических решениях дифференциальных уравнений. [Текст] / А.Т.Алымбаев // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1988. – Вып. 21. – С. 190-198.
11. Алымбаев А.Т. Периодические решения системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. [Текст] / А.Т.Алымбаев // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1988. – Вып. 21. – С. 116-123.
12. Алымбаев А.Т. Периодические решения системы нелинейных дифференциальных уравнений. [Текст] / А.Т.Алымбаев // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1989. – Вып. 22. – С. 139-143.
13. Алымбаев А.Т. Краевая задача для нелинейных разностных систем. [Текст] / А.Т.Алымбаев // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 1991. – Вып. 24. – С. 220-225.
14. Алымбаев А.Т. Методы Рунге-Кутты для нелинейных периодических систем. [Текст] / А.Т.Алымбаев // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 1994. – Вып. 25. – С. 12-16.
15. Алымбаев А.Т. Двухточечные краевые задачи системы обыкновенных дифференциальных уравнений. [Текст] / А.Т.Алымбаев // IV республиканская научно-методическая конференция «Компьютера в учебном процессе и современные проблемы математики», часть II. – 1996. – С. 20-24.
16. Алымбаев А.Т. Краевая задача для системы сингулярно-возмущенных линейных дифференциальных уравнений. [Текст] / А.Т.Алымбаев // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.– Бишкек: Илим, 1997. – Вып. 26. – С. 10-15.
17. Алымбаев А.Т. Интегральные уравнения численно-аналитического метода [Текст] / А.Т.Алымбаев // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.– Бишкек: Илим, 1997. – Вып. 26. – С. 20-26.
18. Алымбаев А.Т. Периодическое решение системы интегро-дифференциальных уравнений описывающих взаимодействия видов [Текст] / А.Т.Алымбаев, А.Б.Байзаков, Ж.А.Алымбаев // Материалы II международной научно-практической конференции: Теоретические и практические аспекты развития современной науки, Бишкек: 2013. – С. 246-250.

Статьи в зарубежных периодических изданиях, индексируемых в РИНЦ:

19. Алымбаев А.Т. Периодическое решение системы нелинейных дифференциальных уравнений. [Текст] / А.Т.Алымбаев // Приволжский научный вестник.– Ижевск: Издательский Центр Научного просвещения, 25.11.2016.–№12.–1(64). – С. 17-23, импакт-фактор РИНЦ- 0,146.
20. Алымбаев А.Т. Об одном интегральном уравнении смешанного типа. [Текст] / А.Т.Алымбаев // Приволжский научный вестник.– Ижевск: Издательский Центр Научного просвещения, 25.11.2016.–№12.–1(64). – С. 17-23, импакт-фактор РИНЦ- 0,146.
21. Алымбаев А.Т. Периодическое решение интегро-дифференциального уравнения с конечным последействием. [Текст] / А.Т.Алымбаев // Приволжский научный вестник. – Ижевск: Издательский Центр Научного просвещения, 27.05.2016. – №5 (57). – С. 10-14, импакт-фактор РИНЦ- 0,146.
22. Алымбаев А.Т. Нахождение периодического решения системы интегро-дифференциального уравнения с бесконечным последействием. [Текст] / А.Т.Алымбаев // Приволжский научный вестник.– Ижевск: Издательский Центр Научного просвещения, 27.05.2016. –№5 (57). –С. 5-9, импакт-фактор РИНЦ- 0,146.
23. Алымбаев А.Т. Численная реализация численно-аналитического метода с ускоренной сходимостью. [Текст] / А.Т.Алымбаев, А.Б. Байзаков // Приволжский научный вестник.– Ижевск: Издательский Центр Научного просвещения, 28.07.2016. –№7 (59). – С. 10-16, импакт-фактор РИНЦ- 0,146.
24. Алымбаев А.Т. Об одном приближенном методе исследования краевых задач с ускоренной сходимостью. [Текст] / А.Т.Алымбаев, А.Б. Байзаков // Приволжский научный вестник. – Ижевск: Издательский Центр Научного просвещения, 28.07.2016. – №7 (59). –С. 5-9, импакт-фактор РИНЦ- 0,146.
25. Алымбаев А.Т. Численные методы исследования краевых задач. [Текст] / А.Т.Алымбаев // Приволжский научный вестник. – Ижевск: Издательский Центр Научного просвещения, 18.04.2017. –№4 (68). – С. 12-18, импакт-фактор РИНЦ- 0,146.
26. Алымбаев А.Т. Численная реализация метода численного решения краевой задачи системы дифференциальных уравнений. [Текст] / А.Т.Алымбаев// Приволжский научный вестник. – Ижевск: Издательский Центр Научного просвещения, 18.04.2017. –№4 (68). – С. 5-11, импакт-фактор РИНЦ- 0,146.
27. Алымбаев А.Т. Периодическое решение системы автономных интегро-дифференциальных уравнений с бесконечным последействием. [Текст] / А.Т.Алымбаев // Проблемы современной науки и образования, – Иваново: Проблемы науки, 25.01.2017. – №3(85). – С. 6-16, импакт-фактор РИНЦ- 2,13.

РЕЗЮМЕ

Алымбаев Асангул Темиркулович

Численно-аналитические и асимптотические методы исследования краевых задач дифференциальных, интегро-дифференциальных уравнений

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Ключевые слова: Краевая задача, периодическое решение, дифференциальное уравнение, интегро-дифференциальное уравнение, приближенный метод с ускоренной сходимостью, линейные и квазилинейные дифференциальные уравнения, метод интегро-дифференциальных уравнений.

Объект исследования:

Периодические и двухточечные краевые задачи системы дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.

Цель работы:

– исследование вопроса существования и построения периодических решений системы квазилинейных ИДУ с конечным последействием и ИДУ общего вида бесконечным последействием, обладающий свойством автономности;

– изучение задачи разрешимости ИУ смешанного типа и построения приближенных решений;

– изучение вопроса построения решения краевых задач для ДУ с линейными не разделяющимся граничными условиями;

– построения асимптотического разложения по степеням малого параметра решения краевых задач для ДУ с регулярным и сингулярным возмущением.

Методы исследования:

Для достижения цели и решения задач диссертации, главным образом применяются аппараты численно-аналитического метода, предложенный Самойленко А.М., теория интегро-дифференциальных уравнений разработанный Быковым Я.В., теория метода малого параметра, теория метода пограничных функций и аппарат метода Ньютона-Канторовича, обеспечивающий ускоренную сходимость приближенного решения к точному решению краевой задачи.

Научная новизна:

– Впервые численно-аналитический метод А.М. Самойленко применен и обоснован для исследования периодических решений автономных СИДУ с конечным и бесконечным последействием;

– Разработан и математически обоснован метод последовательных приближений обеспечивающий ускоренной сходимостью приближенных решений краевых задач к точному решению СДУ;

– Изучены вопросы существования и единственности решения СИУ именуемое как СИУ в численно-аналитическом методе;

– Методом сведения краевой задачи для СДУ с регулярным и сингулярным возмущением относительно малого параметра, к задаче Коши для СИДУ построена асимптотическое решение краевой задачи;

– Изучены вопросы существования и построение краевых задач линейных и квазилинейных СДУ;

– Разработана модификация численного метода Рунге-Кутта для построения численных решений краевых задач СДУ.

РЕЗЮМЕ

Алымбаев Асангул Темиркулович

Дифференциалдык, интегро-дифференциалдык теңдемелер үчүн чекттик маселелерди изилдөөнүн сан – аналитикалык жана асимптотикалык ыкмалары

Физика – математика илимдерини докторлук окумушту даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертация 01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдуу башкаруу адистиги.

Уруптуктуу сөздөр: Чектик маселелер, мезгилдик чыгарылыштар, дифференециалдык теңдеме интегро – дифференциалдык теңдеме, чыгарылышка тездетилип жыйналуучу ыкма, сызыктуу жана квазисызыктуу диффенциалдык теңдеме, интегро – дифференциалдык теңдемелер ыкмасы.

Изилдөөнүн объектиси: дифференециалдык, интегро – дифференциалдык теңдемелердин системасы үчүн мезгилдик жана эки чекиттүү чектик маселелер.

Изилдөө максаты: Автономдук касиетке ээ болгон интегро – дифференциалдык теңдемелердин мезгилдик чыгарылышынын жашашын жана аны табуу үчүн А.М. Самойленконун сан – аналитикалык ыкмасын негиздөө. Аралаш тектеги интегралдык теңдеменин чыгарылышынын жашашын жана аны тургузуу маселелерин изилдөө. Дифференциалдык теңдемелердин чыгарылышына тездетилип жыйналуучу ылдамдыкты камсыз кылган ыкманы негиздөө. Чектик маселенин сандык чыгарылышы үчүн Рунге – Куттанын ыкмасынын модификациясын негиздөө.

Изилдөөнүн ыкмалары: Самойленко А.М сунуштаган сан-аналитикалык ыкманын аппараты, Быков Я.В иштеп чыккан интегро – дифференциалдык теңдемелердин теориясы, кичине параметр теориясынын ыкмасы, аймактар функциясынын теориясы, чектик маселенин так чыгарылышына, жакындаштырылган чыгарылыштын тездетилип жыйналышын камсыз кылган Ньютон – Канторовичтин ыкманыны аппараты.

Илимий жанылыктар:

- Биринчи жолу автономдук касиетке ээ болгон интегро – дифференциалдык теңдемелердин мезгилдик чыгарылышын изилдөөдө Самойленко А.М. сан – анаоитикалык ыкмасы колдонулуп жана негизделди;

- Чектик маселенин так чыгарылышына жакындаштырылган чыгарылыштын тездетилип жыйналуусун камсыз кылган ыкманы иштеп чыгуу жана негиздөө;
- Сан – аналитикалык ыкманын интегралдык теңдемеси деп аталуучу интегралдык теңдеменин чыгарылышынын жашашын жана жалгыздыгын изилдөө;
- Сызыктуу жана квазисызыктуу чектик маселелнин чыгарышынын жашашы жана аны тургузуу маселелерин изилдөө;
- Регулярдуу жана сингулярдуу дүүлүктүрүлгөн теңдемелерди изилдөө үчүн интегро – дифференциалдык теңдемелерди иштеп чыгуу жана негиздөө;
- Дифференциалдык теңдеме үчүн чектик маселенин сандык чыгарылышын табууну камсыз кылган Рунге – Куттанын ыкмасынын модификациясын иштеп чыгуу.

SUMMARY

Alymbaev Asangul Temirkulovich

Numerical-analytical and asymptotic methods for investigating boundary-value problems of differential, integro-differential equations

Thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, specialty 01.01.02 - differential equations, dynamic systems and optimal control.

Keywords: boundary value problem, periodic solution, differential equation, integro-differential equation, approximate method with accelerated convergence, linear and quasilinear differential equations, the method of integro-differential equations.

Objects of research:

Periodic and two-point boundary value problems of a system of differential and integro-differential equations.

Objective:

- study of the existence and construction of periodic solutions of a system of quasilinear IMU with finite aftereffect and an IMU of a general kind with an infinite aftereffect, possessing the property of autonomy;

- study of the problem of solvability of mixed type IC and construction of approximate solutions;

- study of the problem of constructing a solution of boundary value problems for DM with linear non-separating boundary conditions;

- the construction of an asymptotic expansion in powers of the small parameter of the solution of boundary value problems for DW with a regular and singular perturbation.

Methods of research:

To achieve the goal and solve the problems of the dissertation, the apparatus of the numerical-analytical method proposed by Samoilenko AM, the theory of integro-differential equations developed by Bykov YV, the theory of the small parameter method, the theory of the method of boundary functions and the apparatus of the Newton- Kantorovich, which ensures the accelerated convergence of the approximate solution to the exact solution of the boundary value problem.

Scientific novelty:

- For the first time the numerical-analytical method Samoilenko was applied and justified for the study of periodic solutions of autonomous SIDEs with finite and infinite aftereffect;
- The method of successive approximations is developed and mathematically justified, which ensures the accelerated convergence of approximate solutions of boundary value problems to the exact solution of the SDE;
- The questions of the existence and uniqueness of the SIC solution are considered as the SIC in the numerical-analytical method;
- The method of reducing the boundary value problem for a CDS with a regular and singular perturbation with respect to a small parameter, to the Cauchy problem for SIDE, we construct an asymptotic solution of the boundary value problem;
- Existence questions and construction of boundary value problems of linear and quasilinear SDEs are studied;
- A modification of the Runge-Kutta numerical method for constructing numerical solutions of the boundary value problems of the SDE was developed.