НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. Ж. БАЛАСАГЫНА

Диссертационный совет Д.01.17.560

На правах рукописи
УДК 517.9

Алиева Айнур Рабатовна

СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С УСЛОВИЯМИ КОШИ

Специальность 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Бишкек -2017

Работа выполнена в Институте математики Национальной академии наук Кыргызской Республики

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Омуров Таалайбек Дардайылович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Асанов Авыт

кандидат физико-математических наук Белеков Кенжебек Жолдошевич

Ведущая организация: Ошский государственный университет, 723500, г. Ош, ул. Ленина, 331

Защита состоится 23 января в 16-00 часов на заседании диссертационного совета Д 01.17.560 по защите диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата физико-математических наук при Институте математики НАН КР и Кыргызском Национальном университете им. Ж. Баласагына по адресу: Кыргызстан, 720054, г. Бишкек, ул. Абдымомунова 328, лабораторный корпус № 6 КНУ, аудитория 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Национальной академии наук Кыргызской Республики по адресу: Кыргызстан, 720071, г. Бишкек – 71, просп. Чуй 265-а, и на сайте www.math.aknet.kg ИМ НАН КР.

Автореферат разослан «_____»_______________ 2017 г.

Ученый секретарь диссертационного совета

д. ф.-м. н., профессор Байзаков А.Б.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Построение математических моделей для разнообразных колебательных процессов и их всестороннее исследование представляют собой важную задачу прикладной математики. И важным направлением исследования в этой области является построение асимптотической теории возмущений, которые были разработаны в трудах А.А. Андронова, Н.Н. Боголюбова, В. Вазова, Н.М. Крылова, Л.С. Понтрягина, А.Н. Тихонова и др.

Для этой цели мы будем рассматривать сингулярно-возмущенные (СВ) дифференциальные уравнения (ДУ) и интегро-дифференциальные уравнения (ИДУ), где малые положительные параметры (будем обозначать их $\varepsilon, \ \varepsilon_1, \ \varepsilon_2$) являются сомножителями при старших производных, и соответственно задачи для таких уравнений (СВЗ). Задачи, получающиеся при приравнивании $\varepsilon, \ \varepsilon_1, \ \varepsilon_2$ нулю, называются вырожденными задачами (ВЗ). Важным при построении теории сингулярно-возмущенных задач является выбор наиболее оптимального для исследуемой задачи пространства, в котором физический процесс описывается наиболее просто. Ниже мы используем гильбертовы пространства $L^2(R)$ – квадратично интегрируемых функций в области R и $L_h^2(D)$ – также в области D с неотрицательной функцией - весом $h(\tau)$.

Развивая идеи работы А.Н. Тихонова в теории сингулярно-возмущенных задач, в известных работах К. Алымкулова, В.М. Бабича, В.С. Булдырева, В.П. Бутузова, А.Б. Васильевой, М. Ван Дайка, А.А. Дородницина, А.Г. Елисеева, А.М. Ильина, К. Какишева, К.А. Касымова, С. Каримова, С.А. Ломова, Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розова, Л.С. Понтрягина, А.С. Омуралиева, Т.Д. Омурова и других исследователей, были разработаны различные способы построения асимптотических разложений при $\varepsilon \to 0$. Рассматривались погранслойные функции, не малые в окрестности определенных точек. В работах М.И.Иманалиева, П.С. Панкова, Г.М.Кененбаевой получены более общие (в том числе подвижные) погранслойные функции для обыкновенных СВДУ.

Существенные трудности возникают при исследовании нелинейных СВЗ в области дополнительных пограничных слоев и в задачах с разрывными сосредоточенными источниками. Аналогичные трудности возникают и СВЗ типа Бенджамина-Бона-Махони (ББМ) в области специальных пограничных слоев.

Поэтому, в диссертационной работе предложен метод, дающий разложения асимптотического характера для СВДУ и СВИДУ в частных производных, где содержатся решение вырожденной задачи, функция типа погранслоя в окрестностях некоторых отрезков и линейный интегральный оператор с остаточной функцией. Разработанные методы позволяют эффективно оценить близости решений СВЗ и вырожденных задач в $L_h^2(D)$, когда задается априорная информация о входных данных из $L^2(R)$, в чем и заключается актуальность данной работы.

Отметим, что СВЗ с двумя и более малыми параметрами встречаются во многих областях науки. Например, в задачах гидродинамики были исследованы СВУ с двумя параметрами, когда $\rho^{-1}A_{\tau}=\varepsilon$ - кинематический коэффициент «кажущейся» вязкости турбулентного течения, соответствующий коэффициенту кинематической вязкости: $\mu=\rho^{-1}\nu$ ламинарного течения (A_{τ}- коэффициент турбулентного обмена). Поэтому в работе также исследованы СВУ с двумя малыми параметрами.

Целью работы является нахождение условий близости решений СВЗ и вырожденных задач в $L_h^2(D)$ для нелинейных ИДУ в частных производных в неограниченной области с условием Коши.

Методика исследования. Основными методами исследования являются: для теории вырожденных задач – теория интегральных уравнений второго рода (ИУ-II), принцип Банаха и метод Пикара; для теории СВЗ – представления асимптотического характера для решений, методы интегральных преобразований, элементы функционального и математического анализа.

Научная новизна:

1) на основе разработанного метода, где вводятся функция типа погранслоя в окрестности отрезка и линейный интегральный оператор с остаточной функцией, получено решение СВЗ типа (ББМ) в $L_h^2(D)$;

2) получены условия близости решений этой СВЗ и вырожденной задачи в $L_h^2(D)$;

3) разработанная теория СВЗ типа (ББМ) модифицирована к СВИДУ гиперболического типа с условием Коши в $L_h^2(D)$;

4) полученные результаты обобщены для СВИДУ с двумя малыми параметрами.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер, и ее результаты могут быть использованы аспирантами, докторантами и специалистами в этой области. Целью любого метода в теории сингулярно-возмущенных задач является построение асимптотической аппроксимации, которое позволило бы доказать разрешимость изучаемых задач и оценить близости решений сингулярно-возмущенных и вырожденных задач, когда малый параметр стремится к нулю в определенных пространствах. Поэтому, результаты данной диссертации не только отвечают поставленным вопросам, но и пополняют теорию нелинейных СВЗ и могут быть использованы для решения конкретных задач гидродинамики, математической физики и др.

Основные положения, выносимые на защиту:

– выбор наиболее оптимального пространства для исследуемых СВЗ;

– разработка алгоритма решения исследуемых СВЗ в выбранном пространстве $L_h^2(D)$;

– доказательство разрешимости решения СВЗ в $L_h^2(D)$;

– достаточные условия близости решений изученных СВЗ и вырожденных задач в $L_h^2(D)$;

– обобщение предложенного метода решения СВЗ на СВЗ с двумя малыми параметрами в $L_h^2(D)$;

– модификация полученных результатов для СВЗ типа (ББМ) для СВИДУ второго порядка гиперболического типа в неограниченной области с априорной информацией в $L^2(R)$.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на семинарах:
- Института теоретической и прикладной математики НАН КР (2015 г., под руководством академика Иманалиева М.И.),
- кафедры дифференциальных уравнений и математического анализа КНУ им. Ж. Баласагына (2017 г., под руководством проф. Байзакова А.Б.),
- НИЦ Навье-Стокса КНУ (2017 г., под руководством проф. Омурова Т.Д.),

и на Иссык-Кульском математическом форуме, с. Бозтери (июнь 2015).

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано 11 научных статей, в том числе 3 статьи [8, 10, 11] - в зарубежных изданиях и 4 работы [1-4] написаны единолично. В совместных работах [5-11] постановка задач и основная идея модифицированного метода погранслойной функции предложена научным руководителем, обсуждение выводов принадлежат другим соавторам, а доказательства основных лемм и теорем и все научные выводы принадлежит автору диссертации.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из списка используемых обозначений и определений, введения, трех глав, разбитых на параграфы, заключений к ним, выводов и списка использованных источников из 64 названий. Объем текста 84 страницы.

Краткое содержание работы

В первой главе приведен общий обзор по СВЗ и указаны проблемные вопросы в области СВЗ. В заключении первой главы сформулированы задачи, которые требуется решить в диссертационной работе.

В главе 2 исследованы нелинейные СВЗ с ИДУ в частных производных типа (ББМ) с условием Коши.

В параграфе 2.1 рассмотрено СВИДУ типа (ББМ) с условием Коши

$$\varepsilon[\varepsilon u_{tx^2}+\beta(uu_{tx}+uu_{x^2})+\varepsilon u_{x^3}]-(u_x+u_t)=f(t,x)+\lambda Ku, \tag{2.1.1}$$

$$\begin{cases} u(0,x)=\vartheta(0,x)+b_0(x,\varepsilon),\ \forall x\in R, \\ Ku\equiv\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(t,x,\tau)u^2(t,\tau)d\tau,\ \ (t,x,\tau)\in D_1=D\times R;\ \ D=\{(t,x):0\le t\le T, x\in R\}, \end{cases} \tag{2.1.2}$$

где $0<\beta,\lambda=const<1,\ b_0(x,\varepsilon)$, $f,K-$ известные функции, кроме того

$$\begin{cases} C^3(R)\ni b_0(x,\varepsilon),\ \ C^{1,3}(D)\ni f(t,x),\ \ \ 0\le K(t,x,\tau)\in C^{1,3,0}(D_1), \\ (\sup\limits_D\int\limits_{-\infty}^{\infty}|K(t,x,\tau)|^2d\tau)^{\frac{1}{2}}\le C_1=\text{const},\ \ (K(t,x,\tau)\le K_0,\forall(t,x,\tau)\in D_1), \\ \sup\limits_D\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ \ |K(t,x,\tau)|d\tau\le C_2=\text{const},(\text{C}_0=\max(C_1,C_2). \end{cases} \tag{2.1.3}$$

Задается априорная информация(2.6):

$$\begin{cases} C^3(R)\cap L^2(R)\ni b_0(x,\varepsilon),\ \ (|b_0|\le m_*\ ,\forall(t,x)\in D); b_0(x,\varepsilon)\not\to 0,\ \text{ когда }\ \varepsilon\to 0,\forall x\in R, \\ \|b_0(x,\varepsilon)\|_{L^2(R)}=(\int\limits_R |b_0(\tau,\varepsilon)|^2\,d\tau)^{\frac{1}{2}}\le m_1\varepsilon^\gamma, (0<\gamma<1;\ 0<m_*,m_1=const). \end{cases} \qquad (*)$$

Вырожденная задача имеет вид

$$\vartheta_x+\vartheta_t=-(f(t,x)+\lambda K\vartheta), \qquad (2.1.4)$$

$$\vartheta|_{t=0}=\vartheta(0,x)\equiv\varphi_0(x)\in C^3(R),\forall x\in R. \qquad (2.1.5)$$

Она эквивалентна ИУ-II типа Вольтерра

$$\vartheta(t,x)=\vartheta(0,x-t)-\int\limits_0^t[f(s,x-(t-s))+\lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(s,x-(t-s),\tau)\vartheta^2(s,\tau)d\tau]ds\equiv(B\vartheta)(t,x). \quad (2.1.6)$$

Лемма 2.1.1. Если для известных функций f,K имеет место (2.1.3) и оператор B допускает условия принципа Банаха:

$$d=2\lambda r_0C_0T<\lambda C_0[2r_0T+2r_0T^2+2Tm_1]\le\frac{1}{2}, \qquad (2.1.7)$$

$$\begin{cases} B:S_r(\vartheta_0)\to S_r(\vartheta_0), \\ \|B\vartheta_0-\vartheta_0\|_C\le(1-d)r;\ \ S_r(\vartheta_0)=\{\vartheta:|\vartheta-\vartheta_0|\le r,\forall(t,x)\in D\},\ \ (\|\vartheta\|_C\le r_0), \end{cases} \qquad (2.1.8)$$

и $\vartheta(0,x)\in C^3(R)$, то задача (2.1.4), (2.1.5) разрешима в $\vartheta\in C^{1,3}(D)$.

В условиях леммы 2.1.1 решение задачи (2.1.1), (2.1.2) ищем в виде

$$\begin{cases} u_\varepsilon=\vartheta(t,x)+\Pi(t,x,\varepsilon)+\Im\xi_\varepsilon, \\ \vartheta(t,x)|_{t=0}=\vartheta(0,x)\equiv\varphi_0(x),\quad \forall x\in R, \\ \Pi(t,x,\varepsilon)|_{t=0}=b_0(x,\varepsilon),\quad \forall x\in R, \\ \Im\xi_\varepsilon\equiv\dfrac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{x-t+\nu}e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)}\int\limits_s^{\infty}e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-\tau)}\xi(\nu,\tau)d\tau ds d\nu. \end{cases} \qquad (2.1.10)$$

Функция типа погранслоя $\Pi(t,x,\varepsilon)$ определяется из уравнения

$$\Pi_t(t,x,\varepsilon)+\Pi_x(t,x,\varepsilon)=0, \qquad (2.1.14)$$

т.е.:

$$\begin{cases} \Pi(t,x,\varepsilon)=b_0(x-t,\varepsilon),\forall(t,x)\in D, \\ \Pi(t,x,\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\begin{cases} 0, & x\ne t, \\ m_0, & x=t,(b_0(0,\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}m_0=\text{const}) \end{cases} \end{cases} \qquad (2.1.15)$$

с оценкой

$$\begin{cases} \|\Pi\|_{L_h^2(D)}=(\sup\limits_{[0,T]}\int\limits_0^t\int\limits_R h(\tau)|b_0(\tau-s,\varepsilon)|^2\,d\tau ds)^{\frac{1}{2}}\le\sqrt{T\tilde{h}_0}\times m_1\varepsilon^\gamma=m_2\varepsilon^\gamma\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0, \\ m_2=\sqrt{T\tilde{h}_0}\times m_1;\ 0<\gamma<1;\ 0\le h\le\tilde{h}_0<\infty:\int\limits_R h(\tau)d\tau\le h_0. \end{cases} \qquad (2.1.16)$$

Лемма 2.1.2. При условиях (*),(2.1.16) функция погранслоя определяется единственным образом и сходится к нулю в смысле $L_h^2(D)$, когда $\varepsilon\to 0$.

Лемма 2.1.3. В условиях лемм 2.1.1, 2.1.2 функция $\xi_\varepsilon\in C(D)$, определяется единственным образом, причем

$$\begin{cases}\|\xi_\varepsilon\|_C \le (1-d_P)\|Y_\varepsilon\|_C \le (1-d_P)\Delta_1(\varepsilon) = \Delta_2(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \\ d_P < 1;\ |\Upsilon(\varepsilon,t,x)| \le \lambda[2r_0C_1m_1\varepsilon^\gamma + K_0m_1^2\varepsilon^{2\gamma}] + 2\tilde{r}_0(\varepsilon^2 + \beta\varepsilon(r_0+m_*)) = \Delta_1(\varepsilon).\end{cases} \quad (2.1.22)$$

Теорема 2.1.1. При выполнении условий лемм 2.1.1-2.1.3 исходная СВЗ (2.1.1),(2.1.2) имеет единственное решение, представляемое в виде (2.1.10) и

$$\|u(t,x)-\vartheta(t,x)\|_{L^2_h(D)} \le \sqrt{2}[T\tilde{h}_0 \times (m_1\varepsilon^\gamma)^2 + (T\Delta_2(\varepsilon))^2 h_0 T]^{\frac{1}{2}} = N_0(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \quad (2.1.23)$$

В работе приведен пример, где выполняются все условия теоремы 2.1.1.

В параграфе 2.2 рассмотрена СВЗ в области $D_0 = \{(t,x): 0 < t \le T, x \in R\}$,

$$\varepsilon^2[u_{tx^2} + u(t,x)(Ku)(t,x) + u_{x^3}] - \alpha^2(u_x + u_t) + u = f(t,x) + e^{-\frac{(x-t)^2}{\varepsilon}}, \quad (2.2.1)$$

$$\begin{cases} u(0,x) = \vartheta(0,x) + e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}},\ \forall x \in R, \\ Ku \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t,x,\tau)u_\tau(t,\tau)d\tau,\ ((t,x,\tau)\in D\times R), D = \{(t,x): 0 \le t \le T, x \in R\},\end{cases} \quad (2.2.2)$$

где $0 < \alpha = \text{const} < \infty,\ C^{1,3}(D) \ni f(t,x),\ C(D_1) \ni K -$ известные и ограниченные функции, кроме того $0 \le K(t,x,\tau)$ и интегрируемая функция по τ в R, причем

$$\begin{cases}(\sup\limits_D \int\limits_{-\infty}^{\infty} |K(t,x,\tau)|^2 d\tau)^{\frac{1}{2}} \le C_1 = \text{const};\ (t,x,\tau) \in D_1, \\ \sup\limits_D \int\limits_{-\infty}^{\infty} |K(t,x,\tau)| d\tau \le C_2 = \text{const},\ (\mathrm{C}_0 = \max(C_1, C_2).\end{cases}$$

Здесь задается априорная информация следующего вида

$$\begin{cases} C^3(R)\cap L^2(R) \ni b_0(x,\varepsilon) \equiv e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}},\ \forall x\in R,\ (|b_0| \le 1,\ \forall x \in R), \\ b_{0x}(x,\varepsilon) \equiv -2\dfrac{1}{\varepsilon}xe^{-\frac{x^2}{\varepsilon}};\ h(x) \equiv e^{-x^2} \le \tilde{h}_0 = 1,\ \forall x \in R,\ (\int\limits_R \mathrm{e}^{-\tau^2}d\tau = \sqrt{\pi}), \\ \|b_0(x,\varepsilon)\|_{L^2(R)} = (\int\limits_R \mathrm{e}^{-2\frac{\tau^2}{\varepsilon}}d\tau)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt[4]{\dfrac{\pi\varepsilon}{2}} = m_1\varepsilon^\gamma,\ (m_1 = \sqrt[4]{\dfrac{\pi}{2}},\ \gamma = \dfrac{1}{4}), \\ \|b_{0x}(x,\varepsilon)\|_{L^2(R)} = (4\dfrac{1}{\varepsilon}\int\limits_R \dfrac{\tau^2}{\varepsilon}e^{-2\frac{\tau^2}{\varepsilon}}d\tau)^{\frac{1}{2}} \le (4\dfrac{1}{\varepsilon}e^{-1})^{\frac{1}{2}}(\sqrt{\varepsilon}\int\limits_R e^{-\rho^2}d\rho)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt[4]{\pi}\varepsilon^{-\frac{1}{4}} = \tilde{m}_1\varepsilon^{-\beta}, \\ \|b_0(x-t,\varepsilon)\|_{L^2_h(D)} = (\sup\limits_{[0,T]}\int\limits_0^t\int\limits_R h(\tau)e^{-2\frac{1}{\varepsilon}(\tau-t)^2}d\tau)^{\frac{1}{2}} = (\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{2}}\sup\limits_{[0,T]}\int\limits_0^t\int\limits_R h(\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{2}}\rho + t)e^{-\rho^2}d\rho)^{\frac{1}{2}} \le m_2\varepsilon^{\frac{1}{4}}, \\ \tilde{m}_1 = 2\sqrt[4]{\pi};\ \beta = \dfrac{1}{4};\ \sup\limits_{\mu\ge 0}\mu e^{-\mu},\ (\mu = \dfrac{\tau^2}{\varepsilon});\ m_2 = \sqrt[4]{\dfrac{\pi}{2}} \times \sqrt{T}.\end{cases} \quad (2.2.3)$$

Априорная информация (2.2.3) отличается от информации (*), так как здесь уравнение (2.2.1) содержит интегро-дифференциальный оператор. Поэтому, введено дополнительное условие

$$\begin{cases} b_{0x}(x,\varepsilon) \equiv -2\dfrac{1}{\varepsilon}xe^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}, \\ \|b_{0x}(x,\varepsilon)\|_{L^2(R)} = (4\dfrac{1}{\varepsilon}\int\limits_R \dfrac{\tau^2}{\varepsilon}e^{-2\frac{\tau^2}{\varepsilon}}d\tau)^{\frac{1}{2}} \le (4\dfrac{1}{\varepsilon}e^{-1})^{\frac{1}{2}}(\sqrt{\varepsilon}\int\limits_R e^{-\rho^2}d\rho)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt[4]{\pi}\varepsilon^{-\frac{1}{4}} = \tilde{m}_1\varepsilon^{-\beta}.\end{cases}$$

Вырожденная задача для (2.2.1)

$$\vartheta_x + \vartheta_t = \alpha^{-2}[\vartheta(t,x) - f(t,x)], \qquad (2.2.4)$$

$$\vartheta\big|_{t=0} = \vartheta(0,x) \in C^3(R), \forall x \in R. \qquad (2.2.5)$$

эквивалентна ИУ-II типа Вольтерра

$$\vartheta(t,x) = \vartheta(0,x-t) + \alpha^{-2}\int_0^t [\vartheta(s,x-(t-s)) - f(s,x-(t-s))]ds \equiv (B\vartheta)(t,x). \qquad (2.2.6)$$

Поэтому, она разрешима в классе функций $C^{1,3}(D)$ при условиях

$$\begin{cases} d = \alpha^{-2}T \le \dfrac{1}{2} < 1; \;\; B: S_r(\vartheta_0) \to S_r(\vartheta_0), \\ \left\|B\vartheta_0 - \vartheta_0\right\|_C \le (1-d)r; \;\; S_r(\vartheta_0) = \{\vartheta : \left|\vartheta - \vartheta_0\right| \le r, \forall (t,x) \in D\}, \end{cases} \qquad (2.2.7)$$

и $\vartheta(0,x) \in C^3(R), f \in C^{1,3}(D)$.

Лемма 2.2.1. При условиях (2.2.5), (2.2.7) задача (2.2.4), (2.2.5) разрешима в $C^{1,3}(D)$.

Решение задачи Коши (2.2.1), (2.2.2) ищем в виде

$$\begin{cases} u_\varepsilon = \vartheta(t,x) + \Pi(t,x,\varepsilon) + \Im\xi_\varepsilon, \\ \vartheta(t,x)\big|_{t=0} = \vartheta(0,x); \;\; \Pi(t,x,\varepsilon)\big|_{t=0} = b_0(x,\varepsilon) \equiv e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}, \;\; \forall x \in R, \\ \Im\xi_\varepsilon \equiv \dfrac{1}{\varepsilon^2}\displaystyle\int_0^t \int_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)} \int_s^\infty e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}(s-\tau)} \xi(\nu,\tau) d\tau ds d\nu. \end{cases} \qquad (2.2.8)$$

Получены соответствующие уравнения относительно функций ϑ, Π:

$$\vartheta_x + \vartheta_t = \alpha^{-2}[\vartheta(t,x) - f(t,x)], \qquad \text{(см.(2.2.4))}$$

$$\Pi_t(t,x,\varepsilon) + \Pi_x(t,x,\varepsilon) = 0. \qquad (2.2.12)$$

Откуда, определяется функция Π:

$$\Pi(t,x,\varepsilon) = b_0(x-t,\varepsilon) \equiv e^{-\frac{(x-t)^2}{\varepsilon}}, \forall (t,x) \in D, \qquad (2.2.13)$$

и при заданной информации (2.2.3) получена оценка в $L_h^2(D)$ в виде

$$\begin{cases} \left\|\Pi\right\|_{L_h^2(D)} = (\sup\limits_{[0,T]} \displaystyle\int_0^t \int_R h(\tau)\left|\Pi(s,\tau,\varepsilon)\right|^2 d\tau ds)^{\frac{1}{2}} = (\sup\limits_{[0,T]} \int_0^t \int_R h(\tau) e^{-2\frac{(\tau-s)^2}{\varepsilon}} d\tau ds)^{\frac{1}{2}} \le \\ \le (\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{2}} \sup\limits_{[0,T]} \displaystyle\int_0^t \int_R h(\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\rho + t) e^{-\rho^2} d\rho ds)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt[4]{\frac{\pi\varepsilon}{2}} \times \sqrt{T\tilde{h}_0} = m_2 \varepsilon^{\frac{1}{4}} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0, \\ m_2 = \sqrt[4]{\dfrac{\pi}{2}} \times \sqrt{T}; \;\; 0 \le h(x) \equiv e^{-x^2} \le \tilde{h}_0 = 1, \; \forall x \in R: \;\; \displaystyle\int_R e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}. \end{cases} \qquad (2.2.14)$$

А относительно ξ получено уравнение

$$\begin{cases} \xi(t,x) = \varepsilon[(\vartheta(t,x) + e^{-\frac{(x-t)^2}{\varepsilon}} + \dfrac{1}{\varepsilon^2}\displaystyle\int_0^t \int_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)} \int_s^\infty e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}(s-\tau)} \xi(\nu,\tau) d\tau ds d\nu) \times \\ \times \displaystyle\int_{-\infty}^\infty K(t,x,\tau)[\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t \int_{\tau-t+\nu}^\infty e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}(\tau-t+\nu-\tau')} \xi(\nu,\tau') d\tau' d\nu - \frac{\alpha}{\varepsilon^3}\int_0^t \int_{-\infty}^{\tau-t+\nu} e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(\tau-t+\nu-s)} \times \end{cases}$$

$$\begin{cases}\times\int\limits_s^\infty e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}(s-\tau')}\xi(\nu,\tau')d\tau'dsd\nu]d\tau+\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{x-t+\nu}e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)}\int\limits_s^\infty e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}(s-\tau)}\xi(\nu,\tau)d\tau dsd\nu\times\\ \times\int\limits_{-\infty}^\infty K(t,x,\tau)[\vartheta_\tau(t,\tau)-2(\tau-t)\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{(\tau-t)^2}{\varepsilon}}]d\tau]+\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{x-t+\nu}e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(x-t+\nu-s)}\int\limits_s^\infty e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}(s-\tau)}\times\\ \times\xi(\nu,\tau)d\tau dsd\nu-\Upsilon(t,x,\varepsilon)\equiv(P\xi)(t,x),\\ \Upsilon\equiv-\varepsilon^2[\vartheta_{tx^2}+\vartheta_{x^3}]-\varepsilon(\vartheta+\Pi(t,x,\varepsilon))\times\int\limits_{-\infty}^\infty K(t,x,\tau)[\vartheta_\tau(t,\tau)+\Pi_\tau(t,\tau,\varepsilon)]d\tau.\end{cases}\quad(2.2.14)$$

т.е. выполняются все условия леммы 2.1.3, причем

$$\begin{cases}\|\xi_\varepsilon\|_C\le(1-d_P)\|Y_\varepsilon\|_C\le(1-d_P)\Delta_1(\varepsilon)=\Delta_2(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}0,\\ d_P<1;\ |\Upsilon(t,x,\varepsilon)|\le2\varepsilon^2\tilde r_0+\varepsilon(r_0+1)C_0\tilde r_0+(r_0+1)C_0\tilde m_1\varepsilon^{\frac{3}{4}}=\Delta_1(\varepsilon).\end{cases}\quad(2.2.20)$$

Значит, с учетом (2.2.8) из полученных результатов следует

$$\begin{cases}\|u(t,x)-\vartheta(t,x)\|_{L_h^2(D)}\le\sqrt2[\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}T\sqrt\pi+(T\Delta_2(\varepsilon))^2T\sqrt\pi]^{\frac12}=N_0(\varepsilon),\\ N_0(\varepsilon)=\sqrt2[\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}T\sqrt\pi+(T\Delta_2(\varepsilon))^2T\sqrt\pi]^{\frac12}\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}0.\end{cases}\quad(2.2.21)$$

Теорема 2.2.1. При условиях (2.2.7),(2.2.14) и (2.2.20) СВЗ (2.2.1),(2.2.2) имеет единственное решение по правилу (2.2.8), причем близость решений СВУ (2.2.1) и ВУ (2.2.4) в $L_h^2(D)$ устанавливается в виде (2.2.21).

В параграфе 2.3 рассмотрена СВЗ с двумя малыми параметрами вида:

$$\varepsilon_1^2[u_{t^2x^2}+u_{tx^3}-\varepsilon_2(u_{tyx^2}+u_{yx^3})]+\varepsilon_2(u_{ty}+u_{yx})=u_{t^2}+u_{tx}+f(t,x,y)+\lambda Ku,\quad(2.3.1)$$

$$\begin{cases}u(0,x,y)=\vartheta(0,x,y)+b_0(x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2),\forall(x,y)\in R^2,\\ u_t(0,x,y)=\vartheta_t(0,x,y)-b_{0x}(x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2),\forall(x,y)\in R^2,\\ Ku\equiv\int\limits_{R^2}K(t,x,y,\tau_1,\tau_2)u^2(t,\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2,\forall(t,x,y,\tau_1,\tau_2)\in D_1,\\ D=[0,T]\times R^2;\quad D_1=D\times R^2,\end{cases}\quad(2.3.2)$$

где $0<\lambda=\text{const}$, $b_0(x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in C^{3,1}(R^2)$, $f(t,x,y), K(t,x,y,\tau_1,\tau_2)$ – заданные функции, при этом $C^{2,3,1}(D)\ni f(t,x,y)-$ ограниченная функция в области D; $0\le K(t,x,y,\tau_1,\tau_2)\in C^{2,3,1,0,0}(D_1)$ и интегрируемая функция по (τ_1,τ_2) в R^2, причем

$$\begin{cases}(\sup\limits_D\int\limits_{R^2}|K(t,x,y,\tau_1,\tau_2)|^2d\tau_1d\tau_2)^{\frac12}\le C_1;\ K(t,x,y,\tau_1,\tau_2)\le K_0=\text{const},\forall(t,x,y,\tau_1,\tau_2)\in D_1,\\ \sup\limits_D\int\limits_{R^2}|K(t,x,y,\tau_1,\tau_2)|d\tau_1d\tau_2\le C_2;\ \mathrm{C}_0=\max(C_1,C_2),C_i=\text{const},\ (i=1,2).\end{cases}$$

При этом требуется априорная информация вида

$$\begin{cases}b_0(x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\not\to0,\ \text{ когда }\ \varepsilon_1,\varepsilon_2\to0,\forall(x,y)\in R^2,(|b_0|\le m_0<\infty,\forall(x,y)\in R^2),\\ \|b_0\|_{L^2(R^2)}=(\int\limits_{R^2}|b_0(\tau_1,\tau_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2)|^2d\tau_1d\tau_2)^{\frac12}\le m_1\varepsilon_1^\gamma,(0<\gamma<1;\ 0<m_i=\text{const};i=0,1).\end{cases}\quad(2.3.3)$$

Вырожденная задача для (2.3.1)

$$\vartheta_{t^2}+\vartheta_{tx}=-[f(t,x,y)+\lambda K\vartheta],\quad(2.3.4)$$

$$\begin{cases} \vartheta(t,x,y)\big|_{t=0} = \vartheta(0,x,y) \equiv \varphi_0(x,y), \forall (x,y) \in R^2, \\ \vartheta_t(t,x,y)\big|_{t=0} = \vartheta_t(0,x,y) \equiv \varphi_1(x,y), \forall (x,y) \in R^2, (C^{3,1}(R^2) \ni \varphi_i,\ i=0,1), \end{cases} \tag{2.3.5}$$

эквивалентно приводится к виду

$$\vartheta(t,x) = \varphi_0(x-t,y) + \int_0^t \{\psi(x-(t-s),y) - \int_0^s [f(\nu,x-(t-s),y) +$$
$$+\lambda \int_{R^2} K(\nu,x-(t-s),y,\tau_1,\tau_2)\vartheta^2(\nu,\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2]d\nu\}ds \equiv (B\vartheta)(t,x,y), (\psi \equiv \varphi_1 + \varphi_{0x}\,|). \tag{2.3.6}$$

Лемма 2.3.1. При условиях

$$d = \lambda r_0 C_0 T^2 \le \frac{1}{2}, \tag{2.3.8}$$

$$B: S_r(\vartheta_0) \to S_r(\vartheta_0),\ (S_r(\vartheta_0) = \{\vartheta : |\vartheta - \vartheta_0| \le r, \forall (t,x,y) \in D\}; \|\vartheta\|_C \le r_0), \tag{2.3.9}$$

задача (2.3.4), (2.3.5) разрешима в классе функций $C^{2,3,1}(D)$.

Решение (2.3.1) будем искать в виде

$$\begin{cases} u_\varepsilon = \vartheta(t,x,y) + \Pi(t,x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2) + (\Im\xi)(t,x,y), \\ \Im\xi \equiv \dfrac{1}{\varepsilon_1^2}\displaystyle\int_0^t \int_{-\infty}^{x-t+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(x-t+\nu-\tau)} \int_\tau^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')} \xi(\nu,\tau',y)d\tau' d\tau d\nu. \end{cases} \tag{2.3.10}$$

Тогда, с учетом (2.3.1) и (2.3.10) функция $\Pi(t,x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ единственным образом определяется из задачи

$$\Pi_t(t,x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2) + \Pi_x(t,x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2) = 0, \tag{2.3.12}$$

$$\Pi(t,x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\big|_{t=0} = b_0(x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2), \forall (x,y) \in R^2, \tag{2.3.13}$$

с оценкой в $L_h^2(D)$:

$$\begin{cases} \|\Pi\|_{L_h^2(D)} = (\sup\limits_{[0,T]} \displaystyle\int_0^t \int_{R^2} h(\tau_1,\tau_2)|\Pi(s,\tau_1,\tau_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2)|^2 d\tau_1 d\tau_2 ds)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{\tilde{h}_0 T} m_1 \varepsilon_1^\gamma \xrightarrow[\varepsilon_1 \to 0]{} 0, \\ \Pi(t,x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2) = b_0(x-t,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2), \forall (t,x,y) \in D, \\ 0 \le h(x,y) \le \tilde{h}_0 = \text{const} < \infty,\ \forall (x,y) \in R^2\text{:}\ \displaystyle\int_{R^2} h(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \le h_0 = \text{const}. \end{cases} \tag{2.3.16}$$

Для *ξ(t,x,y)* получено ИУ-II типа Вольтерра

$$\xi(t,x,y) = -\int_0^t \{\lambda \int_{R^2} K(s,x,y+\varepsilon_2(t-s),\tau_1,\tau_2)[2\vartheta(s,\tau_1,\tau_2)\frac{1}{\varepsilon_1^2}\int_0^s \int_{-\infty}^{\tau_1-s+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau_1-s+\nu-\tau)} \times$$
$$\times \int_\tau^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')}\xi(\nu,\tau',\tau_2)d\tau' d\tau d\nu + 2b_0(\tau_1-s,\tau_1,\tau_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\frac{1}{\varepsilon_1^2}\int_0^s \int_{-\infty}^{\tau_1-s+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau_1-s+\nu-\tau)} \times$$
$$\times \int_\tau^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')}\xi(\nu,\tau',\tau_2)d\tau' d\tau d\nu + (\frac{1}{\varepsilon_1^2}\int_0^s \int_{-\infty}^{\tau_1-s+\nu} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau_1-s+\nu-\tau)} \int_\tau^\infty e^{\frac{1}{\varepsilon_1}(\tau-\tau')}\xi(\nu,\tau',\tau_2)d\tau' d\tau d\nu)^2] \times \tag{2.3.20}$$
$$\times d\tau_1 d\tau_2 + \Upsilon(s,x,y+\varepsilon_2(t-s),\varepsilon_1,\varepsilon_2)\}ds \equiv (P\xi)(t,x,y).$$

Лемма 2.3.2. Если

$$\begin{cases} d_P = \lambda T^2 C_0(m_1 + \frac{2}{3}Tr_1) + \lambda r_0 C_0 T^2 < 1; \quad P: S_{r_1} \to S_{r_1}, \\ S_{r_1}(0) = \{\xi : |\xi(t,x,y)| \le r_1, \forall (t,x,y) \in D\}, \end{cases} \tag{2.3.21}$$

то уравнение (2.3.20) имеет единственное решение в $C(D)$, причем

$$\begin{cases}\|\xi\|_C \le (1-d_P)^{-1}T\|\Upsilon(t,x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\|_C \le (1-d_P)^{-1}T\Delta_1(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \Delta_2(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\xrightarrow[\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0]{} 0,\\ |\Upsilon| \le 2\tilde r_0(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2\varepsilon_1^2+\varepsilon_2)+\lambda(2r_0C_1m_1\varepsilon_1^\gamma+K_0(m_1\varepsilon_1^\gamma)^2)=\Delta_1(\varepsilon_1,\varepsilon_2),\quad \forall(t,x,y)\in D.\end{cases} \tag{2.3.22}$$

Теорема 2.3.1. Если имеют место условия лемм 2.3.1, 2.3.2 и (2.3.16), то, с учетом (2.3.10) следует

$$\|u_\varepsilon(t,x,y)-\vartheta(t,x,y)\|_{L_h^2(D)} \le \sqrt{2}[\sup_{[0,T]}\int_0^t\int_{R^2} h(\tau_1,\tau_2)|\Pi(s,\tau_1,\tau_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2)|^2 d\tau_1 d\tau_2 ds + \tag{2.3.23}$$

$$+(T\Delta_2(\varepsilon_1,\varepsilon_2))^2Th_0]^{\frac12} \le \sqrt{2}[\tilde h_0T(m_1\varepsilon_1^\gamma)^2+(T\Delta_2(\varepsilon_1,\varepsilon_2))^2Th_0]^{\frac12} = N_0(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\xrightarrow[\varepsilon_1\to 0,\varepsilon_2\to 0]{} 0.$$

В главе 3 на основе модификации метода главы 2 изучаются вопросы разрешимости сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа с условием Коши. Оценены близости решений сингулярно-возмущенных и вырожденных задач в $L_h^2(D)$.

В параграфе 3.1 изучается СВИДУ второго порядка в неограниченной области с условием Коши:

$$\begin{cases}\varepsilon^2u_{tx}(t,x)+\varepsilon\alpha(u_t(t,x)+u_x(t,x))+\alpha^2u(t,x)=f(t,x)+\lambda Ku,\\ Ku\equiv\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}K(t,x,s,\tau)(u(s,\tau))^2d\tau ds,\ \ (t,x,s,\tau)\in D_1=D\times D,\\ D=\{(t,x):t\in[0,T],x\in R\},\end{cases} \tag{3.1.1}$$

$$u(0,x)=\vartheta(0,x)+b_0(x,\varepsilon),\forall x\in R. \tag{3.1.2}$$

При этом требуется априорная информация вида:

$$\begin{cases}C^1(R)\cap L^2(R)\ni b_0(x,\varepsilon);\quad b_0(x,\varepsilon)\not\to 0,\ \text{когда}\ \varepsilon\to 0,\forall x\in R,\\ \|b_0(x,\varepsilon)\|_{L^2(R)}=(\int_R|b_0(\tau,\varepsilon)|^2d\tau)^{\frac12}\le m_1\varepsilon^\gamma,(0<\gamma<1;\ 0<m_1=const).\end{cases} \tag{*}$$

Пусть рассматривается задача (3.1.1), (3.2.2), (*) с условиями $0<\alpha,\lambda=const$, $f,K,b_0(x,\varepsilon)\in C^1(R)-$ известные данные, кроме того $C^{1,1}(D)\ni f(t,x)-$ ограниченная функция в области D; $0\le K(t,x,s,\tau)\in C^{1,1,0,0}(D_1)$ и интегрируемая функция по (s,τ) в D, причем

$$\begin{cases}(\sup_D\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}|K(t,x,s,\tau)|^2d\tau ds)^{\frac12}\le C_1=\text{const},\ (K(t,x,s,\tau)\le K_0,\forall(t,x,s,\tau)\in D_1),\\ \sup_D\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}|K(t,x,s,\tau)|d\tau ds\le C_2=\text{const},(\text{C}_0=\max(C_1,C_2).\end{cases} \tag{3.1.3}$$

Вырожденное уравнение для (3.1.1) - ИУ-II

$$\begin{cases}\vartheta=(\alpha^2)^{-1}[f(t,x)+\lambda K\vartheta]\equiv B\vartheta,\forall(t,x)\in D,\\ \vartheta(t,x)|_{t=0}=\vartheta(0,x),\end{cases} \tag{3.1.4}$$

Лемма 3.1.1. При условиях:

$$d=2(\alpha^2)^{-1}\lambda C_0r_0<1, \tag{3.1.5}$$

$$\|B\vartheta_0-\vartheta_0\|_C\le(1-d)r,\quad (S_r(\vartheta_0)=\{\vartheta:|\vartheta-\vartheta_0|\le r,\forall(t,x)\in D\};\ \|\vartheta\|_C\le r_0) \tag{3.1.6}$$

уравнение (3.1.4) разрешимо в $C^{1,1}(D)$.

Решение задачи (3.1.1), (3.1.2), (*), когда выполняется условия леммы 3.1.1, ищем в виде

$$\begin{cases} u(t,x) = \vartheta(t,x) + \Pi(t,x,\varepsilon) + (\Im\xi)(t,x), \forall(t,x) \in D, \\ (\Im\xi)(t,x) \equiv \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}[t-s+x-\tau]} \frac{1}{\varepsilon^2} \xi(s,\tau) d\tau ds, \end{cases} \tag{3.1.10}$$

$\vartheta(t,x)$ – решение вырожденного уравнения (3.1.4), Π – функция типа погранслоя, $\Im$ – линейный интегральный оператор, содержащий неизвестную остаточную функцию $\xi(t,x)$. Получаем следующие уравнения:

$$\varepsilon\Pi_t + \alpha\Pi = 0, \tag{3.1.12}$$

$$\Pi(t,x,\varepsilon)\big|_{t=0} = b_0(x,\varepsilon), \forall x \in R, \tag{3.1.13}$$

Из задачи (3.1.12),(3.1.13) определим функцию $\Pi(t,x,\varepsilon)$:

$$\Pi(t,x,\varepsilon) = e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} b_0(x,\varepsilon), \forall(t,x) \in D. \tag{3.1.15}$$

Лемма 3.1.2. В условиях (*), (3.1.13) решение (3.1.15) уравнения (3.1.12) единственно и сходится к нулю в смысле $L_h^2(D)$, когда $\varepsilon \to 0$.

Далее, получено уравнение

$$\begin{cases} \xi = \lambda \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t,x,s,\tau)[2\vartheta(s,\tau) \int\limits_0^s \int\limits_{-\infty}^{\tau} e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}[s-s'+\tau-\tau']} \frac{1}{\varepsilon^2} \xi(s',\tau') d\tau' ds' + 2e^{-\frac{\alpha s}{\varepsilon}} b_0(\tau,\varepsilon) \times \\ \times \int\limits_0^s \int\limits_{-\infty}^{\tau} e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}[s-s'+\tau-\tau']} \frac{1}{\varepsilon^2} \xi(s',\tau') d\tau' ds' + (\int\limits_0^s \int\limits_{-\infty}^{\tau} e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}[s-s'+\tau-\tau']} \frac{1}{\varepsilon^2} \xi(s',\tau') d\tau' ds')^2] d\tau ds + \Upsilon \equiv H\xi, \\ \Upsilon(\varepsilon,t,x) \equiv \lambda \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t,x,s,\tau)[2\vartheta(s,\tau) e^{-\frac{\alpha s}{\varepsilon}} b_0(\tau,\varepsilon) + (e^{-\frac{\alpha s}{\varepsilon}} b_0(\tau,\varepsilon))^2] d\tau ds - \varepsilon^2[\vartheta_{tx}(t,x) - \\ -\frac{\alpha}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} b_{0x}(x,\varepsilon)] - \varepsilon\alpha[\vartheta_t(t,x) + e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} b_{0x}(\tau,\varepsilon)] = \lambda \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t,x,s,\tau)[2\vartheta(s,\tau) e^{-\frac{\alpha s}{\varepsilon}} b_0(\tau,\varepsilon) + \\ +(e^{-\frac{\alpha s}{\varepsilon}} b_0(\tau,\varepsilon))^2] d\tau ds - \varepsilon^2 \vartheta_{tx}(t,x) - \varepsilon\alpha\vartheta_t(t,x), \quad \forall(t,x) \in D. \end{cases} \tag{3.1.17}$$

Лемма 3.1.3. Если для оператора H выполняются условия принципа Банаха:

$$\begin{cases} 2\lambda\alpha^{-2} C_0[r_0 + (2^{-1}\alpha^{-1}\varepsilon)^{\frac{1}{2}} m_1 \varepsilon^{\gamma} + r_1\alpha^{-2}] = L_H < 1, \\ H : S_{r_1}(0) \to S_{r_1}(0); \;\; \lambda < (2\alpha^{-2} C_0[r_0 + (2^{-1}\alpha^{-1})^{\frac{1}{2}} m_1 + r_1\alpha^{-2}])^{-1}, (0 < \varepsilon < 1), \\ \|\vartheta\|_C \le r_0; \quad \mathrm{C}_0 = \max(C_1, C_2); \;\; \xi_0 = 0; \; S_{r_1}(0) = \{\xi : |\xi| \le r_1, \forall(t,x) \in D\}, \end{cases} \tag{3.1.18}$$

то нелинейное ИУ (3.1.17) разрешимо в $C(D)$, причем

$$\begin{cases} \sup\limits_D |\Upsilon(\varepsilon,t,x)| \le \Delta_1(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \forall(t,x) \in D, \\ \|\xi(t,x)\|_C = (1-L_H)^{-1} \Delta_1(\varepsilon) = \Delta_2(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \end{cases} \tag{3.1.19}$$

Теорема 3.1.1. Если выполняются условия лемм 3.1.1-3.1.3, то СВЗ (3.1.1), (3.1.2) имеет единственное решение, в виде (3.1.10) и

$$\|u(t,x) - \vartheta(t,x)\|_{L_h^2} \le \sqrt{2}[2^{-1} a^{-1} \varepsilon \tilde{h}_0 (m_1 \varepsilon^{\gamma})^2 + \alpha^{-4} (\Delta_2(\varepsilon))^2 h_0 T]^{\frac{1}{2}} = N_0(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \tag{3.1.20}$$

В параграфе 3.2 изучено СВУ

$$\varepsilon^2 u_{tx}(t,x) + \varepsilon\alpha[u_t(t,x) + u_x(t,x) + \lambda u K u] + \alpha^2 u(t,x) = f(t,x), \qquad (3.2.1)$$

$$u(0,x) = \vartheta(0,x) + b_0(x,\varepsilon), \quad \forall x \in R, \qquad (3.2.2)$$

где содержится интегро-дифференциальный оператор вида

$$\begin{cases} Ku \equiv \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t,x,s,\tau) u_\tau(s,\tau) d\tau ds, ((t,x,s,\tau) \in D_1 = D \times D), \\ D = \{(t,x) : t \in [0,T], x \in R\}; \; 0 \le K(t,x,s,\tau) \le K_0, \forall (t,x,s,\tau) \in D_1, \\ (\sup\limits_D \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| K(t,x,s,\tau) \right|^2 d\tau ds)^{\frac{1}{2}} \le C_1; \sup\limits_D \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| K(t,x,s,\tau) \right| d\tau ds \le C_2, \; (C_0 = \max(C_1, C_2)), \end{cases}$$

причем требуется априорная информация:

$$\begin{cases} C^1(R) \ni b_0(x,\varepsilon) \not\to 0, \;\; \text{когда} \;\; \varepsilon \to 0, \forall x \in R, (| b_0(x,\varepsilon) | \le m_0, \forall x \in R), \\ \left\| b_0(x,\varepsilon) \right\|_{L^2(R)} = (\int\limits_R \left| b_0(\tau,\varepsilon) \right|^2 d\tau)^{\frac{1}{2}} \le m_1 \varepsilon^{\gamma}, (0 < \gamma < 1), \\ \left\| b_{0x}(x,\varepsilon) \right\|_{L^2(R)} = (\int\limits_R \left| b_{0\tau}(\tau,\varepsilon) \right|^2 d\tau)^{\frac{1}{2}} \le m_2 \varepsilon^{-\beta}, (0 < \beta < 1; \; 0 < m_i = const, i = 0,1,2). \end{cases} \qquad (3.2.3)$$

Здесь, относительно известных функций требуются: $0 < \alpha, \;\; (0,1) \ni \lambda = const$; $f(t,x)$ - заданная, ограниченная и гладкая функция в области D до требуемого порядка; $K(t,x,s,\tau) \in C^{1,1,0,0}(\mathrm{D}_1)$ – известная, ограниченная функция в области D_1, причем интегрируемая по (s,τ) в D.

В параграфе 3.3 исследована СВЗ с двумя малыми параметрами с условием Коши вида:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \varepsilon_2 u_{tx}(t,x) + \varepsilon_1 \beta u_t(t,x) + \varepsilon_2 \alpha u_x(t,x) + \alpha\beta u(t,x) = f(t,x) + \lambda K u, \\ Ku \equiv \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t,x,s,\tau)(u(s,\tau))^2 d\tau ds, \\ D = \{(t,x) : t \in [0,T], x \in R\}; \;\; (t,x,s,\tau) \in D_1 = D \times D, \end{cases} \qquad (3.3.1)$$

$$u(0,x) = \vartheta(0,x) + b_0(x,\varepsilon_1,\varepsilon_2), \forall x \in R, \qquad (3.3.2)$$

где в пространстве $L_h^2(D)$, требуется априорная информация вида

$$\begin{cases} b_0(x,\varepsilon_1,\varepsilon_2) \not\to 0, \;\; \text{когда} \;\; \varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0, \forall x \in R, \;\; (\left| b_0(x,\varepsilon_1,\varepsilon_2) \right| \le m_0 < \infty, \;\; \forall x \in R), \\ \left\| b_0(x,\varepsilon_1,\varepsilon_2) \right\|_{L^2(R)} = (\int\limits_R \left| b_0(\tau,\varepsilon_1,\varepsilon_2) \right|^2 d\tau)^{\frac{1}{2}} \le m_1 \varepsilon_2^{\gamma}, (0 < \gamma < 1; \; 0 < m_i = const; i = 0,1), \end{cases}$$

$0 < \alpha, \beta, \lambda = \mathrm{const}$, $\;f, K, b_0(x,\varepsilon_1,\varepsilon_2) \in C^1(R)$ – заданные, при этом $C^{1,1}(D) \ni f(t,x)$ – ограниченная функция в области D; $0 \le K(t,x,s,\tau) \in C^{1,1,0,0}(D_1)$ и интегрируемая функция по (s,τ) в D, причем

$$\begin{cases} (\sup\limits_D \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| K(t,x,s,\tau) \right|^2 d\tau ds)^{\frac{1}{2}} \le C_1, \; (K(t,x,s,\tau) \le K_0 = \mathrm{const}, \forall (t,x,s,\tau) \in D_1), \\ \sup\limits_D \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| K(t,x,s,\tau) \right| d\tau ds \le C_2, \;\; (\mathrm{C}_0 = \max(C_1, C_2), C_i = \mathrm{const}, \;\; i = 1,2). \end{cases}$$

Относительно этих задач получены результаты, аналогичные результатам параграфа 3.1.

ВЫВОДЫ

Доказана разрешимость ряда СВЗ и вырожденных задач, установлена близость между решениями этих задач в $L_h^2(D)$, когда малый параметр стремится к нулю. Для доказательства указанных вопросов разработан алгоритм, когда решение СВИДУ с условием Коши имеет представление асимптотического характера, где содержатся решение вырожденной задачи, функция типа погранслоя и линейный интегральный оператор с остаточной функцией. Относительно остаточной функции получено интегральное уравнение второго рода с доказательством разрешимости в пространстве непрерывных функций.

Результаты работы применены к СВИДУ с условием Коши. Построены примеры и проведенный анализ оценки разницы решений СВЗ и вырожденных задач в $L_h^2(D)$, в полном смысле отражают теоретические выводы, полученные в работе.

Кроме того, разработанный метод на основе функции типа погранслоя и линейного интегрального оператора с остаточной функцией, позволил построить решение асимптотического характера для нелинейных СВЗ с двумя малыми параметрами с условием Коши в неограниченной области.

Эти результаты развивают аналитико-асимптотическую теорию нелинейных СВЗ и могут быть использованы для решения задач более сложной структуры.

Список опубликованных работ по теме диссертации

1. Алиева А.Р. Задача Коши для сингулярно-возмущенного интегро-дифференциального уравнения второго порядка [Текст] / А.Р. Алиева // Вестник КНУ. – Бишкек, 2014, вып.5. - С.7-10.
2. Алиева А.Р. Решение сингулярно-возмущенной задачи Коши, когда малый параметр стремится к нулю [Текст] / А.Р. Алиева. // Вестник КРСУ, 2015. – Т.15, № 9. – С. 8-10.
3. Алиева А.Р. Решение нелинейного сингулярно-возмущенного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка с условием Коши [Текст] / А.Р. Алиева // Вестник КРСУ, 2016. -Т.16, № 9. – С. 3-6.
4. Алиева А.Р. Задача Коши для сингулярно-возмущенного интегро-дифференциального уравнения второго порядка с двумя малыми параметрами [Текст] / А.Р. Алиева. // Известия Вузов Кыргызстана. – Бишкек, 2017. - № 8. – С.
5. Алиева А. Р. К теории периодических решений нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Кортевега де Фриза [Текст] / М.И. Иманалиев, Т.М.

Иманалиев, А.Р. Алиева // Исследования по интегро–дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2006. – Вып. 34. – С. 5–10.
6. Алиева А. Р. К теории ограниченных и периодических решений дифференциальных уравнений в частных производных шестого порядка [Текст] / М.И. Иманалиев, Т.М. Иманалиев, А.Р. Алиева // Исследования по интегро–дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2007. – Вып. 36. – С. 12–19.
7. Алиева А. Р. К теории сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка [Текст] / М.И. Иманалиев, Т.М. Иманалиев, А.Р. Алиева //Исследования по интегро–дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2007. – Вып. 37. – С. 8–13.
8. Алиева А. Р. Задача Коши для сингулярно-возмущенного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка [Текст] / М.Т. Омуров, А.Р. Алиева // Научный журнал Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. - Астана, 2015. - 1 часть, № 6 (109). - С. 37-41.
9. Алиева А. Р. Задача Коши для сингулярно-возмущенного уравнения с интегро-дифференциальным оператором типа Кортевега-Де Фриза [Текст] / Т.Д. Омуров, М.Т. Омуров, А.Р. Алиева. // Известия НАН КР.– Бишкек: Илим, № 2, 2015. - С.11-19.
10. Алиева А. Р. Задача Коши для нелинейного сингулярно-возмущенного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка в неограниченной области [Текст] / Т.Д. Омуров, А.Р. Алиева // Приволжский Научный Вестник. - Ижевск, 2016. № 12-1 (64). С. 36–43.
11. Алиева А. Р. Задача Коши для сингулярно-возмущенного интегро-дифференциального уравнения с двумя малыми параметрами [Текст] / Т.Д. Омуров, А.Р. Алиева. // Проблемы современной науки и образования. - Иваново (Россия), № 9 (91), 2017. - С 17-25.

Алиева Айнур Рабатовнанын «Кошинин шарттары менен жекече туундулуу сингулярдык козголгон интегралдык дифференциалдык теңдемелери» аттуу 01.01.02 - дифференциалдык тендемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математикалык илимдердин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациясынын

Резюмеси

Урунттуу сөздөр: сингулярдык козголгон теңдеме, кубулган маселе, Коши маселеси, чектелбеген аймак, чек катмар функциясы, салмактуу мейкиндик, жекече туунду.

Изилдөөнүн обьектиси: кирүү маалыматтары жөнүндө алдын ала билдирүүсү менен чектелбеген аймагында бир жана эки кичи параметри менен сингулярдык козголгон маселе.

Иштин максаты: Чектелбеген аймагында Кошинин шарттары менен жекече туундулуу сингулярдык козголгон интегро-дифференциалдык теңдемелерди изилдөө. Салмак менен квадратча интегралдануучу функциялардын мейкиндигинде сингулярдык козголгон жана кубулган маселенин чыгарылыштарынын жакындыгын далилдөө.

Изилдөөнүн усулу: Изилдөөнүн негизги усулу кубулган маселелер теориясында – экинчи тартиптеги интегралдык теңдемелер теориясы, Банахтын принциби жана Пикардын усулу; сингулярдык козголгон маселелер теориясында – сингулярдык козголгон маселеси үчүн асимптотикалык мүнөздөгү берүү, интегралдык кайра өзгөртүү усулу, функционалдык жана математикалык анализдин элементтери болуп саналат.

Илимий жаңылык: Иштелип чыккан усулдун негизинде, чек катмар функция менен калдык функциясы менен сызыктуу интегралдык операторду колдонуп, Бенжамин-Бона-Махони тибиндеги сингулярдык козголгон маселенин чыгарылышы алынды жана айтылган мейкиндикте ал маселенин жана жана кубулган маселенин чыгарылыштарынын жакындыгы далилденди. Бенжамин-Бона-Махони тибиндеги сингулярдык козголгон маселелердин теориясы Кошинин шарттары менен сингулярдык козголгон интегро-дифференциалдык, гиперболалык типтеги бир жана эки кичи параметри менен теңдемелерге модификацияланды.

Колдонуу чөйрөсү: Диссертация теориялык мүнөзгө ээ жана анын жыйынтыктары Ж. Баласагын атындагы КУУ Математика, информатика жана кибернетика факультетинин окутуу процессинде колдонулат, аспиранттар, докторанттар жана ушул аймактагы адистер дагы колдонушу мүмкүн.

РЕЗЮМЕ

диссертационной работы Алиевой Айнур Рабатовны на тему «Сингулярно-возмущенные интегро-дифференциальные уравнения в частных производных с условиями Коши», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: сингулярно-возмущенные уравнения, вырожденная задача, задача Коши, неограниченная область, погранслойная функция, весовое пространство, частные производные.

Обьект исследования: сингулярно-возмущенные задачи в неограниченной области с одним и с двумя малыми параметрами с априорной информацией о входных данных.

Цель работы: исследование нелинейных сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных в неограниченной области с условием Коши. Доказательство близости решений сингулярно-возмущенных и вырожденных задач в пространстве квадратично интегрируемых функций с весом.

Методика исследования. Основными методами исследования являются: в области теории вырожденных задач – теория интегральных уравнений второго рода, принцип Банаха и метод Пикара; в области теории сингулярно-возмущенных задач – представление асимптотического характера для решения, методы интегральных преобразований, элементы функционального и математического анализа.

Научная новизна: на основе разработанного метода, где содержится функция типа погранслоя и линейный интегральный оператор с остаточной функцией, получено решение сингулярно-возмущенной задачи типа Бенджамина-Бона-Махони, и доказана близость решений этой и вырожденной задачи в указанном пространстве. Разработанная теория сингулярно-возмущенных задач типа Бенджамина-Бона-Махони модифицирована к сингулярно-возмущенным интегро-дифференциальным уравнениям гиперболического типа с условием Коши с одним и с двумя малыми параметрами.

Степень использования: диссертация носит теоретический характер, и ее результаты используются в учебном процессе факультета Математики, информатики и кибернетики КНУ им. Ж. Баласагына, также могут быть использованы аспирантами, докторантами и специалистами в этой области.

SUMMARY

Alieva Ainur Rabatovna

Dissertation “Singularly perturbed partial integro-differential equations with Cauchy conditions” submitted for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences on specialty 01.01.02 - differential equations, dynamical systems and optimal control

Key words: singularly perturbed equation, degenerate task, Cauchy problem, unbounded domain, boundary layer function, weighted space, partial derivative

Object of research: Singularly perturbed problems in an unbounded domain with one and two small parameters with a priori information on input data.

Aim of research: Investigation of partial integro-differential equations in an unbounded domain with Cauchy condition. Proof of proximity of solutions of singularly perturbed problems and degenerate ones in the space of quadratic integrable functions with weight.

Methods of research: The main methods of research are the theory of integral equations of the second kind, Banach principle and Picard method in the theory of generate equations; asymptotical presentations of solutions, methods of integral transforms, elements of functional and mathematical analysis in the theory of singularly perturbed problems.

Scientific novelty: On the base of developed method containing a function of boundary layer type and a linear integral operator with residual function, a solution of a singularly perturbed problem of Benjamin-Bona-Mahony type is obtained and proximity of solutions of this one and degenerate one in the mentioned space is proven. The developed theory of singularly perturbed problems of Benjamin-Bona-Mahony types is modified for singularly perturbed integro-differential equations of hyperbolic type with Cauchy condition with one and two small parameters.

Rate of using: the dissertation is of theoretical meaning, its results are used in educational process at the faculty of Mathematics, informatics and cybernetics of the Kyrgyz National University named after J.Balasagyn and can be used by graduate students, post graduate students and specialists in this area.