НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Ж. БАЛАСАГЫНА

Диссертационный совет Д 01.17.560

На правах рукописи

УДК 517.928

Абдылдаева Асель Рыскулбековна

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук

Бишкек – 2019

Работа выполнена в Кыргызском государственном техническом университете им. И.Раззакова

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Саадабаев А.** КНУ им.Ж.Баласагына.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Искандаров С.** Институт математики НАН КР, кандидат физико-математических наук, доцент **Курманбаева А.К.,** КРСУ им.Б.Ельцина.
Ведущая организация:	Казахский национальный аграрный университет, кафедра «Высшая математика», 050010 Республика Казахстан, г. Алматы, проспект Абая 8

Защита диссертации состоится «5» марта 2019 г. в 16^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.17.560 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико–математических наук при Институте Математики НАН Кыргызской Республики и Кыргызском Национальном университете им. Ж.Баласагына по адресу: Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а, аудитория 374.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН КР, Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а и на сайте ИМ НАН КР www.math.aknet.kg, на сайте КНУ им.Ж.Баласагына www.nauka.knu.kg

Автореферат опубликован “__” _________ 2019 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
д.ф.-м.н., профессор Байзаков А.Б.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации.

В двадцатых годах XX века французским математиком Адамаром дано определение корректности математической задачи.

Многие математические задачи приводятся к определению неизвестного элемента z операторного уравнения

$$Az=u, \qquad (0.1)$$

где A - непрерывный оператор, действующий из метрического пространства Z в метрическое пространство U.

Задача определения решения уравнения (0.1) называется корректной по Адамару на паре пространств (Z,U), если:

1) для любого элемента $u \in U$ существует элемент $z \in Z$ такой, что $\mathrm{A}z \equiv u$.
2) элемент z является единственным.
3) для любого числа ε, существует число $\delta(\varepsilon)$ такое, что для любых элементов $u_1, u_2 \in U, \rho(u_1, u_2) < \delta$ следует $\rho(z_1, z_2) < \varepsilon$, где $u_1 \equiv \mathrm{A}z_1$, $u_2 \equiv \mathrm{A}z_2$.

Если нарушается одно из условий корректности по Адамару, то задача называется некорректной.

Долгое время считалось, что некорректные задачи лишены физического содержания и не имеют практического значения. На важность некорректно поставленных задач обратил внимание А.Н. Тихонов. В 50-х годах исследованиям некорректных задач математической физики посвящены работы М.М. Лаврентьева. В 60-х годах в работе В.К. Иванова введены понятие квазирешения и приближенные методы его нахождения. Дано определение условной корректности или корректности по Тихонову решения задачи (0.1).

Впервые, когда правая часть уравнения (0.1) не принадлежит образу множества корректности, приближенное решение построил М.М.Лаврентьев. Оно построено как решение операторного уравнения второго рода с малым параметром. Общий метод приближенного решения уравнения (0.1), устойчивым относительно исходных данных, построен в работах А.Н.Тихонова. Дано определение фундаментального понятия регуляризирующего оператора и способы его построения.

Оператор R_α $U \to Z$ называется регуляризирующим оператором для решения уравнения (0,1) если выполняется следующие условия:

1. оператор R_α определим для любого $u \in U$

2. для любого $z \in Z$ выполнено соотношение $\lim\limits_{\alpha \to 0} R_\alpha \mathrm{A}_z = Z$ по норме пространства Z .

Нахождение регуляризирующего оператора R_α называется устойчивым методом для решения уравнения (0.1).

В дальнейшем в работах М.М.Лаврентьева, В.К.Иванова, А.Б.Бакушинского, М.И.Иманалиева, А.С.Саадабаева и других исследователей были изучены линейные некорректные уравнения и некоторые нелинейные операторные уравнения.

В данной диссертационной работе построен конечномерный регуляризирующий оператор.

Специфика построения конечномерных регуляризирующих операторов для некорректных нелинейных интегральных уравнений ранее не рассматривалась. Поэтому поставленная задача – нахождение более широких условий для конечномерного регуляризирующего оператора для интегральных и операторных уравнений, при которых возможна регуляризация – является актуальной.

<u>Связь темы диссертации с основными научно-исследовательскими работами, проводимыми научными учреждениями.</u>

Исследование по теме диссертации проводилось в рамках утвержденной тематики «Конечномерные методы решения нелинейных некорректных задач» кафедры прикладной математики и информатики КГТУ им. И.Раззакова.

<u>Цель и задачи исследования.</u>

Целью данной работы является построение конечномерного регуляризирующего оператора для решения линейных, нелинейных интегральных и операторных уравнений первого рода.

Задачи исследования:

- построить конечномерный регуляризирующий оператор для решения линейных, нелинейных интегральных и операторных уравнений первого рода.

- получить оценки устойчивости и скорости сходимости приближенного решения к точному решению в пространствах непрерывных функций и квадратично суммируемых функций;
- найти достаточные условия для возможности регуляризации нелинейных интегральных уравнений первого рода общего вида.

Научная новизна работы.

Впервые построен конечномерный регуляризирующий оператор для решения нелинейного интегрального и операторного уравнения первого рода в пространствах непрерывных и квадратно суммируемых функций. Установлена сходимость и найдена оценка скорости сходимости приближенных решений к точному решению. Установлено, что достаточным условием регуляризуемости для гладкого ядра нелинейного интегрального уравнения первого рода является «двойная истокообразность» свободного члена уравнения.

Практическая значимость полученных результатов.

Данная работа имеет теоретическую направленность. Полученные результаты можно использовать для построения приближенного решения обратных задач математической физики, для аппроксимации дифференциальных операторов интегральными операторами с помощью функции Грина в вычислительной математике, а также для чтения спецкурсов для студентов математических факультетов.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

- Построены конечномерные регуляризирующие операторы для решения линейного и нелинейного интегрального уравнения первого рода в пространствах непрерывных и квадратично суммируемых функций, а также для нелинейного операторного уравнения первого рода;
- Доказана сходимость приближенного решения к точному решению в нормах соответствующих пространств;
- Получен выбор параметра регуляризации в зависимости от параметра n;
- Получена оценка скорости сходимости приближенного решения к точному решению;
- Найдено достаточное условие регуляризуемости для ядра нелинейного интегрального уравнения первого рода общего вида.

Личный вклад соискателя

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-2] и [4-7]. В совместной статье [1] постановка задачи и обсуждение результатов принадлежат научному руководителю, в совместной статье [2] постановка задачи принадлежит научному руководителю, обсуждение результатов – соавтору, во всех статьях - доказательство теорем, следствий и построение примеров – автору.

Апробация результатов диссертации.

Результаты работы докладывались:

- на V Международной научной конференции "Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике", посвященной 85-летию академика НАН КР и члена-корреспондента РАН М.И. Иманалиева (Бишкек, 2016);
- на расширенном заседании кафедры «Прикладная математика и информатика» КГТУ им. И. Раззакова (Бишкек, 2018) [3];
- на научном семинаре академика А.А. Борубаева в Институте математики НАН КР (Бишкек, 2018).

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-2] и [4-7]. В совместной статье [1] построен конечномерный регуляризирующий оператор для решения операторного уравнения первого рода, в статье [2] построен конечномерный регуляризирующий оператор для решения линейного вполне непрерывного операторного уравнения первого рода в гильбертовом пространстве. В статье [6] изучена конечномерная аппроксимация нелинейного операторного уравнения с приближенно заданной правой частью, в статье [7] построен конечномерный регуляризирующий оператор для решения интегрального уравнения первого рода в пространстве непрерывных функций. В единоличной статье [5] изучена конечномерная аппроксимация нелинейного операторного уравнения с вполне непрерывной линейной частью. Во всех статьях - доказательство теорем, следствий и построение примеров – принадлежат автору.

Методика исследования.

Используются методы теории интегральных уравнений, спектральной теории линейных операторов в пространстве непрерывных функций и в пространстве квадратично суммируемых функций, а также общие результаты нелинейного функционального анализа в банаховых и гильбертовых пространствах, в том числе принципы неподвижной точки Банаха и Шаудера, методы математического анализа, включая формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, вычислительные методы.

Структура и объем диссертации:

Диссертационная работа содержит из перечня условных обозначений, введения, трех глав, разбитых на параграфы, и списка использованных источников из 66 наименований. Нумерация определений, лемм, теорем – тройная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер раздела, третья – на порядковый номер в разделе. Объем 137 страниц.

Краткое содержание работы.

В первой главе приведены обзор работ, примыкающих к данной работе, и дополнительные результаты, используемые в работе.

Во второй главе исследуется конечномерная аппроксимация решения нелинейного операторного уравнения с непрерывной положительной линейной частью.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть: 1) A – линейный непрерывный положительный самосопряженный оператор, 2) оператор K_n представим в виде $K_n = AK_1 + \beta(n)K_2$, где K_1, K_2 - нелинейные операторы, определенные в H и удовлетворяющие условию Липшица, причем постоянная Липшица для оператора K_1, $N<1$; 3) параметр $\alpha(n)$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\beta(n)}{\alpha(n)}=0$.

Тогда существует такое N_0, что при любом $n > N_0$ и любом $u \in H$ уравнение

$$\alpha z + Az = u + K_n z \qquad (0.2)$$

имеет единственное решение $z_\alpha^n \in H$.

Теорема 2. Пусть: 1) выполнены все условия теоремы 1, 2) при $u = u_0$ уравнение

$$Az = u + K(z) \qquad (0.3)$$

имеет единственное решение $z_0 \in H$, представимое в виде $z_0 = A\vartheta_0, \vartheta_0 \in H$; 3) параметр $\alpha(n)$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha(n) = 0$.

Тогда решение $z_{\alpha,0}^n$ уравнения (0.2) при $u = u_0$ и $n \to \infty$ сходится к точному решению z_0 уравнения (0.3).

Для скорости сходимости справедлива оценка

$$\left\|z_{\alpha,0}^n - z_0\right\| \le \frac{N_0}{1-\frac{\beta(n)}{\alpha}Q_0}\cdot\frac{\beta(n)}{\alpha} + \frac{K_0}{1-\frac{\beta(n)}{\alpha}Q_0}\left(\frac{\beta(n)}{\alpha}\right)^2 + P_0\frac{\beta(n)}{\alpha} + \frac{\|\vartheta_0\|}{1-N}\alpha .$$

Теорема 3. Пусть: 1) выполнены условия 1) и 2) теоремы 2, 2) элемент u_δ удовлетворяет неравенству $\|u_0 - u_\delta\| \le \delta$ (0.4), 3) параметр α выбран по формуле $\alpha(\delta,\beta(n)) = \frac{1}{\sqrt{C_2}}\left(C_0\delta + C_1\beta(n)\right)^{1/2}$.

Тогда решение $z_{\alpha,\delta}^n$ уравнения (0.2) при $u = u_\delta$ сходится при $\delta \to 0, \quad n \to \infty$ к точному решению z_0 уравнения (0.3).

Скорость сходимости удовлетворяет неравенству $\left\|z_{\alpha,\delta}^n - z_0\right\| \le 2\sqrt{C_2}\left(C_0\delta + C_1\beta(n)\right)^{1/2}$.

Теорема4. Пусть выполняются следующие условия:1) уравнение $\int\limits_0^1 K(\mathrm{t},\mathrm{s})\,\mathrm{z}(\mathrm{s})\,\mathrm{ds} = u(\mathrm{t}), \quad \mathrm{t} \in [0,1]$ (0.5) имеет единственное решение; 2) ядро $K(\mathrm{t},\mathrm{s})$ непрерывно в квадрате $0 \le t, s \le 1$ и симметрично; 3) оператор K, $0 < \theta < 1$, действует из пространства $L_2(0,1)$ в $C(0,1)$; 4) ядро $K_n(\mathrm{t},\mathrm{s})$ удовлетворяет неравенству $\|Kz - K_n z\|_{C(0,1)} \le \frac{M}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}\|z\|_{C(0,1)}$.

Тогда, при $\alpha = \frac{1}{\lambda_{n+1}^{1/6}}$ и при любом заданном $u(\mathrm{t}) \in \mathrm{C}(0,1)$ решение уравнения $\alpha z_\alpha^n + K_n z_\alpha^n = u$ существует и для любого решения уравнения (0.5), представимого в виде $z = K\vartheta$, справедливо предельное соотношение $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\alpha(n)E + K_n\right)^{-1}Kz = z(\mathrm{t})$ равномерно по t, причем справедлива оценка

$$\left\|\left(\alpha E + K_n\right)^{-1}K^2\vartheta - K\vartheta\right\|_{C(0,1)} \le \left(\frac{M}{\lambda_{n+1}}\right)^{\frac{1-\theta}{3-\theta}} C_4\left(C_0^*, C_3, p, \|\vartheta\|_{L_2(0,1)}\right).$$

Теорема 5. Пусть: 1) ядро $K(t,s)$ таково, что функция $B(t)=\left(\int\limits_0^1 K^2(s,t)\,ds\right)^{1/2}$ является непрерывной функцией на сегменте $[0,1]$; 2) при $u=u_0(t)$ уравнение

$$Kz\equiv\int\limits_0^1 K(t,s)z(s)ds=u(t),\quad t\in[0,1],\ (0.6)$$

имеет единственное непрерывное решение, представимое в виде $z_0(t)=\left(K^*K\right)^{\frac{1+\sigma}{2}}\vartheta_0,\quad 0<\sigma<1$.

Тогда уравнение

$$\alpha z+K^*Kz=K^*u$$

при $\alpha>0$ разрешимо для любого $u(t)\in L_2(0,1)$ и решение этого уравнения при $u=u_0$ и $\alpha\to 0$ стремится к точному решению уравнения (0.6) по норме пространства $C(0,1)$, причем справедливо неравенство $\left\|z_\alpha^0(t)-z_0(t)\right\|_{C[0,1]}\le M_1\alpha^{\frac{\sigma}{2}}$.

Теорема 6. Пусть: 1) выполняются все условия теоремы 5, 2) элемент $u_\delta(t)$ удовлетворяет неравенству $\left\|u_\delta(t)-u_0(t)\right\|_{C(0,1)}\le\delta$, 3) параметр α удовлетворяет соотношению $\alpha(\delta)=\delta^{\frac{2}{\sigma+2}}\left(\frac{2M\left\|\vartheta_0\right\|}{\sigma M_1}\right)^{\frac{2}{\sigma+2}}$.

Тогда решение $z_{\alpha(\delta)}^\delta$ уравнения

$$\alpha z+K^*Kz=K^*u \tag{0.7}$$

при $u=u_\delta(t)$ при $\delta\to 0$ сходится к точному решению уравнения (0.6). Скорость сходимости удовлетворяет неравенству

$$\left\|z_\alpha^\delta(t)-z_0(t)\right\|_{C(0,1)}\le M_2\delta^{\frac{\sigma}{\sigma+2}}.$$

Теорема 7. Пусть: 1) выполнены условия 1) и 2) теоремы 6, 2) $K_n(t,s)$ непрерывная функция в квадрате $0\le t,s\le 1$ и удовлетворяет неравенству

$\|K_n(t,s)-K(t,s)\|_{C([0,1]\times[0,1])}\le\beta(n)$, 3) параметр α удовлетворяет условию $\alpha(\delta)=\left(\dfrac{4}{M_1\sigma}\right)^{\frac{2}{4+\sigma}}\left(K\delta+q_2\beta(n)\right)^{\frac{2}{4+\sigma}}$.

Тогда решение $z^n_{\alpha,\delta}(t)$ уравнения (0.7) при $u(t)=u_\delta(t)$ сходится к решению $z_0(t)$ уравнения (0.6) при $\delta\to 0, n\to\infty$ по норме пространства непрерывных функций.

Скорость сходимости удовлетворяет неравенству $\|z^n_{\alpha,\delta}(t)-z_0(t)\|_{C[0,1]}\le M_1\left(1+\dfrac{\sigma}{4}\right)\left(\dfrac{4}{M_1\sigma}\right)^{\frac{\sigma}{4+\sigma}}\left(K\delta+q_2\beta(n)\right)^{\frac{\sigma}{\sigma+4}}$.

В третьей главе рассмотрено нелинейное интегральное уравнение первого рода вида

$$\int_0^1 K(t,s)z(s)ds=u(t)+\int_0^1 K_1(t,s)M\left(s,z(s)\right)ds \qquad (0.8),$$

где $K(t,s)$- симметричная, положительно определенная, непрерывная в квадрате $0\le t,s\le 1$ функция, $M(s,z)$- функция непрерывная по s и удовлетворяет условию Липшица в области $0\le s\le 1$, $-\infty<z<\infty$, $K_1(t,s)$- некоторая непрерывная функция, зависящая от $K(t,s)$.

Теорема 8. Пусть: 1) ядро $K(t,s)$ является симметричным, положительно определенным и непрерывным в квадрате $0\le t,s\le 1$; 2) непрерывная функция $K_1(t,s)$ представима в виде

$$K_1(t,s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(t)\varphi_k(s)}{\mu_k^{3/2}},$$

где $\{\varphi_k(t)\}$- ортонормированные собственные функции ядра $K(t,s)$, соответствующие характеристическим значениям $\{\mu_k\}$; 3) функция $M(v,z)$ удовлетворяет условию Липшица по z в области $0\le v\le 1$, $-\infty<z<\infty$, т.е.

$$|M(v,z_2)-M(v,z_1)|\le N|z_2-z_1|;$$

4) постоянная $q\equiv K_0N<1$, где $K_0=\max\limits_{0\le t,s\le 1}|K(t,s)|$, 5) $u(t)$- заданная непрерывная функция.

Тогда уравнение

$$\alpha z + \int_0^1 K(t,s) z(s) ds = u(t) + \int_0^1 K_1(t,s) M\left(s, z(s)\right) ds \qquad (0.9)$$

имеет единственное непрерывное решение $z_\alpha(t)$.

Для $z_\alpha(t)$ справедлива оценка

$$\left|z_\alpha(t)\right| \le \frac{1}{1-q}\left\|\overline{z}_0(t)\right\|_{C(0,1)} + K_0 M_0 \frac{1}{1-q}.$$

Теорема 9. Пусть 1) выполнены все условия теоремы 8; 2) при $u = u_0(t)$ уравнение (0.8) имеет единственное непрерывное решение $z_0(t)$, представимое в виде $z_0 = \int_0^1 K(t,s)\vartheta_0(s)ds, \quad \vartheta_0(s) \in l_2(0,1)$.

Тогда уравнение (0.9) при $u = u_0(t)$ имеет единственное решение $z_\alpha^0(t) \in C(0,1)$ и $z_\alpha^0(t) \to z_0(t)$ при $\alpha \to 0$ в пространстве $C(0,1)$.

Для скорости сходимости справедлива оценка

$$\left\|z_\alpha^0(t) - z_0(t)\right\|_{C(0,1)} \le \frac{K_0 \left\|\vartheta_0\right\|_{L_2(0,1)}}{1-q}\sqrt{\alpha}.$$

Теорема 10. Пусть: 1) выполнены все условия теоремы 8; 2) функции $K_n(t,s)$ и $K_{1n}(t,s)$ удовлетворяют неравенствам

$$\left\|K(t,s) - K_n(t,s)\right\|_{C((0,1)\times(0,1))} \le C_1\beta(n) \text{ и } \left\|K_1(t,s) - K_{1n}(t,s)\right\| \le C_2\beta(n);$$

3) параметр α удовлетворяет условиям $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\beta(n)}{\left(\alpha\left(\beta(n)\right)\right)^{3/2}} = 0$,

$q_1 \equiv \dfrac{\beta(n) K_2}{\left(\alpha\left(\beta(n)\right)\right)^{3/2}} < 1, \quad \beta(n) < \beta_0(n)$.

Тогда уравнение

$$\alpha z + \int_0^1 K(t,s) z(s) ds = f\left(t\right) \qquad (0.10)$$

при любом $u(t) \in C(0,1)$ имеет единственное решение $z_\alpha^n(t)$, представимое в виде

$$z_\alpha^n(t) = D_\alpha g_\alpha^{\beta(n)}\left(t\right).$$

Теорема 11. Пусть: 1) выполнены условия 1) и 2) теоремы 10; 2) параметр α удовлетворяет условию $\alpha(\beta(n)) = \left(\frac{3K_4}{K_5}\right)^{1/2} \beta(n)^{1/2}$, 3) параметр $\beta(n)$ удовлетворяет неравенству $\beta(n) < \left(\frac{3K_4}{K_5}\right)^{1/8} K_2^{-1/4} \equiv \beta_0^0(n)$.

Тогда решение $z_{\alpha,0}^n(t)$ уравнения (0.10) при $u = u_0(t)$ и при $n \to \infty$ сходится к точному решению уравнения (0.8).

Скорость сходимости удовлетворяет неравенству

$$\left\| z_\alpha^n(t) - z_0(t) \right\|_{C(0,1)} \le \beta(n)^{1/4} \left(\frac{3K_4}{K_5}\right)^{1/4} \frac{4K_5}{3}.$$

Теорема 12. Пусть: 1) выполняются все условия теоремы 11; 2) функция $u_\delta(t)$ удовлетворяет неравенству $\left\| u_\delta(t) - u_0(t) \right\|_{C(0,1)} \le \delta$; 3) параметр α выбран по закону $\alpha(\delta, \beta(n)) = \left(\frac{3}{K_5}\right)^{1/2} (\delta K_6 + hK_4)^{1/2}$.

Тогда решение $z_{\alpha,\delta}^n(t)$ при $u(t) = u_\delta(t)$ и при $\delta \to 0, n \to \infty$ сходится к точному решению уравнения (0.8).

Скорость сходимости удовлетворяет неравенству

$$\left\| z_{\alpha,\delta}^n(t) - z_0(t) \right\|_{C(0,1)} \le 4\left(\delta K_6 + \beta(n) K_4\right)^{1/4} \left(\frac{K_5}{3}\right)^{3/4}.$$

Рассмотрен пример уравнения с ядром - функцией Грина

$K(x,s) = \begin{cases} x(1-s), & 0 \le x \le s, \\ (1-x)s, & s \le x \le 1, \end{cases}$ доказана

Теорема 13. Если функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условию $f(0) = f(1) = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f''(x) + n^{3.5} f(x) - 2\sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \frac{\sin \pi js}{1+n^{-3.5} j^2} f(s)ds \, \sin \pi jx \right\|_{C[0,1]} = 0.$$

Автор выражает глубокую признательность и благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Саадабаеву Аскербеку Саадабаевичу за постановку задач, постоянное внимание к работе и обсуждение результатов.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1. Абдылдаева А.Р. Построение конечномерного регуляризирующего оператора для решения операторного уравнения первого рода [Текст] / А.С.Саадабаев, А.Р. Абдылдаева //Проблемы современной науки и образования. № 14(56), Москва. – 2016. - С.7-10.
2. Абдылдаева А.Р. Построение конечномерного регуляризирующего оператора для решения линейного вполне непрерывного операторного уравнения первого рода в гильбертовом пространстве [Текст] / А.С.Саадабаев, А.Р. Абдылдаева //Известия КГТУ им. И. Раззакова. № 1 (37) Бишкек. – 2016.-С. 101-105.
3. Abdyldaeva A. Building a finite-dimensional regularizing operator for solving of operator equations of first kind [Текст] / A.Saadabaev, A. Abdyldaeva // Abstracts of the V International Scientific Conference "Asymptotical, Topological and Computer Methods in Mathematics" devoted to the 85 anniversary of Academician M. Imanaliev. Bishkek-Bozteri. - 2016. – C.26.
4. Абдылдаева А.Р. Конечномерный регуляризирующий оператор для решения нелинейного операторного уравнения 1 рода в гильбертовом пространстве [Текст] / А.С.Саадабаев А.Р. Абдылдаева // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. № 11 часть 1. - Москва.– 2016. - С.41-43.
5. Абдылдаева А.Р. Конечномерная аппроксимация нелинейного операторного уравнения с вполне непрерывной линейной частью [Текст] / А.Р. Абдылдаева //Известия КГТУ им. И. Раззакова. № 2 (42). – 2017.-С. 56-61.
6. Абдылдаева А.Р. Конечномерная аппроксимация нелинейного операторного уравнения с приближенно заданной правой частью [Текст] / А.С.Саадабаев, А.Р. Абдылдаева //Вестник КГУСТА им. Н.Исанова. № 4 (58). – 2017. - С. 148-151.
7. Абдылдаева А.Р. Построение конечномерного регуляризующего оператора для решения интегрального уравнения первого рода в пространстве непрерывных функций [Текст] / А.С.Саадабаев, А.Р. Абдылдаева //Вестник КРСУ. Том 18 № 8.– 2016.-С.22-25.

Резюме

Абдылдаева Асель Рыскулбековна

«Сызыктуу эмес корректтүү эмес маселени чектүү ченемдүү ыкмасы менен чыгаруу» темасы боюнча, 01.01.02 –дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу деген адистик боюнча физика-математикалык илимдердин кандидаты окумуштуулук даражасын алуу үчүн диссертация сунушталган

Негизги сөздөр: Регуляризациялоо, чектүү ченемдүү регуляризациялоочу оператор, биринчи түрүндөгү интегралдык теңдеме, оператордук теңдеме, корректүү эмес маселе.

Изилдөөнүн объектиси: Биринчи түрүндөгү интегралдык жана оператордук теңдемелер.

Изилдөөнүн предмети: Биринчи түрүндөгү сызыктуу жана сызыктуу эмес оператордук теңдемелердин чыгарылышы үчүн чектүү ченемдүү регуляризациялоочу операторду түзүү.

Иштин максаты: Үзгүлтүксүз функциялар мейкиндигинде биринчи түрүндөгү, сызыктуу эмес интегралдык жана оператордук теңдемени чыгаруу үчүн чектүү ченемдүү регуляризациялоочу операторлорду түзүү. Ошондой эле Гильберт мейкиндигинде сызыктуу эмес оператордук теңдемени чыгаруу үчүн М.М.Лаврентьевдин ыкмасы менен чектүү ченемдүү регуляризациялоочу операторду түзүү.

Изилдөөнүн методикасы: Бул иште регуляризациялоочу операторлорду түзүүгө М.М.Лаврентьевдин ыкмасы, сызыктуу эмес интегралдык жана оператордук теңдемени функционалдык анализ ыкмасы колдонулат.

Илимий жаңылыктар: Үзгүлтүксүз функциялар жана экинчи даражадагы суммалануучу мейкиндигинде биринчи түрүндөгү, сызыктуу эмес интегралдык жана оператордук теңдемени чыгаруу үчүн чектүү ченемдүү регуляризациялоочу оператору түзүлгөн.

Жакындаштырылган чыгарылыштын так чыгарылышка жыйналуучулугу табылган жана жыйналуучулуктун ылдамдыгы аныкталган. Регуляризация параметринин n-номеринен көз карандылыгы далилденген.

РЕЗЮМЕ

Абдылдаева Асель Рыскулбековна

диссертация «Конечномерные методы решения нелинейных некорректных задач» представлена на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.01.02 - - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: Регуляризация, конечномерный регуляризирующий оператор, интегральное уравнение первого рода, нелинейное интегральное уравнение, операторные уравнения, некорректная задача.

Объект исследования: интегральные и операторные уравнения первого рода.

Предмет исследования: построение конечномерного регуляризирующего оператора для решения линейного и нелинейного операторного уравнения первого рода.

Цель работы: Построение конечномерного регуляризирующего оператора методом М.М. Лаврентьева для решения нелинейных операторных уравнений в гильбертовом пространстве и для линейных, нелинейных интегральных уравнений первого рода в пространстве непрерывных функций.

Методика исследования: в работе применяются методы теории некорректных задач, метод Лаврентьева для построения регуляризирующего оператора, методы функционального анализа для нелинейных уравнений, теория интегральных уравнений, теории линейных операторов.

Научная новизна: Построен конечномерный регуляризирующий оператор для решения нелинейных интегральных и операторных уравнений первого рода в пространствах непрерывных и квадратно суммируемых функций. Установлена сходимость и найдена оценка скорости сходимости приближенных решений к точному решению. Доказан выбор параметра регуляризации от номера n.

SUMMARY

Abdyldaeva Asel Ryskulbekovna

Dissertation “Finite-dimensional methods for solving non-linear ill-posed problems” submitted for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences on specialty 01.01.02 - differential equations, dynamical systems and optimal control

Key words: regularizing, finite dimensional regularizing operator, integral equation of the first kind, non-linear integral equation, operator equation, ill-posed problem.

Object of research: integral and operator equations of the first kind.

Subject of the study: construction of a finite-dimensional regularizing operator for solving a linear and non-linear operator equation of the first kind.

Aim of research: Construction of a finite-dimensional regularizing operator for solving nonlinear operator equations in a Hilbert space and for linear, nonlinear integral equations of the first kind in the space of continuous functions by the method of M.M. Lavrent'ev.

Methods of research: methods of the theory of ill-posed problems, the Lavrent'ev method for constructing a regularizing operator, methods of functional analysis for nonlinear equations, the theory of integral equations, and the theory of linear operators are used in the work.

Scientific novelty: A finite-dimensional regularizing operator is constructed for solving nonlinear integral and operator equations of the first kind in spaces of continuous and square-summable functions. Convergence is established and an estimate of the rate of convergence of approximate solutions to the exact solution is found. The choice of the regularization parameter from the number n is proved.

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И ОПРЕДЕЛЕНИЙ

$x \in A$ - означает принадлежность элемента x множеству A.

$x \notin A$ - означает непринадлежность элемента x множеству A.

$\exists$ - квантор существования.

$\forall$ - квантор общности.

$\Rightarrow$ - обозначает логическое следование.

$\{x \in A : Q(x)\}$ - обозначает множество элементов x множества A, удовлетворяющих логическому условию «$Q(x)$».

$\rho(\cdot,\cdot)$ - обозначает метрику в метрическом пространстве.

$\|\cdot\|$ - обозначает норму в нормированном пространстве.

$\langle \cdot,\cdot \rangle$ - обозначает скалярное произведение в гильбертовом пространстве.

N - обозначает множество натуральных чисел.

$R = (-\infty,+\infty)$ - обозначает действительную прямую.

$R_+ = [0,+\infty)$ - обозначает множество неотрицательных вещественных чисел.

$R_{++} = (0,+\infty)$ - обозначает множество положительных вещественных чисел.

$f : Z \to U$ - означает функцию, действующую из множества Z в множество U. Если Z и U - множества функций, то вводится термин «оператор». Иногда используются следующие термины: «отображение Z в U», «преобразование Z в U». Иногда для операторов вместо записи $f(x)$ используется запись fx.

$f(Z_1) = \{f(z) : z \in Z_1\}$ - означает образ множества $Z_1 \subset Z$ при преобразовании f. Элементы образов множеств при действии исследуемых операторов называются истокообразно представимыми.

Функция f называется сюръективной, если выполняется условие $f(Z) = U$, и инъективной, если выполняется условие $(z_1 \neq z_2) \Rightarrow (A(z_1) \neq A(z_2))$.

Если функция является сюръективной и инъективной, то она называется взаимно – однозначной и она имеет обратную, которая обозначается f^{-1}.

Для любого множества Z тождественное преобразование будем обозначать как $I : Z \to Z$.

Для линейных нормированных пространств и линейной функции $f : Z \to U$ будем обозначать операторную норму $\|f\| = \sup\{\|f(z)\|_U,\, z \in Z, \|z\|_Z = 1\}$ (если она существует).

$(Z \to U)$ - множество функций $f : Z \to U$.

$C(G)$ - пространство непрерывных функций на ограниченной области $G \subset R^n$ с нормой $\|x\|_C = \max\{|x(t)| : t \in G\}$.

$L_2(G)$ - пространство суммируемых с квадратом функций на ограниченной области $G \subset R^n$ с нормой $\|x(t)\|_2 = \left(\int_{t \in G} x^2(t)\,dt \right)^{1/2}$.

В гильбертовом пространстве, если:

1. $(\forall z_1, z_2 \in Z)(\langle Az_1 - Az_2, z_1 - z_2 \rangle \geq 0)$, то оператор A называется монотонным;

2. $(\forall z \in Z)(\langle Az, z \rangle \geq 0)$, то линейный оператор A называется положительным;

3. $(\forall z \in Z, z \neq 0)(\langle Az, z \rangle > 0)$, то линейный оператор A называется положительно определенным.

$K(t,s)$ - обозначение ядра линейного интегрального оператора.

Линейный оператор A^* называется сопряженным оператором в гильбертовом пространстве, если выполняется следующее условие $\langle Ax, y \rangle \equiv \langle x, A^* y \rangle$, соответственно для интегрального оператора $K^*(t,s) = K(s,t)$ - называется сопряженным ядром.

$\{\lambda_k | k \in N\}$ - характеристические числа линейного оператора A.

$\varphi_k(t)$ - нормированная собственная функция ядра $K(t,s)$, соответствующая характеристическим числам λ_k, вычисляющаяся по следующей формуле $\varphi_k(t) = \lambda_k \int_0^1 K(t,s)\varphi_k(s)\,ds$.

Если оператор A - линейный, то $L_\alpha = (\alpha I + AA^*)^{-1} A^*$ называется регуляризирующим оператором Тихонова, если к тому же оператор A - положительный и симметричный, то $L_\alpha = (\alpha I + A)^{-1}$ называется регуляризирующим оператором Лаврентьева.

$\delta \in R_{++}$ - малый параметр (погрешность правой части интегрального уравнения).

$\chi \in R_{++}$ - малый параметр (погрешность ядра интегрального уравнения).

$\zeta \in R_{++}$ - малый параметр (погрешность заданной нелинейной функции в интегральном уравнении).

Через функцию с нулевым индексом будем обозначать точное решение исходной задачи.