КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН УЛУТТУК ИЛИМДЕР АКАДЕМИЯСЫ
МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТУ

Ж. БАЛАСАГЫН атындагы КЫРГЫЗ УЛУТТУК УНИВЕРСИТЕТИ

Д 01.17.560 Диссертациялык кеңеши

Кол жазма укугунда

УДК 517.928

Абдылдаева Асель Рыскулбековна

СЫЗЫКТУУ ЭМЕС КОРРЕКТҮҮ ЭМЕС МАСЕЛЕЛЕРДИ ЧЕКТҮҮ ЧЕНЕМДҮҮ ЫКМА МЕНЕН ЧЫГАРУУ

01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу

физика–математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу диссертациянын

АВТОРЕФЕРАТЫ

Бишкек – 2019

Иш И. Раззаков атындагы Кыргыз мамлекеттик техникалык университетинде аткарылган

Илимий жетекчи: физика-математика илимдеринин доктору, профессор Саадабаев А. Ж.Баласагын атындагы КУУ.

Официалдуу оппоненттер: физика-математика илимдеринин доктору, профессор Искандаров С. КР УИА математика институту,

физика-математика илимдеринин кандидаты, доцент Курманбаева А.К. Б.Ельцин атындагы КОСУ.

Жетектөөчү уюм: Казак Улуттук агрардык университети, «Жогорку Математика» кафедрасы, 050010 Казакстан Республикасы Алматы ш., Абай кең көчөсү 8.

Диссертацияны коргоо 2019 ж. «5» мартында саат 16.00 Кыргыз Республикасынын УИА Математика институтунун жана Ж.Баласагын атындагы Кыргыз Улуттук университетинин алдындагы физика-математика илимдеринин доктору (кандидаты) окумуштуулук даражасын изденип алуу боюнча диссертацияларды коргоо Д 01.17.560 Диссертациялык кеңештин отурумунда болот. Дареги: Кыргызстан, 720071, Бишкек ш., Чүй кең көчөсү 265-а, КР УИА Математика институту, 374 аудитория.

Диссертация менен УИА Борбордук илимий китепканасында, Кыргызстан, 720071, Бишкек ш., Чүй кең көчөсү, 265-а жана КР УИА МИ сайтында www.math.aknet.kg, Ж. Баласагын атындагы КУУ сайтында www.nauka.knu.kg таанышууга болот.

Автореферат «___» __________ 2019 ж. жарыяланды

Диссертациялык кеңештин окумуштуу катчысы,
ф.-м.и.д., профессор Байзаков А.Б.

ДИССЕРТАЦИЯЛЫК ИШТИН ЖАЛПЫ МҮНӨЗДӨМӨСҮ

Диссертациянын темасынын актуалдуулугу.

XX кылымдын жыйырманчы жылдары француз математиги Адамар тарабынан математикалык маселенин корректүүлүгүнүн аныктамасы берилген.

Каалагандай математикалык маселе

$$\mathrm{A}z = u \qquad (0.1)$$

оператордук теңдемедеги z белгисиз элементти аныктоого келтирилет, мында A - Z метрикалык мейкиндигин U - метрикалык мейкиндигине чагылдыруучу үзгүлтүксүз чагылдыруу (оператор).

(0.1) теңдемесинин чыгарылышын аныктоо маселеси (Z, U), мейкиндиктердин түгөйүндө Адамар боюнча корректүү деп аталат, эгерде:

1) $u \in U$ каалагандай элемент үчүн $\mathrm{A}z = u$ теңдемесин канааттандыруучу $z \in Z$ элементи жашаса;
2) $z \in Z$ элементи жалгыз болсо;
3) каалагандай ε саны үчүн $\delta(\varepsilon)$ оң саны табылып, бардык $u_1, u_2 \in U, \rho(u_1, u_2) < \delta$ барабарсыздыгынын $\rho(z_1, z_2) < \varepsilon$ аткарылышынан барабарсыздыгы келип чыкса, мында $u_1 \equiv \mathrm{A}z_1$, $u_2 \equiv \mathrm{A}z_2$.

Эгерде Адамар боюнча корректүүлүктүн шарттарынын бирөөсү бузулса, анда маселе корректүү эмес деп аталат.

Көп убакыттар бою корректүү эмес коюлган маселелер физикалык мазмундан четтетилген жана практикалык мааниге ээ эмес деп эсептелген.

Корректүү эмес коюлган маселелердин орчундуулугуна А.Н.Тихонов көңүл бурган. XX кылымдын 50-чү жылдарында М.М.Лаврентьевдин математикалык физиканын корректтүү эмес коюлган маселелерин изилдөөгө арналган эмгектери жарык көргөн. XX кылымдын 60-чы жылдары В.К.Ивановдун эмгектеринде квазичыгарылыш жана аны табуунун жакындаштырылган ыкмалары жөнүндө түшүнүк киргизилген. (0.1) теңдемесин чыгаруусу маселеси Тихонов боюнча шарттуу корректүүлүктүн же корректүүлүктүн аныктамасы берилген.

(0.1) теңдемесинин оң жагы корректүүлүк үлгүсүнүн көптүгүндө жатпаган учурда биринчи жолу жакындаштырып эсептөө М.М.Лаврентьев тарабынан тургузулган. Ал экинчи түрдөгү кичине параметрлүү оператордук теңдеменин чыгарылышы аркылуу тургузулган. А.Н.Тихоновдун эмгектеринде баштапкы берилгендерге карата турумдуу болгон, (0.1) теңдемесинин жакындаштырылган чыгарылышынын жалпы ыкмасы тургузулган.

Регуляризациялоочу оператор жана аны тургузуунун ыкмалары түшүнүктөрүнүн фундаменталдык аныктоосу берилген.

Эгерде төмөнкү шарттар орун алса, анда R_α $U \to Z$ оператору (0.1) теңдемесинин чыгарылышы үчүн регуляризациялоочу оператор деп аталат:

1. R_α оператору баардык $u \in U$ үчүн аныкталса;
2. баардык $z \in Z$ үчүн $\lim\limits_{\alpha \to 0} R_\alpha \mathrm{A}_z = Z$ теңдештиги Z мейкиндигинин нормасы боюнча аткарылса.

R_α регуляризациялоочу операторду табуу (0.1) теңдемесин чыгаруу үчүн турумдуу ыкма деп аталат.

М.М.Лаврентьев, В.К.Иванов, А.Б.Бакушинский, М.И.Иманалиев, А.С.Саадабаев ж.б. изилдөөчүлөрдүн эмгектеринде сызыктуу корректүү эмес теңдемелер жана кээ бир сызыктуу эмес оператордук теңдемелер изилденген.

Берилген диссертациялык жумушта чектүү ченемдүү регуляризациялоочу оператор тургузулган.

Корректүү эмес сызыктуу эмес интегралдык теңдемелер үчүн чектүү ченемдүү регуляризациялоочу операторду тургузуу мурда каралган эмес. Ошондуктан интегралдык жана оператордук теңдемелер үчүн чектүү ченемдүү регуляризациялоочу операторду тургузуу үчүн кененирээк шарттарды табуу маселеси актуалдуу болуп эсептелет.

<u>Диссертациянын темасы менен илимий мекемеде өтүлүүчү негизги илимий изилдөчүү жумуштарынын байланышы</u>

Диссертациянын темасы боюнча изилдөө иштери И.Раззаков атындагы КМТУ колдонмо математика жана информатика кафедрасынын бекитилген илимий «Масса – жылуулук ооштукту математикалык моделдөө жана алардын чыгаруунун ыкмалары» темасынын негизинде жүргүзүлгөн.

<u>Изилдөөнүн максаты жана милдети.</u>

Бул жумуштун максаты биринчи типтеги сызыктуу, сызыктуу эмес интегралдык жана оператордук теңдемелерди чыгаруу үчүн чектүү ченемдүү регуляризациялоочу операторду тургузуу.

Изилдөөнүн милдети:

- Биринчи типтеги сызыктуу, сызыктуу эмес интегралдык жана оператордук теңдемелерди чыгаруу үчүн чектүү ченемдүү регуляризациялоочу операторду тургузуу;
- Үзгүлтүксүз функциялар жана квадраттык суммалануучу функциялар мейкиндиктеринде жакындаштырылган чыгарылыштын так чыгарылышка жыйналуу ылдамдыгын жана турумдуулук баасын алуу;

- Жалпы түрдөгү биринчи типтеги сызыктуу эмес интегралдык теңдемелерди регуляризациялоонун жетиштүү шартын табуу.

<u>Жумуштун илимий жаңылыктары.</u>

Үзгүлтүксүз функциялар жана квадраттык суммалануучу функциялар мейкиндиктеринде сызыктуу эмес интегралдык жана оператордук теңдемелерди чыгаруу үчүн чектүү ченемдүү регуляризациялоочу оператор биринчи жолу тургузулду. Жакындаштырылган чыгарылыштын так чыгарылышка жыйналуучулугу аныкталды жана жыйналуучулуктун ылдамдыгы бааланды. Жылмакай ядролуу биринчи типтеги интегралдык теңдемелер үчүн регуляризациялоонун жетиштүү шарты теңдеменин бош мүчөсүнө «эки эселүү истокообраздуу» болоору көрсөтүлдү.

<u>Алынган натыйжалардын практикалык маанилүүлүгү</u>.

Берилген жумуш теориялык багытта. Алынган жыйынтыктарды математикалык физиканын тескери маселелеринин жакындаштырылган чыгарылышын тургузуу үчүн жана математикалык факультеттердин студенттери үчүн спецкурс окуганга колдонууга болот.

<u>Жумушту коргоого киргизилүүчү негизги жагдайлар</u>.

- Үзгүлтүксүз жана квадраттык суммалануучу функциялар мейкиндиктеринде биринчи типтеги сызыктуу жана сызыктуу эмес интегралдык теңдемелерди чыгаруу үчүн, ошондой эле биринчи типтеги сызыктуу эмес оператордук теңдемелер үчүн чектүү ченемдүү регуляризациялоочу оператор тургузулду;
- Тийиштүү мейкиндиктин нормасы боюнча жакындаштырылган чыгарылыштын так чыгарылышка жыйналаары далилденди;
- Регуляризациялоо параметринин n номеринен көз карандылыгы далилденди;
- Жакындаштырылган чыгарылыштын так чыгарылышка жыйналуучулугунун ылдамдыгын баалоо алынды;
- Жалпы түрдөгү биринчи типтеги жылмакай ядролуу сызыктуу эмес интегралдык теңдеменин регуляризацияланышынын жетиштүү шарты табылды.

<u>Изденүүчүнүн жекече салымы.</u>

Диссертациянын негизги жыйынтыктары [1-2] жана [4-7] эмгектерде жарык көргөн. Биргеликте чыгарылган [1] эмгекте маселенин коюлушу жана алынган жыйынтыктарды талкуулоо илимий жетекчиге тиешелүү, биргелешкен [2] эмгекте маселенин коюлушу илимий жетекчиге тиешелүү, ал эми алынган жыйынтыктарды талкуулоо биргелешкен авторго тиешелүү, бардык эмгектерде теоремаларды, натыйжаларды далилдөө жана мисалдарды тургузуу авторго тиешелүү.

<u>Жумушту аппробациялоо</u>

Жумуштун жыйынтыктары боюнча доклад жасалды:

- КР УИАнын академиги жана РИАнын корреспондент – мүчөсү М.И.Иманалиевдин 85 жылдыгына арналган "Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике" аттуу V эл аралык илимий конференциясында (Бишкек, 2016)[3];

- И.Раззаков атындагы КМТУнун «Колдонмо математика жана информатика» кафедрасынын кеңейтилген отурумунда (Бишкек, 2018);

- КРнын УИА Математика институтунда академик Борубаев А.А. илимий семинарында (Бишкек, 2018).

<u>Диссертациянын натыйжаларынын толук мааниси төмөнкү иштерде чагылдырылган:</u>

Диссертациянын негизги жыйынтыктары [1-2] жана [4-7] эмгектерде жарык көргөн. Биргеликте чыгарылган [1] эмгекте биринчи типтиги оператордук теңдемелердин чыгарылышы үчүн чектүү ченемдүү регуляризациялоочу оператор тургузулду, [2] эмгекте Гилберт мейкиндигинде биринчи типтеги сызыктуу үзгүлтүксүз оператордук теңдемелердин чыгарылышы үчүн чектүү ченемдүү регуляризациялоочу оператор тургузулду. [6] эмгекте жакындаштырылып берилген оң бөлүчү менен сызыктуу эмес оператордук теңдемелерди чыгаруунун чектүү ченемдүү (аппроксимациясы) жакындаштыруусу изилденген, [7] эмгекте үзгүлтүксүз функциялар мейкиндигинде биринчи типтеги интегралдык теңдемелерди чыгаруу үчүн чектүү ченемдүү регуляризациялоочу оператор тургузулду. [5] жеке өзүнүн эмгегинде үзгүлтүксүз оң сызыктуу бөлүчү менен сызыктуу эмес оператордук теңдемелерди чыгаруунун чектүү ченемдүү (аппроксимациясы) жакындаштыруусу изилденген. Бардык эмгектерде теоремаларды, натыйжаларды далилдөө жана мисалдарды тургузуу авторго тиешелүү.

<u>Изилдөө усулдугу</u>.

Интегралдык теңдемелер теориясынын, үзгүлтүксүз функциялар мейкиндигинин жана квадраттын суммалануучу функциялар мейкиндигинин, ошондой эле Банах жана Гилберт мейкиндиктериндеги сызыктуу эмес функционалдык анализдин жалпы жыйынтыктарынын, анын ичинен Банахтын жана Шаудердин кыймылсыз чекиттер принцибинин ыкмалары, математикалык анализдин ыкмалары, калдык мүчөсү интегралдык формадагы Тейлордун формуласы колдонулат.

<u>Диссертациянын түзүлүшү жана көлөмү.</u>

Диссертациялык жумуш шарттуу белгилөөлөрдүн тизмеги, киришүү, параграфтарга бөлүнгөн үч баптан, жана 66 аталыштагы колдонулган адабияттардын (булактардын) тизмегинен турат. Аныктамалар, леммалар, теоремалар үчтүк номерленген: биринчи санарип баптын номерин, экинчиси – параграфтын номерин, үчүнчү санарип параграфтагы катар номерди көрсөтөт. Көлөмү 137 беттен турат.

<u>Жумуштун кыскача мазмуну</u>.

Биринчи бапта берилген ишке тиешеси бар адабияттар жана берилген ишке колдонулуучу кошумча жыйынтыктар келтирген.

Экинчи бапта үзгүлтүксүз оң сызыктуу бөлүчү менен сызыктуу эмес оператордук теңдемелерди чыгаруунун чектүү ченемдүү (аппроксимациясы) жакындаштыруусу изилденет.

Төмөнкү теоремалар далилденген:

Теорема 1. Мейли: 1) A - сызыктуу үзгүлтүксүз оң өзүнөтүйүндөш оператор; 2) K_n оператору $K_n = AK_1 + \beta(n)K_2$ түрүндө көрсөтүлсүн, мында K_1, K_2 лер H мейкиндигинде аныкталган Липшиц шартын канааттандыруучу, сызыктуу эмес операторлор, болгондо да K_1 оператору үчүн Липшиц туруктуусу $N<1$; 3) $\alpha(n)$ параметри $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\beta(n)}{\alpha(n)}=0$ шартын канааттандырат. Анда N_0 номери жашап, бардык $n > N_0$ номерлери жана каалагандай $u \in H$ элемент үчүн

$$\alpha z + Az = u + K_n z \qquad (0.2)$$

теңдемеси жалгыз $z_\alpha^n \in H$ чыгарылышка ээ болот.

Теорема 2. Мейли: 1) 1чи теореманын бардык шарттары (орун алсын) аткарылсын; 2) $u = u_0$ болгон учурда

$$Az = u + K(z) \qquad (0.3)$$

теңдемеси жалгыз чыгарылышка $z_0 \in H$ ээ болсун, ал чыгарылыш $z_0 = A\vartheta_0, \vartheta_0 \in H$; 3) $\alpha(n)$ параметри $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha(n)=0$ шартын канааттандырылсын.

Анда (0.2) теңдеменин $z_{\alpha,0}^n$ чыгарылышы $u = u_0$ болгон учурда (0.3) теңдемесинин так чыгарылышына z_0 $n \to \infty$ да жыйналат.

Жыйналуунун ылдамдыгы үчүн төмөнкү баалоо орун алат

$$\left\|z_{\alpha,0}^n - z_0\right\| \le \frac{N_0}{1-\frac{\beta(n)}{\alpha}Q_0}\cdot\frac{\beta(n)}{\alpha} + \frac{K_0}{1-\frac{\beta(n)}{\alpha}Q_0}\left(\frac{\beta(n)}{\alpha}\right)^2 + P_0\frac{\beta(n)}{\alpha} + \frac{\|\vartheta_0\|}{1-N}\alpha$$

Теорема 3. Мейли: 1) 2чи теореманын 1) жана 2) шарттары аткарылсын; 2) u_δ элементи $\|u_0 - u_\delta\| \le \delta$ (0.4) барабарсыздыгын канааттандырсын; 3) α параметри төмөнкү формула боюнча тандалсын $\alpha(\delta, \beta(n)) = \frac{1}{\sqrt{C_2}}\left(C_0\delta + C_1\beta(n)\right)^{1/2}$.

Анда (0.2) теңдеменин $u = u_\delta$ учурундагы чыгарылышы $z^n_{\alpha,\delta}$, $\delta \to 0,\ \ n \to \infty$ де умтулганда (0.3) теңдеменин так чыгарылышына z_0 жыйналат.

Жыйналуунун ылдамдыгы төмөнкү барабарсыздыкты канааттардырат $\left\| z^n_{\alpha,\delta} - z_0 \right\| \le 2\sqrt{C_2}\left(C_0\delta + C_1\beta(n)\right)^{1/2}$.

Теорема 4. Мейли төмөнкү шарттар канааттандырылсын: 1) $\int\limits_0^1 K(\mathrm{t,s})\,\mathrm{z(s)\,ds} = u(\mathrm{t}),\quad \mathrm{t} \in [0,1]$(0.5) теңдемеси жалгыз чыгарылышка ээ болсун; 2) $K(\mathrm{t,s})$ ядросу $0 \le t,s \le 1$квадратта үзгүлтүксүз жана симметриялуу; 3) K оператору, $0 < \theta < 1$, $L_2(0,1)$ мейкиндигин $C(0,1)$ мейкиндигине чагылдырсын; 4) $K_n(\mathrm{t,s})$ ядросу төмөнкү барабарсыздыкты канааттандырсын $\left\| Kz - K_n z \right\|_{C(0,1)} \le \dfrac{M}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}\left\| z \right\|_{C(0,1)}$.

Анда $\alpha = \dfrac{1}{\lambda^{1/6}_{n+1}}$ жана каалагандай берилген $u(\mathrm{t}) \in \mathrm{C}(0,1)$ үчүн $\alpha z^n_\alpha + K_n z^n_\alpha = u$ теңдеменин чыгарылышы жашайт жана (0.5)теңдеменин $z = K\vartheta$ түрүндө көрсөтүлүүчү каалагандай чыгарылышы үчүн t боюнча бир калыптагы пределдик теңдештик $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\alpha(n)E + K_n\right)^{-1} Kz = z(\mathrm{t})$ орун алат, төмөнкү баалоо орун алат

$$\left\| \left(\alpha E + K_n\right)^{-1} K^2\vartheta - K\vartheta \right\|_{C(0,1)} \le \left(\frac{M}{\lambda_{n+1}}\right)^{\frac{1-\theta}{3-\theta}} C_4\left(C_0^*, C_3, p, \left\|\vartheta\right\|_{L_2(0,1)}\right)..$$

Теорема 5. Мейли: 1) $K(t,s)$ ядросу $B(t) = \left(\int\limits_0^1 K^2(s,t)\,ds\right)^{1/2}$ функциясы $[0,1]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болгондой болсун; 2) $Kz \equiv \int\limits_0^1 K(t,s) z(s) ds = u(t),\quad t \in [0,1],$ (0.6) теңдемеси $u = u_0(t)$ учурда $z_0(t) = \left(K^* K\right)^{\frac{1+\sigma}{2}}\vartheta_0,\ \ 0 < \sigma < 1$ түрүндө көрсөтүлүүчү жалгыз үзгүлтүксүз чыгарылышка ээ болсун.

Анда $\alpha z + K^* K z = K^* u$, $\alpha > 0$ теңдемеси каалагандай $u(t) \in L_2(0,1)$ үчүн чечилет жана бул теңдеменин чыгарылышы $u = u_0$, $\alpha \to 0$ умтулганда $C(0,1)$мейкиндигинин нормасы боюнча (0.6) теңдемесинин так чыгарылышына умтулат, төмөнкү барабарсыздык орун алат $\left\| z_\alpha^0(t) - z_0(t) \right\|_{C[0,1]} \le M_1 \alpha^{\frac{\sigma}{2}}$.

Теорема 6. Мейли: 1) 5чи теореманын бардык шарттары орун алсын; 2) $u_\delta(t)$ элементи $\left\| u_\delta(t) - u_0(t) \right\|_{C(0,1)} \le \delta$ барабарсыздыгын канааттандырылсын; 3) α параметри $\alpha(\delta) = \delta^{\frac{2}{\sigma+2}} \left(\frac{2M \left\| \vartheta_0 \right\|}{\sigma M_1} \right)^{\frac{2}{\sigma+2}}$ барабардыгын канааттандырсын.

Анда

$$\alpha z + K^* K z = K^* u \qquad (0.7)$$

теңдемесинин чыгарылышы $z_{\alpha(\delta)}^\delta$, $u = u_\delta(t)$, $\delta \to 0$ болгондо, (0.6) теңдемесинин так чыгарылышына жыйналат.

Жыйналуунун ылдамдыгы $\left\| z_\alpha^\delta(t) - z_0(t) \right\|_{C(0,1)} \le M_2 \delta^{\frac{\sigma}{\sigma+2}}$ барабарсыздыгын канааттандырат.

Теорема 7. Мейли: 1) 6чи теореманын 1) жана 2) шарттары аткарылсын; 2) $K_n(t,s)$, $0 \le t,s \le 1$ квадратында үзгүлтүксүз функция болсун жана $\left\| K_n(t,s) - K(t,s) \right\|_{C([0,1]\times[0,1])} \le \beta(n)$ барабарсыздыгын канааттандырсын; 3) α параметри $\alpha(\delta) = \left(\frac{4}{M_1 \sigma} \right)^{\frac{2}{4+\sigma}} \left(K\delta + q_2 \beta(n) \right)^{\frac{2}{4+\sigma}}$ шартын канааттандырырсын.

Анда (0.7) теңдемесинин $z_{\alpha,\delta}^n(t)$ чыгарылышы $u(t) = u_\delta(t)$ болгондо, $C(0,1)$ мейкиндигинин нормасы боюнда $\delta \to 0, n \to \infty$ умтулганда, (0.6) теңдемесинин $z_0(t)$ чыгарылышына жыйналат.

Жыйналуунун ылдамдыгы төмөнкү барабарсыздыгын канааттандырат $\left\| z_{\alpha,\delta}^n(t) - z_0(t) \right\|_{C[0,1]} \le M_1 \left(1 + \frac{\sigma}{4} \right) \left(\frac{4}{M_1 \sigma} \right)^{\frac{\sigma}{4+\sigma}} \left(K\delta + q_2 \beta(n) \right)^{\frac{\sigma}{\sigma+4}}$.

Үчүнчү бапта

$$\int_0^1 K(t,s) z(s) ds = u(t) + \int_0^1 K_1(t,s) M(s, z(s)) ds \qquad (0.8)$$

түрүндөгү, биринчи типтеги сызыктуу эмес интегралдык теңдеме каралган, мында $K(t,s)$ - симметриялуу, оң аныкталган, $0 \le t,s \le 1$ квадратында үзгүлтүксүз функция, $M(s,z)$ - s боюнча үзгүлтүксүз жана $0 \le s \le 1$, $-\infty < z < \infty$ облустунда Липшиц шартын канааттандыруучу функция, $K_1(t,s)$- $K(t,s)$тен көз каранды болгон кандайдыр бир үзгүлтүксүз функция

Теорема 8. Мейли: 1) $K(t,s)$ ядросу симметриялуу, оң аныкталган жана $0 \le t,s \le 1$ квадратында үзгүлтүксүз болсун; 2) $K_1(t,s)$ үзгүлтүксүз функциясы $K_1(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(t)\varphi_k(s)}{\mu_k^{3/2}}$ түрүндө көрсөтүлсүн, мында $\{\varphi_k(t)\}$ - $K(t,s)$ ядросунун $\{\mu_k\}$ мүнөздөөчү маанилерине дал келүүчү, ортонормаланган өздүк функциялары; 3) $M(v,z)$ - $0 \le v \le 1$, $-\infty < z < \infty$ облустунда z боюнча Липшиц шартын канааттандыруучу функция, б.а. $|M(v,z_2) - M(v,z_1)| \le N|z_2 - z_1|$; 4) $q \equiv K_0 N < 1$ туруктуусу, мында $K_0 = \max_{0 \le t,s \le 1} |K(t,s)|$; 5) $u(t)$ - берилген үзгүлтүксүз функция.

Анда

$$\alpha z + \int_0^1 K(t,s)z(s)ds = u(t) + \int_0^1 K_1(t,s)M\left(s, z(s)\right)ds \qquad (0.9)$$

теңдемеси үзгүлтүксүз жалгыз $z_\alpha(t)$ чыгарылышка ээ болот.

$z_\alpha(t)$ үчүн төмөнкү баалоо орун алат $|z_\alpha(t)| \le \frac{1}{1-q}\|\overline{z}_0(t)\|_{C(0,1)} + K_0 M_0 \frac{1}{1-q}$.

Теорема 9. Мейли: 1) 8чи теореманын бардык шарттары аткарылсын; 2) $u = u_0(t)$ болгондо (0.8) теңдемеси жалгыз үзгүлтүксүз $z_0(t)$ чыгарылышка ээ болсун, ал чыгарылыш $z_0 = \int_0^1 K(t,s)\vartheta_0(s)ds, \quad \vartheta_0(s) \in l_2(0,1)$ түрүндө көрсөтүлсүн. Анда $u = u_0(t)$ болгондо, (0.9) теңдемеси $z_\alpha^0(t) \in C(0,1)$ жалгыз чыгарылышка ээ болот жана $\alpha \to 0$ да $C(0,1)$ мейкиндигинде $z_\alpha^0(t) \to z_0(t)$.

Жыйналуунун ылдамдыгы үчүн төмөнкү баалоо орун алат $\left\|z_\alpha^0(t) - z_0(t)\right\|_{C(0,1)} \le \frac{K_0 \|\vartheta_0\|_{L_2(0,1)}}{1-q}\sqrt{\alpha}$.

Теорема 10. Мейли: 1) 8чи теореманын бардык шарттары аткарылсын; 2) $K_n(t,s)$ жана $K_{1n}(t,s)$ функциялары тиешелүү түрдө $\|K(t,s) - K_n(t,s)\|_{C((0,1)\times(0,1))} \le C_1\beta(n)$ жана $\|K_1(t,s) - K_{1n}(t,s)\| \le C_2\beta(n)$ барабарсыздыктарын канааттандырышсын; 3) α параметри төмөнкү шартты канааттандырсын $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta(n)}{\left(\alpha\left(\beta(n)\right)\right)^{3/2}} = 0$, $q_1 \equiv \frac{\beta(n)K_2}{\left(\alpha\left(\beta(n)\right)\right)^{3/2}} < 1, \quad \beta(n) < \beta_0(n)$. Анда

$$\alpha z + \int_0^1 K(t,s)z(s)ds = f(t) \qquad (0.10)$$

теңдемеси каалагандай $u(t) \in C(0,1)$ элементи үчүн, $z_\alpha^n(t) = D_\alpha g_\alpha^{\beta(n)}(t)$ түрүндө көрсөтүлүүчү жалгыз $z_\alpha^n(t)$ чыгарылышка ээ болот.

Теорема 11. Мейли: 1) 10чу теореманын 1) жана 2) шарттары аткарылсын; 2) α параметри $\alpha(\beta(n)) = \left(\frac{3K_4}{K_5}\right)^{1/2} \beta(n)^{1/2}$ шартын канааттандырсын; 3) $\beta(n)$ параметри $\beta(n) < \left(\frac{3K_4}{K_5}\right)^{1/8} K_2^{-1/4} \equiv \beta_0^0(n)$ барабарсыздыгын канааттандырсын.

Анда (0.10) теңдемесинин $z_{\alpha,0}^n(t)$ чыгарылышы, $u = u_0(t)$ жана $n \to \infty$ болгондо, (0.8) теңдемесинин так чыгарылышына жыйналат.

Жыйналуунун ылдамдыгы төмөнкү барабарсыздыкты канааттандырат $\left\| z_\alpha^n(t) - z_0(t) \right\|_{C(0,1)} \le \beta(n)^{1/4} \left(\frac{3K_4}{K_5}\right)^{1/4} \frac{4K_5}{3}$.

Теорема 12. Мейли: 1) 11чи теореманын бардык шарттары аткарылсын; 2) $u_\delta(t)$ функциясы $\left\| u_\delta(t) - u_0(t) \right\|_{C(0,1)} \le \delta$ барабарсыздыгын канаатаандырсын; 3) α параметри $\alpha(\delta, \beta(n)) = \left(\frac{3}{K_5}\right)^{1/2} (\delta K_6 + hK_4)^{1/2}$ закону боюнча тандалсын. Анда $z_{\alpha,\delta}^n(t)$ чыгарылышы $u(t) = u_\delta(t)$ жана $\delta \to 0, n \to \infty$ болгондо, (0.8) теңдемесинин так чыгарылышына жыйналат.

Жыйналуунун ылдамдыгы төмөнкү барабарсыздыкты канааттандырат $\left\| z_{\alpha,\delta}^n(t) - z_0(t) \right\|_{C(0,1)} \le 4(\delta K_6 + \beta(n) K_4)^{1/4} \left(\frac{K_5}{3}\right)^{3/4}$.

Ядросу Грин функциясы болгон теңдеменин төмөнкү мисал каралган:

$$K(x,s) = \begin{cases} x(1-s), & 0 \le x \le s, \\ (1-x)s, & s \le x \le 1. \end{cases}$$

Далилденди:

Теорема 13. Эгерде $f(x) \in C^2\,[0,1]$ жана $f(0) = f(1) = 0$ шартын канаатаандырса, анда

$$\lim_{n \to \infty} \left\| f''(x) + n^{3.5} f(x) - 2 \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \frac{\sin \pi js}{1 + n^{-3.5} j^2} f(s) ds \, \sin \pi jx \right\|_{C[0,1]} = 0.$$

Автор илимий жетекчиси физика–математика илимдеринин доктору, профессор Саадабаев Аскербек Саадабаевичке маселенин коюлушу, жумушка ар дайым көңүл бурганы жана алынган жыйынтыктарды талкуулоосу үчүн терең ыраазычылыгын билдирет.

<u>Диссертациянын темасы боюнча жарык көргөн эмгектер</u>:

1. (Абдылдаева А.Р. Построение конечномерного регуляризирующего оператора для решения операторного уравнения первого рода [Текст] / А.С.Саадабаев, А.Р. Абдылдаева //Проблемы современной науки и образования. № 14(56), Москва. – 2016. - С.7-10.
2. Абдылдаева А.Р. Построение конечномерного регуляризирующего оператора для решения линейного вполне непрерывного операторного уравнения первого рода в гильбертовом пространстве [Текст] / А.С.Саадабаев, А.Р. Абдылдаева //Известия КГТУ им. И. Раззакова. № 1 (37) Бишкек. – 2016.-С. 101-105.
3. Abdyldaeva A. Building a finite-dimensional regularizing operator for solving of operator equations of first kind [Текст] / A.Saadabaev, A. Abdyldaeva // Abstracts of the V International Scientific Conference "Asymptotical, Topological and Computer Methods in Mathematics" devoted to the 85 anniversary of Academician M. Imanaliev. Bishkek-Bozteri. - 2016. – C.26.
4. Абдылдаева А.Р. Конечномерный регуляризирующий оператор для решения нелинейного операторного уравнения 1 рода в гильбертовом пространстве [Текст] / А.С.Саадабаев А.Р. Абдылдаева // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. № 11 часть 1. - Москва.– 2016. - С.41-43.
5. Абдылдаева А.Р. Конечномерная аппроксимация нелинейного операторного уравнения с вполне непрерывной линейной частью [Текст] / А.Р. Абдылдаева //Известия КГТУ им. И. Раззакова. № 2 (42). – 2017.-С. 56-61.
6. Абдылдаева А.Р. Конечномерная аппроксимация нелинейного операторного уравнения с приближенно заданной правой частью [Текст] / А.С.Саадабаев, А.Р. Абдылдаева //Вестник КГУСТА им. Н.Исанова. № 4 (58). – 2017. - С. 148-151.
7. Абдылдаева А.Р. Построение конечномерного регуляризующего оператора для решения интегрального уравнения первого рода в пространстве непрерывных функций [Текст] / А.С.Саадабаев, А.Р. Абдылдаева //Вестник КРСУ. Том 18 № 8.– 2016.-С.22-25.

Резюме

Абдылдаева Асель Рыскулбековна

«Сызыктуу эмес корректтүү эмес маселени чектүү ченемдүү ыкмасы менен чыгаруу» темасы боюнча, 01.01.02 –дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу деген адистик боюнча физика-математикалык илимдердин кандидаты окумуштуулук даражасын алуу үчүн диссертация сунушталган

Негизги сөздөр: Регуляризациялоо, чектүү ченемдүү регуляризациялоочу оператор, биринчи түрүндөгү интегралдык теңдеме, оператордук теңдеме, корректүү эмес маселе.

Изилдөөнүн объектиси: Биринчи түрүндөгү интегралдык жана оператордук теңдемелер.

Изилдөөнүн предмети: Биринчи түрүндөгү сызыктуу жана сызыктуу эмес оператордук теңдемелердин чыгарылышы үчүн чектүү ченемдүү регуляризациялоочу операторду түзүү.

Иштин максаты: Үзгүлтүксүз функциялар мейкиндигинде биринчи түрүндөгү, сызыктуу эмес интегралдык жана оператордук теңдемени чыгаруу үчүн чектүү ченемдүү регуляризациялоочу операторлорду түзүү. Ошондой эле Гильберт мейкиндигинде сызыктуу эмес оператордук теңдемени чыгаруу үчүн М.М.Лаврентьевдин ыкмасы менен чектүү ченемдүү регуляризациялоочу операторду түзүү.

Изилдөөнүн усулдугу: Бул иште регуляризациялоочу операторлорду түзүүгө М.М.Лаврентьевдин ыкмасы, сызыктуу эмес интегралдык жана оператордук теңдемени функционалдык анализ ыкмасы колдонулат.

Илимий жаңылыктар: Үзгүлтүксүз функциялар жана экинчи даражадагы суммалануучу мейкиндигинде биринчи түрүндөгү, сызыктуу эмес интегралдык жана оператордук теңдемени чыгаруу үчүн чектүү ченемдүү регуляризациялоочу оператору түзүлгөн. Жакындаштырылган чыгарылыштын так чыгарылышка жыйналуучулугу табылган жана жыйналуучулуктун ылдамдыгы аныкталган. Регуляризация параметринин *n*-номеринен көз карандылыгы далилденген.

РЕЗЮМЕ

Абдылдаева Асель Рыскулбековна

диссертация «Конечномерные методы решения нелинейных некорректных задач» представлена на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: Регуляризация, конечномерный регуляризирующий оператор, интегральное уравнение первого рода, нелинейное интегральное уравнение, операторные уравнения, некорректная задача.

Объект исследования: интегральные и операторные уравнения первого рода.

Предмет исследования: построение конечномерного регуляризирующего оператора для решения линейного и нелинейного операторного уравнения первого рода.

Цель работы: Построение конечномерного регуляризирующего оператора методом М.М. Лаврентьева для решения нелинейных операторных уравнений в гильбертовом пространстве и для линейных, нелинейных интегральных уравнений первого рода в пространстве непрерывных функций.

Методы исследования: в работе применяются методы теории некорректных задач, метод Лаврентьева для построения регуляризирующего оператора, методы функционального анализа для нелинейных уравнений, теория интегральных уравнений, теории линейных операторов.

Полученные результаты и их новизна: Построен конечномерный регуляризирующий оператор для решения нелинейных интегральных и операторных уравнений первого рода в пространствах непрерывных и квадратно суммируемых функций. Установлена сходимость и найдена оценка скорости сходимости приближенных решений к точному решению. Доказан выбор параметра регуляризации от номера n.

SUMMARY

Abdyldaeva Asel Ryskulbekovna

Dissertation “Finite-dimensional methods for solving non-linear ill-posed problems” submitted for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences on specialty 01.01.02 - differential equations, dynamical systems and optimal control

Key words: regularizing, finite dimensional regularizing operator, integral equation of the first kind, non-linear integral equation, operator equation, ill-posed problem.

Object of research: integral and operator equations of the first kind.

Subject of the study: construction of a finite-dimensional regularizing operator for solving a linear and non-linear operator equation of the first kind.

Aim of research: Construction of a finite-dimensional regularizing operator for solving nonlinear operator equations in a Hilbert space and for linear, nonlinear integral equations of the first kind in the space of continuous functions by the method of M.M. Lavrent'ev.

Methods of research: methods of the theory of ill-posed problems, the Lavrent'ev method for constructing a regularizing operator, methods of functional analysis for nonlinear equations, the theory of integral equations, and the theory of linear operators are used in the work.

Scientific novelty: A finite-dimensional regularizing operator is constructed for solving nonlinear integral and operator equations of the first kind in spaces of continuous and square-summable functions. Convergence is established and an estimate of the rate of convergence of approximate solutions to the exact solution is found. The choice of the regularization parameter from the number n is proved.

ШАРТТУУ БЕЛГИЛӨӨЛӨРДҮН ЖАНА АНЫКТАМАЛАРДЫН ТИЗМЕГИ

$x \in A$ - x элементинин A көптүгүндөжатаарынбилдирет.

$x \notin A$ - x элементинин A көптүгүндөжатпасынбилдирет.

$\exists$ - жашаштын квантору.

$\forall$ - жалпылыктын квантору.

$\Rightarrow$ - логикалык келип чыгышты билдирет.

$\{x \in A : Q(x)\}$ - A көптүгүнүн «$Q(x)$» логикалык шартты канааттандыруучу x элементтеринин көптүгү.

$\rho(\cdot,\cdot)$ - метрикалык мейкиндикте метриканын белгиси.

$\|\cdot\|$ - нормаланган мейкиндикте норманын белгиси.

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ - Гилберт мейкиндигинде скалярдык көбөйтүндүнүн белгиси.

N - натуралдык сандар көптүгүнүн белгиси.

$R = (-\infty, +\infty)$ - сан огунун белгиси.

$R_+ = [0, +\infty)$ - терс эмес чыныгы сандар көптүгүнүн белгиси.

$R_{++} = (0, +\infty)$ - оң чыныгы сандар көптүгүнүн белгиси.

$f : Z \to U$ - Z көптүгүн U көптүгүнө чагылдыруучу функцияны билдирет.

Эгерде Z жана U функциялардын көптүгү болсо, анда «оператор» термини колдонулат. Кээде төмөнкү терминдер колдонулат: «Z ти U га чагылдыруу», «Z ти U га өзгөртүп түзүү». Кээде операторлор үчүн $f(x)$ жазуусунун ордуна fx жазуусу колдонулат.

$f(Z_1) = \{f(z) : z \in Z_1\}$ - f өзгөртүп түзүүсүндө $Z_1 \subset Z$ көптүгүнүн образын билдирет.

Изилденүүчү операторлор таасиринде көптүктүн элементтеринин образы баштапкы образдагы көрүнүштө электүү деп аталат.

Эгерде $f(Z)=U$ шарты орун алса, анда f функциясы сюръективдүү деп аталат. Эгерде $(z_1 \neq z_2) \Rightarrow (A(z_1) \neq A(z_2))$ шарты орун алса, функция инъективдүү деп аталат.

Эгерде функция сюръективдүү жана инъективдүү болсо, анда ал өз ара бир маанилеш деп аталат жана f^{-1} деп белгиленүүчү тескери функцияга ээ болот.

Каалагандай Z көптүгү үчүн бирдик өзгөртүп түзүүнү $I: Z \to Z$ аркылуу белгилейбиз. Сызыктуу нормаланган мейкиндик жана сызыктуу $f: Z \to U$ функциясы үчүн оператордун норманны $\|f\| = \sup\left\{\|f(\mathrm{z})\|_U, z \in Z, \|z\|_Z = 1\right\}$, түрүндө белгилейбиз (эгерде ал жашаса).

$(Z \to U)$ - $f: Z \to U$ функциялардын көптүгү.

$C(G)$ - $\|x\|_C = \max\left\{|x(t)| : t \in G\right\}$ нормасы менен $G \subset R^n$ чектүү областта үзгүлтүксүз функциялардын мейкиндиги.

$L_2(G)$ - $\|x(t)\|_2 = \left(\int\limits_{t \in G} x^2(t)\,dt\right)^{1/2}$ нормасы менен, $G \subset R^n$ чектүү областта квадраттык суммалануучу функциялардын мейкиндиги.

Гилберт мейкиндигинде, эгерде:

1. $(\forall z_1, z_2 \in Z)\left(\langle A z_1 - A z_2, z_1 - z_2 \rangle \geq 0\right)$ болсо, анда оператор A монотондуу деп аталат;

2. $(\forall z \in Z)\left(\langle A z, z \rangle \geq 0\right)$, анда A сызыктуу оператору оң деп аталат;

3. $(\forall z \in Z, z \neq 0)\left(\langle A z, z \rangle > 0\right)$, анда A сызыктуу оператору оң аныкталган деп аталат.

$K(t,s)$ - сызыктуу интегралдык оператордун ядросунун белгиси.

Эгерде $\langle Ax, y \rangle \equiv \langle x, A^* y \rangle$ шарты орун алса, анда Гилберт мейкиндигинде сызыктуу A^* оператору түйүндөш оператор деп аталат. Тиешелүү түрдө интегралдык оператор үчүн $K^*(t,s) = K(s,t)$ - түйүндөш ядро деп аталат.

$\left\{\lambda_k \middle| k \in N\right\}$ - A сызыктуу операторунун мүнөздөөчүү сандары.

$\varphi_k(t)$ - λ_k мүнөздөөчүү сандарга туура келүүчү, $\varphi_k(t)=\lambda_k\int_0^1 K(t,s)\varphi_k(s)ds$ формуласы аркылуу аныкталуучу, $K(t,s)$ ядросунун нормаланган өздүк функциялары.

Эгерде A сызыктуу оператор болсо, анда $L_\alpha=\left(\alpha I+AA^*\right)^{-1}A^*$ - Тихоновдун регуляризациялоочу оператору деп аталат, эгерде ошол эле A оператору – оң жана симметриялуу болсо, анда $L_\alpha=(\alpha I+A)^{-1}$ оператору Лаврентьевдин регуляризациялоочу оператору деп аталат.

$\delta\in R_{++}$ - кичине параметр (интегралдык теңдеменин оң жагынын айырмалуу катасы).

$\chi\in R_{++}$ - кичине параметр (интегралдык теңдеменин ядросунун айырмалуу катасы).

$\zeta\in R_{++}$ - кичине параметр (интегралдык теңдемеде берилген сызыктуу эмес фунциянын айырмалуу катасы).

Нөлдүк индекстүү функция аркылуу, берилген маселенин так чыгарылышын белгилейбиз.