УДК 517.968.2

ПОСТРОЕНИЕ КОНЕЧНОМЕРНОГО РЕГУЛЯРИЗУЮЩЕГО ОПЕРАТОРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

А.Саадабаев, А.Р.Абдылдаева

В данной работе рассмотрено интегральное уравнение первого рода в пространстве непрерывных функций. Предполагая, что вместо ядра задано конечное число слагаемых функций, которое при $n\to\infty$ сходится к заданному ядру, построен конечномерный регуляризующий оператор для решения интегрального уравнения первого рода. Получена оценка между приближенным и точным решениями. Доказана сходимость приближенного решения к точному решению при $n\to\infty$. Осуществлен выбор параметра регуляризации от числа n.

Ключевые слова: интегральное уравнение первого рода, регуляризирующий оператор, конечномерная аппроксимация.

CONSTRUCTING AN FINITE-DIMENSIONAL REGULARIZING OPERATOR FOR SOLVING THE FIRST-ORDER INTEGRAL EQUATION IN THE SPACE OF CONTINUOUS FUNCTIONS

A.Saadabaev, A.R.Abdyldaeva

In this paper we consider an integral equation of the first kind in the space of continuous functions. Assuming that instead of a kernel a finite number of summands of functions are given, which $n\to\infty$ converges to a given kernel, constructed a finite-dimensional regularizing operator for solving an integral equation of the first kind. An estimate is obtained between the approximate and exact solutions. The convergence of the approximate solution to the exact solution is proved $n\to\infty$. The regularization parameter is chosen from the number n.

Keywords: integral equation of the first kind, regularizing operator, finite-dimensional approximation.

БИРИНЧИ ТҮРДӨГҮ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫ ҮЧҮН ЧЕКТҮҮ ӨЛЧӨМДӨГҮ КАЛЫПТАНДЫРУУЧУ ОПЕРАТОР ТУРГУЗУУ

Берилген иште биринчи түрдөгү интегралдык теңдеме үзгүлтүксүз функциялар мейкиндигинде изилденди. Интегралдык теңдеменин берилген ядросунун ордуна чектүү сандагы кошулуучудан турган ядро берилсе жана акыркы сумма $n \to \infty$ берилген ядрого умтулган учурда берилген теңдеменин чыгарылышы үчүн чектүү өлчөмдөгү калыптандыруучу оператор тургузулду. Жакындаштырылган чыгарылыш норма боюнча так чыгарылышка $n \to \infty$ умтула тургандыгы далилденди.

Урунттуу сөздөр: биринчи түрдөгү интегралдык теңдеме, калыптандыруучу оператор, чектүү өлчөмдүү жакындаштыруу.

Ранее в работах [1]-[4] исследовано операторное нелинейное уравнение первого рода в Гильбертовом пространстве. В данной работе построена конечномерная аппроксимация решения интегрального уравнения первого рода в пространстве непрерывных функций.

Рассмотрим линейное интегральное уравнение первого рода

$$\int_0^1 K(\mathrm{t},\mathrm{s})\,\mathrm{z}(\mathrm{s})\,\mathrm{ds} = u(\mathrm{t}), \quad \mathrm{t} \in [0,1], \tag{1}$$

где $K(\mathrm{t},\mathrm{s})$ - непрерывная функция в квадрате $0 \le t,s \le 1$, $u(\mathrm{t})$ - заданная непрерывная функция, $z(\mathrm{s})$ - искомая функция.

Левую часть уравнения (1) обозначим через $K(\mathrm{s})$, она является интегральным оператором. Решение уравнения (1) будем искать в пространстве непрерывных функций. Пусть ядро $K(\mathrm{t},\mathrm{s})$ является симметричным и положительным. Обозначим через $\{\varphi_k(\mathrm{t})\}_{k=1}^{\infty}$

ортонормированные собственные функции ядра, соответствующие характеристическим значениям $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, причем $\lambda_k > 0$ и $\lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Известно [5], что решение уравнения (1) не является устойчивым от заданной функции $u(\mathrm{t})$, т.е. нахождение решения уравнения (1) является некорректной задачей. Для нахождения устойчивого решения наряду с уравнением (1) рассмотрим интегральное уравнение второго рода [6]

$$\alpha z_\alpha + K(\mathrm{z}_\alpha) = \mathrm{u(t)}, \quad \mathrm{t} \in [0,1], \tag{2}$$

где α - положительный действительный параметр.

Ядро $K(\mathrm{t,s})$ интегрального уравнения представимо в следующем виде

$$K(\mathrm{t,s}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(\mathrm{t})\varphi_k(s)}{\lambda_k}.$$

Рассмотрим n первых сумм ядра $K_n z = \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{\lambda_k}\varphi_k(\mathrm{t})$, где $z_k = \int_0^1 \varphi_k(\mathrm{t})\mathrm{z(t)\,dt}$ - коэффициенты Фурье.

Оценим разность, используя неравенство Коши - Буняковского

$$\|Kz - K_n z\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z_k}{\lambda_k}\varphi_k(\mathrm{t}) \right\| \le \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z_k^2}{\lambda_k} \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varphi_k^2(\mathrm{t})}{\lambda_k} \right)^{1/2} \le \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}\|z\| \cdot M.$$

Здесь мы также использовали неравенства Бесселя, т.е. $\left(\sum_{k=1}^{\infty} z_k^2 \right)^{1/2} \le \|z\|$. Ядро $K(\mathrm{t,t})$ ограничено числом M, т.е. $K(\mathrm{t,t}) \le M$.

Отсюда

$$\|Kz - K_n z\|_{C(0,1)} \le \frac{M}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}\|z\|_{C(0,1)}. \tag{3}$$

Таким образом, имеет место следующая оценка $\|K - K_n\| \le \frac{M}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}$.

Рассмотрим уравнение второго рода

$$\alpha z_\alpha^n + K_n z_\alpha^n = u, \tag{4}$$

где $K_n(\mathrm{z}) = \int_0^1 K_n(\mathrm{t},\mathrm{s})\,\mathrm{z}(\mathrm{s})ds$.

Уравнение (4) перепишем в виде

$$\alpha z_\alpha^n + K(\mathrm{z}_\alpha^n) = \mathrm{u(t)} - \left(K_n - K\right)(\mathrm{z}_\alpha^n). \tag{5}$$

Оператор $\left(\alpha E + K\right)^{-1}$ существует [6]. Тогда из (5) получим

$$z_\alpha^n = \left(\alpha E + K\right)^{-1} u(\mathrm{t}) - \left(\alpha E + K\right)^{-1}\left(K_n - K\right) z_\alpha^n. \tag{6}$$

Используя оценку $\left\|\left(\alpha E + K\right)^{-1}\right\|_{C(0,1)\to C(0,1)} \le \frac{C_0^*}{\alpha^2}$ и неравенство (3), получим неравенство

$$\left\|\left(\alpha E + K\right)^{-1}\left(K_n - K\right) z_\alpha^n\right\|_{C(0,1)} \le \left\|\left(\alpha E + K\right)^{-1}\right\|_{C(0,1)\to C(0,1)} \left\|K_n - K\right\| \cdot \left\|z_\alpha^n\right\|_{C(0,1)} \le \frac{C_0^*}{\alpha^2}\left\|z_\alpha^n\right\|_{C(0,1)} \cdot \frac{M}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}.$$

Это означает

$$\left\|\left(\alpha E + K\right)^{-1}\left(K_n - K\right)\right\| \le \frac{C_0^*}{\alpha^2} \cdot \frac{M}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}.$$

Пусть параметр α удовлетворяет условию

$$\frac{C_0^*}{\alpha^2(n)} \cdot \frac{M}{\sqrt{\lambda_{n+1}}} < 1.$$

Тогда в силу теоремы Банаха [7], обратный оператор $\left(E + \left(\alpha E + K\right)^{-1}\left(K_n - K\right)\right)^{-1}$ существует и решение интегрального уравнения (5) представимо в виде

$$z_\alpha^n = \left(E + \left(\alpha E + K\right)^{-1}\left(K_n - K\right)\right)^{-1}\left(\alpha E + K\right)^{-1} u(\mathrm{t}).$$

Пусть функция $z(\mathrm{t}) \in \mathrm{C}(0,1)$ является решением уравнения(1), т.е. $u(\mathrm{t}) = \mathrm{K}(\mathrm{z})$. Оценим разность $z_\alpha^n(\mathrm{t}) - z(\mathrm{t})$ по норме пространства $\mathrm{C}(0,1)$. Используя неравенство треугольника, получим

$$\left\| z_\alpha^n(\mathrm{t}) - z(\mathrm{t}) \right\|_{C(0,1)} \le \left\| z_\alpha^n(\mathrm{t}) - z_\alpha(\mathrm{t}) \right\|_{C(0,1)} + \left\| z_\alpha(\mathrm{t}) - z(\mathrm{t}) \right\|_{C(0,1)}, \tag{7}$$

где $z_\alpha(\mathrm{t}) = \left(\alpha E + K\right)^{-1} u$.

Оценим первое слагаемое

$$\left\| z_\alpha^n(\mathrm{t}) - z_\alpha(\mathrm{t}) \right\|_{C(0,1)} = \left\| \left(\alpha E + K_n\right)^{-1} u(\mathrm{t}) - \left(\alpha E + K\right)^{-1} u(\mathrm{t}) \right\|_{C(0,1)} =$$

$$= \left\| \left(\alpha E + K_n\right)^{-1} \left(\alpha E + K - \alpha E - K_n\right) \left(\alpha E + K\right)^{-1} u(\mathrm{t}) \right\|_{C(0,1)} =$$

$$= \left\| \left(\alpha E + K_n\right)^{-1} \left(K - K_n\right) \left(\alpha E + K\right)^{-1} u(\mathrm{t}) \right\|_{C(0,1)}. \tag{8}$$

Оператор $\left(\alpha E + K_n\right)^{-1}$ существует для любого оператора K_n, удовлетворяющего неравенству (3), причем он представим в виде

$$\left(\alpha E + K_n\right)^{-1} = \left(E + \left(\alpha E + K\right)^{-1} \left(K_n - K\right)\right)^{-1} \left(\alpha E + K\right)^{-1}.$$

Отсюда получим следующую оценку

$$\left\| \left(\alpha E + K_n\right)^{-1} \right\|_{C(0,1) \to C(0,1)} \le \frac{C_0^*}{\alpha^2} \left(1 - C_0 \frac{M}{\sqrt{\lambda_{n+1}}} \alpha^{-2}(n) \right)^{-1}. \tag{9}$$

Оценим функцию $\left(\alpha E + K\right)^{-1} u(\mathrm{t})$ при условии, что $u(\mathrm{t}) = \mathrm{Kz}$. Тогда, используя теорему Гильберта [7], получим

$$\left(\alpha E + K\right)^{-1} Kz = K\left(\alpha E + K\right)^{-1} z.$$

Пусть точное решение уравнения (1) представимо в виде $z = K\vartheta, \quad \vartheta \in L_2(0,1)$.

Тогда $\left(\alpha E+K\right)^{-1}Kz=K\left(\left(\alpha E+K\right)^{-1}\vartheta\right)$.

Отсюда $\left\|\left(\alpha E+K\right)^{-1}Kz\right\|\le C_3\left\|\left(\alpha E+K\right)^{-1}K\vartheta\right\|_{L_2}\le C_3\left\|\vartheta\right\|_{L_2}$ для любого $t\in\left(0,1\right)$. Используя это и неравенство (9), из (8) получим

$$\left\|z_\alpha^n(\mathrm{t})-z_\alpha(\mathrm{t})\right\|_{C(0,1)}\le\frac{C_0^*}{1-C_0^*\dfrac{M}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}\alpha^{-2}}C_0^*\frac{M}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}\alpha^{-2}C_3\left\|\vartheta\right\|_{L_2}. \tag{10}$$

Для разности $z_\alpha(\mathrm{t})-\mathrm{z}(\mathrm{t})$ справедлива оценка $\left\|z_\alpha(\mathrm{t})-\mathrm{z}(\mathrm{t})\right\|_{C(0,1)}\le\alpha^{1-\theta}C_1\left\|\vartheta\right\|_{L_2}$. [3]

Учитывая это и неравенство (10), из (7) получим

$$\left\|z_\alpha^n(\mathrm{t})-\mathrm{z}(\mathrm{t})\right\|_{C(0,1)}\le\frac{C_0^*}{1-C_0^*\dfrac{M}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}\alpha^{-2}}C_0^*C_3\frac{M}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}\alpha^{-2}\left\|\vartheta\right\|_{L_2}+\alpha^{1-\theta}C_1\left\|\vartheta\right\|_{L_2}.$$

Подставляя $\alpha=ph^j$, из этого неравенства получим

$$1-2j=j(1-\theta),\quad \mathrm{j}=\frac{1}{3-\theta},\ \text{т.е.}$$

$$\left\|z_\alpha^n(\mathrm{t})-z(\mathrm{t})\right\|_{C(0,1)}\le\left(\frac{M}{\lambda_{n+1}}\right)^{\frac{1-\theta}{3-\theta}}C_4\left(C_0^*,C_3,p,\left\|\vartheta\right\|_{L_2(0,1)}\right).$$

Доказана следующая

ТЕОРЕМА. Пусть выполняются следующие условия:1) уравнение (1) имеет единственное решение; 2) ядро $K(\mathrm{t,s})$ непрерывно в квадрате $0\le t,s\le1$ и симметрично; 3) оператор K, $0<\theta<1$, действует из пространства $L_2\left(0,1\right)$ в $C\left(0,1\right)$; 4) ядро $K_n(\mathrm{t,s})$ удовлетворяет неравенству (3).

Тогда, при $C_0^*\dfrac{M}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}\alpha^{-2}<1$, т.е. при $\alpha=\dfrac{1}{\lambda_{n+1}^{1/6}}$ и при любом заданном $u(\mathrm{t})\in\mathrm{C}\left(0,1\right)$ решение уравнения (4) существует и для любого решения уравнения (1), представимого в виде $z=K\vartheta$, справедливо предельное соотношение $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\alpha\left(n\right)E+K_n\right)^{-1}Kz=z(\mathrm{t})$ равномерно по t, причем справедлива оценка

$$\left\|\left(\alpha E+K_n\right)^{-1}K^2\vartheta-K\vartheta\right\|_{C(0,1)}\le\left(\frac{M}{\lambda_{n+1}}\right)^{\frac{1-\theta}{3-\theta}}C_4\left(C_0^*,C_3,p,\left\|\vartheta\right\|_{L_2(0,1)}\right).$$

Литература

1. Саадабаев А., Абдылдаева А.Р. Построение конечномерного регуляризующего оператора для решения операторного уравнения первого рода // журн. «Проблемы современной науки и образования» № 14(56) Москва: 2016
2. Саадабаев А., Абдылдаева А.Р. Построение конечномерного регуляризирующего оператора для решения линейного вполне непрерывного операторного уравнения первого рода в гильбертовом пространстве // журн. «Известия КГТУ им. И. Раззакова» № 1 (37) Бишкек: 2016
3. Саадабаев А., Абдылдаева А.Р. Конечномерный регуляризирующий оператор для решения нелинейного операторного уравнения первого рода в гильбертовом пространстве // журн. «Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук» № 11 часть 1, Москва: 2016
4. Абдылдаева А.Р. Конечномерная аппроксимация нелинейного операторного уравнения с вполне непрерывной линейной частью // журн. «Известия КГТУ им. И. Раззакова» № 2 (42) Бишкек: 2017
5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986
6. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода // Докл. АН СССР. – 1969. – Т.127, №1. – с.31-33
7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа: Учебник для мат.спец.университетов. – 4-е изд., перераб. – М.: Наука, 1976

1. **Саадабаев Аскербек**, д.ф.-м.н., профессор кафедры «Дифференциальные уравнения» Кыргызского национального университета им. Ж.Баласагына, Бишкек, Кыргызская Республика
с.т. 0-777-09-78-93 e-mail: caadabaev@mail.ru
2. **Абдылдаева Асель Рыскулбековна**, старший преподаватель кафедры «Прикладная математика и информатика» Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова, Бишкек, Кыргызская Республика
с.т. 0-772-66-43-49 e-mail: asabdyl_72@mail.ru