УДК 517.68

**А.Саадабаев**
*Кыргызский национальный университет им. Ж.Баласагына, Бишкек, Кыргызская Республика*
*e-mail: caadabaev@mail.ru*
**A.Saadabaev**
*Kyrgyz National University named after J. Balasagyn, Bishkek, Kyrgyz Republic*
*e-mail: caadabaev@mail.ru*
**А.Р.Абдылдаева**
*Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова, Бишкек, Кыргызская Республика*
*e-mail: asabdyl_72@mail.ru*
**A.R.Abdyldaeva**
*Kyrgyz State Technical University named after I.Razzakov, Bishkek, Kyrgyz Republic*
*e-mail: asabdyl_72@mail.ru*

# КОНЕЧНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ С ПРИБЛИЖЕННО ЗАДАННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

# FINITE-DIMENSIONAL APPROXIMATION OF A NONLINEAR OPERATOR EQUATION WITH AN APPROXIMATELY GIVEN RIGHT-HAND SIDE

*Бул иште сызыктуу эмес оператордук теңдеменин чыгарылышы үчүн оң жагы жакындаштырылып берилген учурда калыптандыруучу оператор тургузулган. Чектүү өлчөмдүү мейкиндикте калыптандыруучу оператор тургузулуп, параметр $n$ дин $\delta$ дан көз карандылыгы тургузулуп жана $n \to \infty$ умтулганда чектүү өлчөмдөгү чыгарылыш берилген теңдеменин так чыгарылышына умтула тургандыгы далилденди.*

***Чечүүчү сөздөр:*** *оператордук теңдеме, калыптандыруучу оператор, чектүү өлчөмдөгү калыптандыруучу оператор, калыптандыруучу параметр.*

*В данной работе построен регуляризующий оператор для решения нелинейного операторного уравнения, когда правая часть задана приближенно. Построен конечномерный регуляризующий оператор, причем доказано, что при $n \to \infty$ и при специальном выборе параметра $n$ от $\delta$, решение конечномерной задачи сходится к точному решению исходного уравнения. Доказано, что выбор параметра регуляризации зависит от истокообразно представимости точного решения. Решение называется истокообразно представимым, если существует элемент $\upsilon_0 \in H$, такой, что точное решение представимо в виде $u_0 = A\upsilon_0$.*

***Ключевые слова:*** *операторное уравнение, регуляризующий оператор, конечномерный регуляризующий оператор, параметр регуляризации.*

*In this paper we construct a regularizing operator for solving a nonlinear operator equation, when the right-hand side is given approximately. A finite-dimensional regularizing operator is constructed, and it is proved that for $n \to \infty$ and for a special choice of the parameter $n$ from $\delta$, the solution of the finite-dimensional problem converges to the exact solution of the original equation. It is proved that the choice of the regularization parameter depends on the source-like represent ability of the exact solution. A solution is said to be source-wise represent able, if there is an element $\upsilon_0 \in H$ such that the exact solution is represent able in the form $u_0 = A\upsilon_0$.*

***Keywords:*** *operator equation, regularizing operator, finite-dimensional regularizing operator, regularization parameter.*

Ранее в работах Саадабаева А. был построен регулязизующий оператор для решения нелинейного операторного уравнения в бесконечномерном пространстве. Новизна этой работы заключается в том, что для решения нелинейного операторного уравнения построен регуляризующий оператор в конечномерном пространстве.

Рассмотрим уравнение $Az = u + Kz,$ (1)

когда $A$ вполне непрерывный линейный оператор в $H$, $K = AK_1$, $K_1$ - нелинейный оператор, удовлетворяющий условию Липшица в $H$.

Пусть вместо точной правой части $u_0$ задано приближенное значение $u_\delta$, удовлетворяющее неравенству $\|u_0 - u_\delta\| \le \delta$ (2).

Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение второго рода вида

$$\alpha z + A^*Az = A^*u + A^*Kz. \quad (3)$$

$A^*A$ - положительный самосопряженный вполне непрерывный оператор, таковым будет и оператор $AA^*$.

От уравнения (3) перейдем к нелинейному операторному уравнению

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i u_i}{\alpha + \lambda_i^2}\psi_i + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2}{\alpha + \lambda_i^2}\big(K_1(z), \psi_i\big)\psi_i, \quad (4)$$

при $u = u_\delta$, где $u_\delta$ удовлетворяет неравенству (2).

Решение уравнения (1) при $u = u_\delta$ обозначим через $z_\alpha^\delta$. Оно удовлетворяет тождеству

$$z_\alpha^\delta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i u_{\delta i}}{\alpha + \lambda_i^2}\psi_i + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2}{\alpha + \lambda_i^2}\big(K_1(z_\alpha^\delta), \psi_i\big)\psi_i. \quad (5)$$

Для решения $z_\alpha^0$ уравнения (1) при $u = u_0$ имеет место тождество

$$z_\alpha^0 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i u_{0i}}{\alpha + \lambda_i^2}\psi_i + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2}{\alpha + \lambda_i^2}\big(K_1(z_a^0), \psi_i\big)\psi_i. \quad (6)$$

Вычитая тождество (6) из тождества (5), получим

$$\|z_\alpha^\delta - z_\alpha^0\| \le \left\|\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i (u_{\delta i} - u_{0i})}{\alpha + \lambda_i^2}\psi_i\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2}{\alpha + \lambda_i^2}\Big(\big(K_1(z_\alpha^\delta) - K_1(z_\alpha^0)\big), \psi_i\right\| \le$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_i}{\alpha + \lambda_i^2}\right)^2 (u_{\delta i} - u_{0i})^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_i^2}{\alpha + \lambda_i^2}\right)^2 \big(K_1(z_\alpha^\delta) - K_1(z_\alpha^0)\big)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\|uu_\delta - u_0\| + \|K_1(z_\alpha^\delta) - K_1(z_\alpha^0)\| \le \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}} + N\|z_\alpha^\delta - z_\alpha^0\|.$$

Здесь мы использовали неравенство Бесселя и неравенство $\dfrac{\lambda_i}{\alpha + \lambda_i^2} \le \dfrac{1}{2\sqrt{\alpha}}$.

Учитывая, что $N<1$, из предыдущего неравенства получим

$$\left\|z_\alpha^\delta - z_\alpha^0\right\| \le \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{1}{1-N}. \qquad (7)$$

Оценим разность $z_\alpha^\delta - z_0$. Используя неравенство треугольника, (7) и неравенство

$$\left\|z_\alpha - z_0\right\| \le \frac{(2-\delta)^{\frac{2-\delta}{2}}\left\|\vartheta_0\right\|}{1-N}\alpha^{\frac{\delta}{2}}$$

получаем

$$\begin{aligned}\left\|z_\alpha^\delta - z_0\right\| \le \left\|z_\alpha^\delta - z_\alpha\right\| + \left\|z_\alpha - z_0\right\| \le \frac{1}{2(1-N)} \cdot \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}} + \\ + \frac{(2-\delta)^{\frac{2-\delta}{2}}\delta^{\frac{\alpha}{2}}\left\|u_0\right\|}{2(1-N)}\alpha^{\frac{\delta}{2}} = \frac{1}{2(1-N)} \cdot \left(\frac{\delta}{\sqrt{\alpha}} + K_0\alpha^{\frac{\delta}{2}}\right),\end{aligned} \qquad (8)$$

где $\mathrm{K}_0 = (2-\delta)^{\frac{2-\delta}{2}}\delta^{\frac{\alpha}{2}}$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(\alpha) = \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}} + K_0\alpha^{\frac{\delta}{2}}, \quad 0<\alpha<\infty.$$

В точке $\alpha(\delta) = (\mathrm{K}_0\,\delta)^{-\frac{2}{\delta+1}} \cdot \delta^{\frac{2}{\delta+1}}$ функция $\varphi(x)$ принимает минимальное значение

$$\varphi\left(\alpha(\delta)\right) = \delta^{\frac{\delta}{\delta+1}}(\mathrm{K}_0\,\delta)^{\frac{2}{\delta+1}}(1+\frac{1}{\delta}).$$

Учитывая это, из неравенства (5) получаем

$$\left\|z_{\alpha(\delta)}^\delta - z_0\right\| \le \mathrm{K}_1 \cdot \delta^{\frac{\delta}{\delta+1}}, \qquad (9)$$

где $K_1 = \frac{1}{1-N}(\mathrm{K}_0\,\delta)^{\frac{2}{\delta+1}}(1+\frac{1}{\delta})$.

Доказана

**Теорема1**. Пусть: 1) выполнены все условия теоремы 2 работы [4];

2) параметр $\alpha(\delta)$ зависит по закону $\alpha(\delta) = (\mathrm{K}_0\,\delta)^{-\frac{2}{\delta+1}} \cdot \delta^{\frac{2}{\delta+1}}$;

3) элемент $u_\delta$ удовлетворяет неравенству $\left\|u_0 - u_\delta\right\| \le \delta$.

Тогда решение $z_\alpha^\delta$ уравнения (4) при $u = u_\delta$ сходится к точному решению уравнения (1) при $\delta \to 0$. Скорость сходимости оценивается неравенством (9).

Рассмотрим конечную сумму

$$z^{\delta}_{\alpha,n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i u_{\delta i}}{\alpha+\lambda_i^2}\psi_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i^2}{\alpha+\lambda_i^2}\left(K_1(z^{\delta}_{\alpha,n}),\psi_i\right)\psi_i.$$

Оценим разность $z^{\delta}_{\alpha,n}-z_0$. Переходя к норме и используя неравенство треугольника, имеем

$$\left\|z^{\delta}_{\alpha,n}-z_0\right\|\le\left\|z^{\delta}_{\alpha,n}-z^{0}_{\alpha,n}\right\|+\left\|z^{0}_{\alpha,n}-z_0\right\|. \quad (10)$$

В силу теоремы 3 работы [4] справедлива оценка

$$\left\|z^{0}_{\alpha,n}-z_0\right\|\le\frac{\lambda_{n+1}^{\sigma}\left\|\upsilon_0\right\|}{1-N}. \quad (11)$$

Найдем разность

$$z^{\delta}_{\alpha,n}-z^{0}_{\alpha,n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i(u_{\delta i}-u_{0i})}{\alpha+\lambda_i^2}\psi_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i^2}{\alpha+\lambda_i^2}\left(K_1(z^{\delta}_{\alpha,n})-K_1(z^{0}_{\alpha,n}),\psi_i\right),\psi_i.$$

Оценим

$$\left\|z^{\delta}_{\alpha,n}-z^{0}_{\alpha,n}\right\|\le\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i}{\alpha+\lambda_i^2}\right)^2(u_{\delta i}-u_{0i})^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i^2}{\alpha+\lambda_i^2}\right)^2\left(K_1(z^{\delta}_{\alpha,n})-K_1(z^{0}_{\alpha,n}),\psi_i{}^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда имеем

$$\left\|z^{\delta}_{\alpha,n}-z^{0}_{\alpha,n}\right\|\le\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\delta+N\left\|z^{\delta}_{\alpha,n}-z^{0}_{\alpha,n}\right\|=\frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}(1-N)},\ \text{при}\ N\le 1$$

Тогда учитывая полученную оценку и оценку (11), из (10) имеем

$$\left\|z^{\delta}_{\alpha,n}-z_0\right\|\le\frac{\lambda_{n+1}^{\sigma}\left\|\upsilon_0\right\|}{1-N}+\frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}(1-N)}.$$

Если $\alpha(n)=\lambda_{n+1}^{\sigma}$, то получим оценку

$$\left\|z^{\delta}_{\alpha,n}-z_0\right\|\le\frac{\lambda_{n+1}^{\sigma}\left\|\upsilon_0\right\|}{1-N}+\frac{\delta}{2\sqrt{\lambda_{n+1}^{\sigma}}(1-N)}=\frac{1}{1-N}\left(\lambda_{n+1}^{\sigma}\left\|\upsilon_0\right\|+\frac{\delta}{2\sqrt{\lambda_{n+1}^{\sigma}}}\right).$$

Заметим, что функция $\varphi(x)=x^{\sigma}+\dfrac{\delta}{2\sqrt{x^{\sigma}}}$ в точке $x=\left(\dfrac{\delta}{4}\right)^{2/3\sigma}$ достигает минимального значения, которое равно

$$\varphi\left[\left(\frac{\delta}{4}\right)^{\frac{2}{3\sigma}}\right]=3\left(\frac{\sigma}{4}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Таким образом доказана

**Теорема 2**. Пусть: 1) выполняются условия теоремы 1;

2) $\alpha(n) = \lambda_{n+1}^{\sigma}$;

3) $\delta(n) = 4(\lambda_{n+1})^{\frac{3\sigma}{2}}$ .

Тогда $z_{\alpha(n),n(\delta)}^{\delta} \to z_0$ при $\delta \to 0, n \to \infty$ и имеет место неравенство

$$\left\| z_{\alpha,n}^{\delta} - z_0 \right\| \le \frac{3}{1-N} \left( \frac{\sigma}{4} \right)^{\frac{2}{3}} = 3\lambda_{n+1}^{\sigma}.$$

## Список литературы


1. Саадабаев А.С. Построение конечномерного регуляризующего оператора для решения операторного уравнения первого рода [Текст] / А.С. Саадабаев, А.Р. Абдылдаева // журн. «Проблемы современной науки и образования» № 14(56) Москва: 2016.- 7 с.
2. Саадабаев А.С. Построение конечномерного регуляризирующего оператора для решения линейного вполне непрерывного операторного уравнения первого рода в гильбертовом пространстве [Текст] / А.С. Саадабаев, А.Р. Абдылдаева // журн. «Известия КГТУ им. И. Раззакова» № 1 (37) Бишкек: 2016.- 105 с.
3. Саадабаев А.С. Конечномерный регуляризирующий оператор для решения нелинейного операторного уравнения первого рода в гильбертовом пространстве [Текст] / А.С. Саадабаев, А.Р. Абдылдаева // журн. «Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук» № 11 часть 1, Москва: 2016. – 43 с.
4. Абдылдаева А.Р. Конечномерная аппроксимация нелинейного операторного уравнения с вполне непрерывной линейной частью [Текст] / А.Р. Абдылдаева // журн. «Известия КГТУ им. И. Раззакова» № 2 (42) Бишкек: 2017. – 60 с.