УДК 517.68

КОНЕЧНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ С ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТЬЮ

***Абдылдаева Асель Рыскулбековна**, ст. преп., КГТУ им. И. Раззакова, Кыргызстан, 720044, г. Бишкек, пр. Ч. Айтматова 66, e-mail: asabdyl_72@mail.ru*

Цель статьи – рассматривается нелинейное операторное уравнение в случае, когда оператор A является вполне непрерывным. Построено методом Лаврентьева приближенное решение этого уравнения в Гильбертовом пространстве. Исследована конечномерная аппроксимация и доказана сходимость построенного конечномерного решения к точному решению при $n \to \infty$.

Ключевые слова: нелинейное операторное уравнение, вполне непрерывный оператор, конечномерная аппроксимация, сопряженный оператор.

FINITE – DIMENSIONAL APPROXIMATION OF THE NONLINEAR OPERATOR EQUATION WITH A COMPLETELY CONTINUOS LINEAR PART

***Abdyldaeva Asel Ryskulbekovna,** Kyrgyzstan, 720044, c. Bishkek, KSTU named after I.Razzakov, e-mail: asabdyl_72@mail.ru*

The purpose of the article - we consider a nonlinear operator equation in the case when the operator A is completely continuous. The approximate solution of this equation in the Hilbert space is constructed by Lavrent'ev's method. The finite-dimensional approximation is investigated and the convergence of the constructed finite-dimensional solution to the exact solution is proved as $n \to \infty$.
Keywords: Nonlinear operator equation, completely continuous operator, finite-dimensional approximation, adjoint operator.

Рассмотрим уравнение $Az = u + Kz, \quad (1)$

когда A вполне непрерывный линейный оператор в H, $K = AK_1$, K_1 - нелинейный оператор, удовлетворяющий условию Липшица в H.

Допустим, что уравнение (1) при $u = u_0$ имеет единственное решение z_0.

Через A^* обозначим оператор, сопряженный оператору A. Известно [1], что A^* будет линейным и вполне непрерывным оператором. Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение второго рода вида

$$\alpha z + A^*Az = A^*u + A^*Kz. \qquad (2)$$

A^*A - положительный самосопряженный вполне непрерывный оператор, таковым будет и оператор AA^* . Обозначим через $\{\psi_k\}, \{\varphi_k\}$ ортонормированные собственные элементы операторов A^*A, AA^*, соответствующие собственным значениям $\{\lambda_i^2\}$.

Для собственных элементов имеют место тождества $A^*\varphi_i = \lambda_i\psi_i,\ A\psi_i = \lambda_i\varphi_i. \quad (3)$

Имеет место обобщенная теорема Гильберта [1]

$$Au = \sum_{i=1}^{\infty} u_i\lambda_i\varphi_i,\ \ u_i = (u, \psi_i), \qquad A^*u = \sum_{i=1}^{\infty} u_i^*\lambda_i\psi_i,\ u_i^* = (u_i, \varphi_i). \quad (4)$$

Используя (4), от уравнения (2) переходим к следующему нелинейному операторному уравнению

$$z=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i u_i}{\alpha+\lambda_i^2}\psi_i+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i(K(z),\varphi_i)}{\alpha+\lambda_i^2}\psi_i. \qquad (5)$$

В силу предположения $K=AK_1$, тогда

$$(K(z),\varphi_i)=(AK_1(z),\varphi_i)=(K_1(z),A^*\varphi_i)=\lambda_i(K_1(z),\psi_i).$$

Учитывая это, из (5) переходим к уравнению

$$z=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i u_i}{\alpha+\lambda_i^2}\psi_i+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i^2}{\alpha+\lambda_i^2}(K_1(z),\psi_i)\,\psi_i. \qquad (6)$$

Нелинейное операторное уравнение (6) решаем методом последовательных приближений по формуле

$$\overline{z}_j=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i u_i}{\alpha+\lambda_i^2}\psi_i+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i^2}{\alpha+\lambda_i^2}\left(K_1(\overline{z}_{j-1}),\psi_i\right)\psi_i;\, j=1,2,\dots \qquad (7_j)$$

За нулевое приближение возьмем элемент

$$\overline{z}_0=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i u_i}{\alpha+\lambda_i^2}\psi_i.$$

Покажем, что при $\alpha>0, \overline{z}_0\in H$.

Действительно, используя ортонормированную систему $\{\psi_i\}$, получаем

$$\|\overline{z}_0\|=\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i u_i}{\alpha+\lambda_i^2}\psi_i\right\|=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_i}{\alpha+\lambda_i^2}\right)^2 u_i^2\right)^{1/2}. \qquad (8)$$

Легко видеть, что справедливо неравенство

$$\frac{x}{\alpha+x^2}\le\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}.$$

Тогда из (8) получаем неравенство

$$\|\overline{z}_0\|\le\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}u_i^2\right)^{1/2}\le\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\|u\|<\infty,$$

т. к. $u\in H$, т. е. $\overline{z}_0\in H$.

Докажем сходимость последовательности $\{\overline{z}_j\}$ в H. Из элементов этой последовательности составим ряд $\overline{z}_0+[\overline{z}_1-\overline{z}_0]+[\overline{z}_2-\overline{z}_1]+\dots+[\overline{z}_u-\overline{z}_{u-1}]+\cdots$ (9)

Сходимость ряда (9) и последовательности $\{\overline{z}_j\}$ эквивалентна. Оценим каждый член ряда (9). Полагая $j=1$ в (7_j), получаем

$$\|\overline{z}_1-\overline{z}_0\| = \left\|\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i^2}{\alpha+\lambda_i^2}\left(K_1(\overline{z}_0),\psi_i\right)\psi_i\right\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_i^2}{\alpha+\lambda_i^2}\right)^2\left(K_1(\overline{z}_0)\right)_i^2\right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(K_1(\overline{z}_0)\right)_i^2\right)^{1/2} \le \|K_1(\overline{z}_0)\| \qquad (7_1)$$

Здесь мы использовали неравенство

$$\frac{\lambda_i^2}{\alpha+\lambda_i^2} \le 1.$$

Далее из выражения при $j=2$ вычитая выражение при $j=1$ в (7_1), имеем

$$\|\overline{z}_2-\overline{z}_1\| = \left\|\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i^2}{\alpha+\lambda_i^2}\left(K_1(\overline{z}_1)-K_1(\overline{z}_0),\psi_i\right)\psi_i\right\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_i^2}{\alpha+\lambda_i^2}\right)^2\left(K_1(\overline{z}_1)-K_1(\overline{z}_0)\right)_i^2\right)^{1/2}$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(K_1(\overline{z}_1)-K_1(\overline{z}_0)\right)_i^2\right)^{1/2} \le \|K_1(\overline{z}_1)-K_1(\overline{z}_0)\| \le N\|\overline{z}_1-\overline{z}_0\|. \qquad (7_2)$$

Аналогично

$$\|\overline{z}_3-\overline{z}_2\| = \left\|\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i^2}{\alpha+\lambda_i^2}\left(K_1(\overline{z}_2)-K_1(\overline{z}_1),\psi_i\right)\psi_i\right\| \le$$

$$\le \|K_1(\overline{z}_2)-K_1(\overline{z}_1)\| \le N\|\overline{z}_2-\overline{z}_1\| \le N^2\|\overline{z}_1-\overline{z}_0\|. \qquad (7_3)$$

Для любого натурального числа $n \ge 2$ справедливо неравенство

$$\|\overline{z}_n-\overline{z}_{n-1}\| \le N^{n-1}\|\overline{z}_1-\overline{z}_0\|. \qquad (7_n)$$

Справедливость неравенства (7_n) можно доказать методом полной математической индукции.

Оценим $K_1(\overline{z}_0)$, где $\overline{z}_0$ нулевое приближение

$$\|K_1(\overline{z}_0)\| = \|K_1(\overline{z}_0)-K_1(0)+K_1(0)\| \le \|K_1(\overline{z}_0)-K_1(0)\| + \|K_1(0)\| \le N\|\overline{z}_0\| + \|K_1(0)\|.$$

Ряд (9) мажорируется числовым рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty}N^n\|\overline{z}_0\| + \sum_{n=1}^{\infty}N^{n-1}\|K_1(0)\| \qquad (10)$$

Сумму ряда (9) обозначим через z_α. Тогда

$$\lim_{j\to\infty}\overline{z_j} = z. \qquad (11)$$

Переходя к пределу при $j\to\infty$, используя непрерывность оператора K_1 и сходимость рядов получаем

$$z_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i u_i}{\alpha+\lambda_i^2}\psi_i + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i^2}{\alpha+\lambda_i^2}\left(K_1(z_\alpha),\psi_i\right)\psi_i, \qquad (12)$$

т.е. z_α является решением уравнения (6), следовательно, и уравнения (2).

Доказана

Теорема 1. Пусть 1) A - линейный вполне непрерывный оператор; 2) нелинейный оператор K представим в виде $K = AK_1$, где K_1 - нелинейный оператор, определенный в H и удовлетворяющий условию Липшица

$$\|K_1(z_1) - K_1(z_2)\| \leq N\|z_1 - z_2\|, \text{причем } N < 1.$$

Тогда уравнение (2) для любых $u \in H$ и $\alpha > 0$ имеет единственное решение $z_\alpha \in H$.

В силу мажорирующегося ряда (10) при $N < 1$, для z_α следует неравенство

$$\|z_\alpha\| \leq \frac{\|\overline{z}_0\|}{1-N} + \frac{\|K_1(0)\|}{1-N}. \qquad (13)$$

Обратный оператор оператору

$$E - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2}{\alpha + \lambda_i^2} (K_1(z), \psi_i)\, \psi_i$$

обозначим через D_α.

Решение z_α с помощью D_α записывается в виде $z_\alpha = D_\alpha u$.

Пусть элементам u_1 и u_2 соответствуют решения z_α^1 и z_α^2. Справедливо тождество

$$D_\alpha u_k = u_k + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2}{\alpha + \lambda_i^2} (K_1 D_\alpha u_k, \psi_i)\, \psi_i, \quad k = 1, 2.$$

Вычитая из тождества при $k = 1$ тождество при $k = 2$, получаем

$$\|D_\alpha u_1 - D_\alpha u_2\| \leq \|u_1 - u_2\| + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_i^2}{\alpha + \lambda_i^2} \right)^2 (K_1 D_\alpha u_1 - K_1 D_\alpha u_2)_i^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \|u_1 - u_2\| + N\|D_\alpha u_1 - D_\alpha u_2\|.$$

Отсюда, учитывая $N < 1$, имеем $\|D_\alpha u_1 - D_\alpha u_2\| \leq \frac{\|u_1 - u_2\|}{1-N}$, (14)

т.е. оператор D_α удовлетворяет условию Липшица.

Через z_α^0 обозначим решение уравнения (6) при $u = u_0$. Покажем, что $z_\alpha^0 \to z_0$ при $\alpha \to 0$ в H.

Подставим z_α^0 в (6) при $u = u_0$, получаем тождество

$$z_\alpha^0 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i u_{0i}}{\alpha + \lambda_i^2} \psi_i + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2}{\alpha + \lambda_i^2} (K_1(z_\alpha^0), \psi_i)\, \psi_i. \quad (15)$$

По предположению элемент z_0 удовлетворяет тождеству $Az_0 = u_0 + AK_1(z_0)$.

Отсюда, используя (3), получаем

$$z_0=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{u_{0i}}{\lambda_i}\psi_i+\sum_{i=1}^{\infty}(K_1(z_0),\psi_i)\,\psi_i. \quad (16)$$

Вычитая из тождества (15) тождество (16), получаем

$$z_\alpha^0-z_0=-\alpha\sum_{i=1}^{\infty}\frac{u_{0i}}{(\alpha+\lambda_i^2)\lambda_i}\psi_i+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i^2}{\alpha+\lambda_i^2}(K_1(z_\alpha^0),\psi_i)\,\psi_i-\sum_{i=1}^{\infty}(K_1(z_0),\psi_i)\,\psi_i. \quad (17)$$

Из (16) получаем $u_{0i}=\lambda_i z_{0i}-\lambda_i(K_1(z_0),\psi_i)$.

Подставляя это в (17), получаем

$$z_\alpha^0-z_0=-\alpha\sum_{i=1}^{\infty}\frac{z_{0i}\psi_i}{\alpha+\lambda_i^2}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(K_1(z_0),\psi_i)}{\alpha+\lambda_i^2}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i^2(K_1(z_\alpha^0),\psi_i)}{\alpha+\lambda_i^2}\psi_i-\sum_{i=1}^{\infty}(K_1(z_0),\psi_i)\,\psi_i.$$

Проводя преобразования из предыдущего, получим

$$z_\alpha^0-z_0=-\alpha\sum_{i=1}^{\infty}\frac{z_{0i}\psi_i}{\alpha+\lambda_i^2}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i^2}{\alpha+\lambda_i^2}(K_1(z_\alpha^0)-K_1(z_0),\psi_i)\,\psi_i.$$

$$\|z_\alpha^0-z_0\|\le\alpha\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{z_{0i}}{\alpha+\lambda_i^2}\right)^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_i^2}{\alpha+\lambda_i^2}\right)^2\left(K_1(z_\alpha^0)-K_1(z_0)\right)_i^2\right)^{1/2}\le$$

$$\le\alpha\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{z_{0i}}{\alpha+\lambda_i^2}\right)^2\right)^{1/2}+\|K_1(z_\alpha^0)-K_1(z_0)\|\le\alpha\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{z_{0i}}{\alpha+\lambda_i^2}\right)^2\right)^{1/2}+N\|z_\alpha^0-z_0\|.$$

Учитывая, что $N<1$, из последнего неравенство получим

$$\|z_\alpha^0-z_0\|\le\frac{\alpha\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{z_{0i}}{\alpha+\lambda_i^2}\right)^2\right)^{1/2}}{1-N} \qquad (18)$$

Допустим, что точное решение z_0 представимо в виде $z_0=A^\sigma\vartheta_0$ (19). Отсюда $z_{0i}=\lambda_i^\sigma\vartheta_{0i}$, $0<\sigma<1$.

Подставляя это в правую часть неравенства (18), имеем

$$\|z_\alpha^0-z_0\|\le\alpha\frac{\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_i^\sigma}{\alpha+\lambda_i^2}\right)^2\vartheta_{0i}^2\right)^{1/2}}{1-N} \qquad (20)$$

Легко видеть, что справедливо неравенство

$$\frac{x^\sigma}{\alpha+x^2}\le\frac{\alpha^{\frac{\sigma}{2}}}{2\alpha}(2-\sigma)^{\frac{2-\sigma}{2}}\sigma^{\frac{\sigma}{2}}.$$

Используя это из (20) получаем

$$\|z_\alpha - z_0\| \le \frac{(2-\delta)^{2-\delta/2}\|\vartheta_0\|}{1-N}\alpha^{\frac{\delta}{2}} \qquad (21)$$

Доказана

Теорема 2. Пусть: 1) выполнены все условия теоремы 1; 2) при $u = u_0$ уравнение (1) имеет единственное решение z_0, представимое в виде $z_0 = A^\sigma \vartheta_0, \vartheta_0 \in H, 0 < \sigma < 1$.

Тогда решение z_α^0 уравнения (2) при $u = u_0$ сходится к точному решению уравнения (1). Скорость сходимости удовлетворяет неравенству (21).

Рассмотрим конечную сумму

$$z_{\alpha,0}^n = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i u_{0i}}{\alpha+\lambda_i^2}\psi_i + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^2}{\alpha+\lambda_i^2}(K_1(z_\alpha^0),\psi_i)\,\psi_i. \qquad (22)$$

Покажем, что при специальной зависимости параметра регуляризации $\alpha(n)$ от n, последовательность элементов $\{z_{\alpha(n),0}^n\}$ при $n \to \infty$ сходится по норме пространства H к точному решению уравнения (1) при $u = u_0$.

Вычитая из (23) точное решение уравнения (1), получим

$$z_{\alpha,0}^n - z_0 = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i u_{0i}}{\alpha+\lambda_i^2}\psi_i + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^2}{\alpha+\lambda_i^2}(K_1(z_\alpha^0),\psi_i)\,\psi_i - \sum_{i=1}^\infty \frac{u_{0i}}{\lambda_i}\psi_i - \sum_{i=1}^\infty (K_1(z_0),\psi_i)\,\psi_i.$$

Отсюда

$$z_{\alpha,0}^n - z_0 = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i u_{0i}}{\alpha+\lambda_i^2}\psi_i - \sum_{i=1}^n \frac{u_{0i}}{\lambda_i}\psi_i\right) - \sum_{i=n}^\infty \frac{u_{0i}}{\lambda_i}\psi_i + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^2}{\alpha+\lambda_i^2}(K_1(z_\alpha^0),\psi_i)\,\psi_i -$$

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^2}{\alpha+\lambda_i^2}(K_1(z_0),\psi_i)\,\psi_i + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^2}{\alpha+\lambda_i^2}(K_1(z_0),\psi_i)\,\psi_i - \sum_{i=1}^\infty (K_1(z_0),\psi_i)\,\psi_i.$$

Учитывая, что $u_{0i} = \lambda_i z_{0i} - \lambda_i(K_1(z_0),\psi_i)$, из предыдущего равенства получим

$$z_{\alpha,0}^n - z_0 = -\alpha\sum_{i=1}^n \frac{z_{0i}}{\alpha+\lambda_i^2}\psi_i + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^2}{\alpha+\lambda_i^2}\left(K_1(z_{\alpha,0}^n) - K_1(z_0),\psi_i\right)\psi_i - \sum_{i=n+1}^\infty z_{0i}\,\psi_i. \qquad (23)$$

Предположим, что точное решение z_0 представимо в виде $z_0 = A^\sigma\vartheta_0, \vartheta_0 \in H, 0 < \sigma < 1$.

Тогда из (23) переходя к норме, получаем $\left\|z_{\alpha,0}^n - z_0\right\| \le \alpha^\sigma K_0 + N\left\|z_{\alpha,0}^n - z_0\right\| + \lambda_{n+1}^\theta\|v_0\|$.

Отсюда

$$\left\|z_{\alpha,0}^n - z_0\right\| \le \frac{\alpha^\sigma K_0 + \lambda_{n+1}^\theta\|v_0\|}{1-N}.$$

Если $\alpha(n) = \lambda_{n+1}^\theta$, то получим оценку $\left\|z_{\alpha,0}^n - z_0\right\| \le \frac{\lambda_{n+1}^\theta\|v_0\|}{1-N}$.

Доказана

Теорема 3. Пусть: 1) выполняются все условия теоремы 1 и 2; 2) $\alpha(n) = \lambda_{n+1}^{\theta}$.

Тогда $z_{\alpha,0} \to z_0$ при $n \to \infty$ и имеет место неравенство

$$\left\| z_{\alpha,0}^{n} - z_0 \right\| \leq \frac{\lambda_{n+1}^{\theta} \|v_0\|}{1 - N}.$$

Литература

1. Бакушинский А.Б., Гончарский А.А. Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
2. Саадабаев А.С., Абдылдаева А.Р. Построение конечномерного регуляризующего оператора для решения операторного уравнения первого рода // журнал «Проблемы современной науки и образования» № 14(56) Москва 2016.
3. Саадабаев А.С., Абдылдаева А.Р. Построение конечномерного регуляризирующего оператора для решения линейного вполне непрерывного операторного уравнения первого рода в гильбертовом пространстве // Журнал «Известия КГТУ им. И. Раззакова» № 1 (37) Бишкек 2016.
4. Саадабаев А.С., Абдылдаева А.Р. Конечномерный регуляризирующий оператор для решения нелинейного операторного уравнения первого рода в гильбертовом пространстве // Журнал «Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук» № 11 часть 1, Москва 2016 г.